渝琼辽（新高考Ⅱ卷）名校仿真模拟2023年联考

数学试题参考答案及解析

一、单选题：

1. A【解析】结合新定义可知

$E-F=\{-1,2,6\}$，又$U=\{-2,-1,0,1,2,3,4,5,6\}$，所以$\complement_U(E-F)=\{-2,0,1,3,4,5\}$.故选 A.

2. D【解析】$\because \dfrac{z(1+i)i^7}{1-i}=2-i,\therefore z(1+i)(-i)=(2-i)(1-i)$,所以$z=2-i,\bar{z}=2+i$,

$\bar{z}$的虚部为 1.故选 D.

3. D【解析】函数$f(x)=\dfrac{2x-51}{2x-52}$的图象关于点$(26,1)$对称，

所以$f(x)+f(52-x)=2$,即$a_n+a_{52-n}=2$.

则$S=a_1+a_2+\cdots+a_{51}$

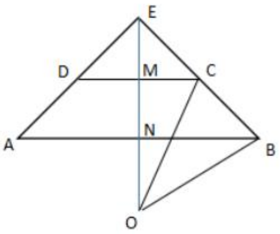
$S=a_{51}+a_{49}+\cdots+a_1$

$\therefore 2S=(a_1+a_{51})+(a_2+a_{49})+\cdots+(a_{51}+a_1)=2\times51$,所以$S=51$.

故选 D.

4. D【解析】如图$ABCD$为圆台轴截面，设$OM=h,\angle NEB=60^\circ,\therefore\angle EBN=30^\circ$.

$\because BC=4$,则$MN=2,\therefore 3r-r=2r=2\sqrt{3},r=\sqrt{3}$.



$Rt\triangle OMC$中，$R^2=h^2+(\sqrt{3})^2$，

$Rt\triangle ONB$，$R^2=(h-2)^2+(3\sqrt{3})^2$

$\therefore h^2+3=(h-2)^2+27,\therefore h=7,R^2=52$.所以$S_{球}=4\pi R^2=208\pi$.

故选 D.

5. A【解析】由半角公式得$\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{2}$,则$\tan\theta=\dfrac{4}{3}$，

所以$\sqrt{\dfrac{1+2\sin2\theta+3\cos^2\theta}{1-2\sin2\theta+3\cos^2\theta}}=\sqrt{\dfrac{\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+4\cos^2\theta}{\sin^2\theta-4\sin\theta\cos\theta+4\cos^2\theta}}$

$=\left|\dfrac{\sin\theta+2\cos\theta}{\sin\theta-2\cos\theta}\right|=\left|\dfrac{\tan\theta+2}{\tan\theta-2}\right|=5$

故选 A.

6 . C【解析】$2f(x)+f(\dfrac{1}{x})=\dfrac{mx^2+3x+2m}{x}=mx+3+\dfrac{2m}{x}$①

又$2f(\frac{1}{x})+f(x)=\dfrac{m\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}+2m}{\frac{1}{x}}=\frac{m}{x}+3+2mx$②

①×2-②得$3f(x)=2mx+6+\frac{4m}{x}-\frac{m}{x}-3-2mx=3+\frac{3m}{x}$

$\therefore f(x)=1+\frac{m}{x}(x>1)$.又$f(x)\le e^x$,即$1+\frac{m}{x}\le e^x$，所以$m\le x(e^x-1)$

令$g(x)=x(e^x-1), g'(x)=e^x(x+1)-1, g''(x)=e^x(x+2)>0$,

所以$g'(x)$在$(1,+\infty)$单调递增，$g'(x)>g'(1)=2e-1>0$，则$g(x)$在$(1,+\infty)$递增.

$g(x)_{\min}=g(1)=e-1, \therefore m\le e-1$. 故选 C.

6. B【解析】设B="取出的球全是绿球"，A_i="掷出i点"（i=1，2，3），则$P(A_i)=\frac{1}{6}$

又因为从盲盒里每次取出i个球的所有取法是C_7^i，即基本事件总数为C_7^i，

而从袋中每次取出i个绿球的所有取法是C_3^i，即事件所含基本事件数为C_3^i，

所以掷出i点，取出的球全是绿球的概率为$P(B|A_i)=\frac{C_3^i}{C_7^i}$，

所以$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=\frac{1}{10}$.故选 B.

8. C【解析】设l与x轴交点为C，$\angle OAC=\theta$

$r_1=\sin\theta$，$\triangle ABC$中，由正弦定理$r_2=\dfrac{|OB|}{2\sin(\pi-\theta)}=\dfrac{|OB|}{2\sin\theta}$,

$\therefore S_1\cdot S_2=\pi r_1^2\cdot\pi r_2^2=\pi^2\cdot\dfrac{|OB|^2}{4}$

又$|OB|^2_{\max}\left(2\sqrt{2}+1\right)^2=9+4\sqrt{2}$,所以$S_1\cdot S_2$的最大值为$(\frac{9}{4}+\sqrt{2})\pi^2$.

故选 C.

二、多选题：

9. AD【解析】对于A，当$\alpha\perp\beta$时，若$m//\alpha$，则$m//\beta$或$m\subset\beta$或m,β相交.
若$m//\beta$，则$m//\alpha$或$m\subset\alpha$或m,α相交，故$m//\alpha$不是$m//\beta$的充分条件，也不是必要条件，故A错误；
对于B,根据面面平行的性质B正确；
对于C，当$m\subset\alpha$时，若$m\perp\beta$，由面面垂直的判定定理得$\alpha\perp\beta$
若$\alpha\perp\beta$，则$m//\beta$或$m\subset\beta$或m,β相交，故C正确；

对于D，当$m\subset\alpha$时，若$n//\alpha$，则m,n平行或异面，
若$m//n$，则$n//\alpha$或$n\subset\alpha$，所以$n//\alpha$不是$m//n$的充分条件也不是必要条件，故D错误.
故选 AD.

10. ACD【解析】对于 A,根据残差定义及最小二乘法

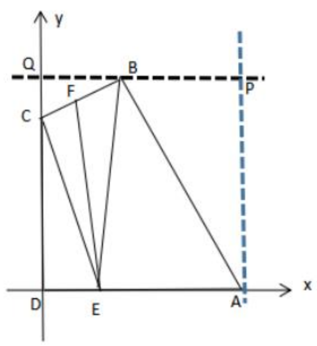
$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-(\hat{b}x_i+\hat{a}))=\sum_{i=1}^{n}y_i-\hat{b}\sum_{i=1}^{n}x_i-n\hat{a}=n\overline{y}-\hat{b}\cdot n\overline{x}-n\hat{a}=n(\overline{y}-\hat{b}\overline{x}-\hat{a})=0$$

故 A 正确；

对于 B，由百分位数定义，结果应为$\frac{1}{2}(x_{17}+x_{18})$，故 B 错误；

C、D 选项由分层抽样的均值和方差定义及独立性检验定义易知正确.故选 ACD.

11.ACD【解析】设$CQ=x$，则$QB=\sqrt{3}x,PA=QD=x+\sqrt{3},\therefore BP=1+\frac{\sqrt{3}}{3}x$.



$QB+BP=\sqrt{3}x+1+\frac{\sqrt{3}}{3}x=2,\therefore x=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

对于选项A，$AB=2BP=2(1+\frac{\sqrt{3}}{3}x)=\frac{5}{2}$，故$A$正确；

对于选项B,根据极化恒等式，

$\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EF}^2-\overrightarrow{CF}^2=\overrightarrow{EF}^2-(\frac{\sqrt{3}}{4})^2$，

过F作$FM\perp AD$,垂足为M,$|FM|$即$|\overrightarrow{EF}|$最小值，且$|FM|=\frac{9\sqrt{3}}{8}$，

$\therefore\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC}_{\min}=(\frac{9\sqrt{3}}{8})^2-\frac{3}{16}=\frac{231}{64}$，故 B 错误；

对于选项C,$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EB}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}\right)$

$\because E$为DA中点,$\overrightarrow{ED}=-\overrightarrow{EA},\therefore\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,即$\overrightarrow{FE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}.\therefore m+n=1$.

故 C 正确；

对于选项 D，以 D 为坐标原点，$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}$所在直线分别为$x$轴，$y$轴建立平面直角坐标系，

如图.$C\left(0,\sqrt{3}\right),B(\frac{3}{4},\frac{5\sqrt{3}}{4}),D\left(0,0\right),A\left(2,0\right),F(\frac{3}{8},\frac{9\sqrt{3}}{8})$,设$E\left(t,0\right)\left(0\le t\le 2\right)$

$\therefore\overrightarrow{FE}=m\overrightarrow{CD}+n\overrightarrow{BA}$,即$(t-\frac{3}{8},-\frac{9\sqrt{3}}{8})=m\left(0,-\sqrt{3}\right)+n(\frac{5}{4},-\frac{5\sqrt{3}}{4})$

$\therefore t-\frac{3}{8}=\frac{5}{4}n,n=\frac{4}{5}(t-\frac{3}{8})\left(0\le t\le 2\right),\therefore n_{\max}=\frac{4}{5}(2-\frac{3}{8})=\frac{13}{10}$,故 D 正确.

12.BC【解析】令 $m(x)=xf(x)$，则 $m'(x)=f(x)+xf'(x)$，

因为 $x^2f'(x)+xf(x)=e^{\frac{1}{2}x}$，可得 $f(x)+xf'(x)=\frac{e^{\frac{1}{2}x}}{x}$，

又由 $f(x)=\frac{m(x)}{x}$，可得 $f'(x)=\frac{m'(x)\cdot x-m(x)}{x^2}=\frac{xf(x)+x^2f'(x)-m(x)}{x^2}=\frac{e^{\frac{1}{2}x}-m(x)}{x^2}$，

令 $h(x)=e^{\frac{1}{2}x}-m(x)$，可得 $h'(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}-m'(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}-\frac{e^{\frac{1}{2}x}}{x}=e^{\frac{1}{2}x}(\frac{x-2}{2x})$，

当 $x\in(0,2)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；

当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

所以 $h(x)>h(2)=e-m(2)=e-2f(2)=0$，

即 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 单调递增，所以 B 正确，A 不正确；

由函数，$H(x)=m(x)-e\ln x$ 可得 $H'(x)=m'(x)-\frac{e}{x}=\frac{e^{\frac{1}{2}x}-e}{x}$，

令 $H'(x)<0$，解得 $0<x<2$，故 C 正确.

$f(x)>\frac{e^{\frac{1}{2}x}+e}{4}$ 的解集等价于 $xf(x)>\frac{xe^{\frac{1}{2}x}+xe}{4}$ 的解集

设 $\varphi(x)=m(x)-\frac{x}{4}e^{\frac{1}{2}x}-\frac{e}{4}x$，

$\varphi'(x)=m'(x)-\frac{1}{4}(1+\frac{x}{2})e^{\frac{1}{2}x}-\frac{e}{4}=\frac{e^{\frac{1}{2}x}}{x}-\frac{1}{4}(1+\frac{x}{2})e^{\frac{1}{2}x}-\frac{e}{4}$

$=e^{\frac{1}{2}x}\cdot\frac{8-2x-x^2}{8x}-\frac{e}{4}$

当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$8-2x-x^2<0$，此时 $\varphi'(x)<0$

所以 $\varphi(x)<\varphi(2)=m(2)-\frac{1}{2}e-\frac{e}{2}=0$，矛盾，故 D 错误.

故选 BC.

三、填空题

13. 36【解析】第一步：对除 2 以外的 3 位数字进行全排列，有 $A_3^3=6$ 种方法；

第二步：将两个 2 选两个空插进去$C_4^2=6$种方法，由分步计数原理可得共有$6\times6=36$种不同的密码.

14. $\frac{\pi}{12}$【解析】由题意$f(x)=\sin(2x+2\varphi)$，将函数$f(x)$的图象左移$\frac{\pi}{6}$个单位得到$g(x)$的图象，即$g(x)=\sin[2(x+\frac{\pi}{6})+2\varphi]=\sin(2x+\frac{\pi}{3}+2\varphi)$，

因为$g(x)$为偶函数，即$\sin(-2x+\frac{\pi}{3}+2\varphi)=\sin(2x+\frac{\pi}{3}+2\varphi)$，

即$-\sin2x\cos(\frac{\pi}{3}+2\varphi)=\sin2x\cos(\frac{\pi}{3}+2\varphi)$，而$x\in\mathbf{R}$，$\sin2x$不恒等于 0，

故$\cos(\frac{\pi}{3}+2\varphi)=0,\therefore\frac{\pi}{3}+2\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$,则$\varphi=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in Z$，而$\varphi\in[0,\frac{\pi}{2})$，故$\varphi=\frac{\pi}{12}$.

15. $(\frac{3-4\sqrt{3}}{10},\frac{4+3\sqrt{3}}{10})$或$(\frac{3+4\sqrt{3}}{10},\frac{4-3\sqrt{3}}{10})$【解析】$\vec{a}$方向上的单位向量$\overrightarrow{a_e}=(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$. 设所求向量的坐标为$(x,y)$

则$\begin{cases}x=\frac{3}{5}\cos60^\circ-\frac{4}{5}\sin60^\circ\\y=\frac{3}{5}\sin60^\circ+\frac{4}{5}\cos60^\circ\end{cases}$或$\begin{cases}x=\frac{3}{5}\cos(-60^\circ)-\frac{4}{5}\sin(-60^\circ)\\y=\frac{3}{5}\sin(-60^\circ)+\frac{4}{5}\cos(-60^\circ)\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}x=\frac{3-4\sqrt{3}}{10}\\y=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}\end{cases}$或$\begin{cases}x=\frac{3+4\sqrt{3}}{10}\\y=\frac{4-3\sqrt{3}}{10}\end{cases}$

$\therefore$与$\vec{a}=(3,4)$成60°的单位向量是$(\frac{3-4\sqrt{3}}{10},\frac{4+3\sqrt{3}}{10})$或$(\frac{3+4\sqrt{3}}{10},\frac{4-3\sqrt{3}}{10})$

16. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$【解析】设$\angle BOF=\alpha,\angle OFA=\beta$,直线$AB$斜率为$k_1$，直线$AF$斜率为$k_2$，

由题意$F(-c,0)$，$B(-c,\frac{b^2}{a}),A(c,-\frac{b^2}{a}),\therefore k_1=-\frac{b^2}{ac},k_2=-\frac{b^2}{2ac}$,则$k_1=2k_2$.

$\tan\angle BAF=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-k_1-(-k_2)}{1+k_1k_2}=\frac{-k_2}{1+2k_2k_2}=\frac{1}{\frac{1}{-k_2}+(-2k_2)}$

$\le\frac{\sqrt{2}}{4}$，当且仅当$k_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{b^2}{2ac}$

$\therefore b^2=\sqrt{2}ac,\therefore e=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

四、解答题

17.解：（1）$\because\log_3b_{n+1}-1=\log_3b_n,\therefore\log\frac{b_{n+1}}{b_n}=1$,则$\frac{b_{n+1}}{b_n}=3$，所以$\{b_n\}$为等比数列，又$b_3=9$,

得$b_1=1,b_n=3^{n-1}$, ……………………2 分

由 $2a_n = a_{n+1} + a_{n-1}$ 知 $\{a_n\}$ 是等差数列，且 $b_4 = a_{14} = 27, S_3 = 9$

$\therefore \begin{cases} a_1 + 13d = 27 \\ 3a_1 + 3d = 9 \end{cases}$，得 $a_1 = 1, d = 2. \therefore a_n = 2n-1.$ ……………………5 分

（2） $c_n = (2n+1)3^n$ ……………………6 分

$T_n = 3\cdot 3^1 + 5\cdot 3^2 + 7\cdot 3^3 + \cdots + (2n-1)\cdot 3^{n-1} + (2n+1)\cdot 3^n$

$3T_n = 3\cdot 3^2 + 5\cdot 3^3 + 7\cdot 3^4 + \cdots + (2n-1)\cdot 3^n + (2n+1)\cdot 3^{n+1}$

上面两式作差得

$-2T_n = 3^2 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3^3 + \cdots + 2\cdot 3^n - (2n+1)\cdot 3^{n+1}$

$\quad = 9 + 2(\frac{9(1-3^{n-1})}{1-3}) - (2n+1)\cdot 3^{n+1} = -2n\cdot 3^{n+1}$

$\therefore T_n = n\cdot 3^{n+1}$ ……………………………………10 分

18. 解：(1) $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$ ………………………2 分

$\overrightarrow{CD}^2 = \frac{1}{9}\overrightarrow{CB}^2 + \frac{4}{9}\overrightarrow{CA}^2 + \frac{4}{9}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = \frac{1}{9}\times 4 + \frac{4}{9}\times 16 + \frac{4}{9}\times 4\times 2\times(-\frac{1}{2})$

$= \frac{52}{9}, \therefore |\overrightarrow{CD}| = \frac{2\sqrt{13}}{3}.$ ………………6 分

(2) $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACD} + S_{\Delta BCD}$，即 $\frac{1}{2}\times 4\times 2\times \sin A = \frac{1}{2}\times 4\times 2\times \sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}\times 2\times 2\times \sin\frac{A}{2}$， ………8 分

$\therefore \cos\frac{A}{2} = \frac{3}{4},$

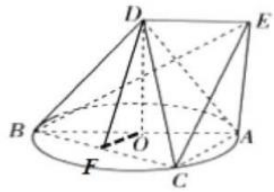
又 $0 < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2}, \therefore \sin\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$，则 $\sin A = \frac{3\sqrt{7}}{8},$

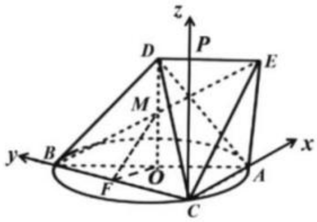
$\therefore S_{\Delta ABC} = \frac{3\sqrt{7}}{2}.$ ………………………12 分

19. 解：（1）过 O 作 $OF // AC, \because OD // AE, OF // AC, OD \cap OF = O, OD$、$OF \subset$ 面 DOF,

$AE \cap AC = A, AE, AC \subset$ 面 $ACE, \therefore$ 面 $ODF //$ 面 $AEC, DF \subset$ 面 $ODF, \therefore DF //$ 面 AEC

在 $Rt\triangle ABC$ 中，$OF // AC, \therefore F$ 为 BC 中点. ………………………4 分





（2）（方法一）连结 BE 交 OD 于 M ,则 M 为 DO、BE 中点， $DO\perp$ 面 ABC
由三垂线定理知，若 $BC\perp OF$ 则 $BC\perp DF,BC\perp FM$
所以 $\angle DFM$ 即为二面角 $D-BC-E$ 的平面角.

不妨设 $AC=1,BC=\sqrt{3}$,则 $AB=2,OD=1$,

在 $Rt\Delta OMF$ 中，$MF=\sqrt{OF^2+MO^2}=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

在 $Rt\Delta DOF$ 中，$DF=\sqrt{OD^2+OF^2}=\sqrt{1^2+(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$DM=\frac{1}{2}$,$\therefore$ 在 ΔDFM 中，由余弦定理 $\cos\angle DFM=\frac{DF^2+FM^2-DM^2}{2\cdot DF\cdot FM}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$,

所以二面角 $D-BC-E$ 的余弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. ....12 分

（方法二）过 C 作 $CP\perp$ 面 ABC ,以 $\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CP}$ 分别为 x,y,z 轴正方向建立空间直角坐标系，

$C(0,0,0),B(0,\sqrt{3},0),E(1,0,1),D(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1),\overrightarrow{DB}=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},-1),\overrightarrow{CB}=(0,\sqrt{3},0),\overrightarrow{BE}=(1,-\sqrt{3},1)$

设面 DBC 法向量 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$, $\begin{cases}\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\\ \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\end{cases}$,即 $\begin{cases}-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y-z=0\\ \sqrt{3}y=0\end{cases}$,取 $\overrightarrow{n_1}=(1,0,-\frac{1}{2})$

设面 EBC 法向量 $\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$, $\begin{cases}\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\\ \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\end{cases}$,即 $\begin{cases}x-\sqrt{3}y+z=0\\ \sqrt{3}y=0\end{cases}$,取 $\overrightarrow{n_2}=(1,0,-1)$

设二面角 $D-BC-E$ 的平面角为 θ，

$$\therefore|\cos\theta|=\left|\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}\right|=\left|\frac{1+\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{1+1}}\right|=\frac{3\sqrt{10}}{10},$$

由图知 θ 为锐角，所以二面角 $D-BC-E$ 的余弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. ....12 分

20.解：（1）由题设可知：$X\sim H$（40，2，12）

$P(X=k)=\frac{C_{12}^{k}C_{28}^{2-k}}{C_{40}^{2}}$ （$k=0,1,2$）

X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{63}{130}$	$\frac{28}{65}$	$\frac{11}{130}$

……………………………………4 分

$E(X)=\frac{2\times 12}{40}=\frac{3}{5}$ ……………………………………6 分

（2）用样本估计总体，该流水线产品长度超过 105mm 的概率约为 $\frac{12}{40}=0.3$ ……8 分

由题设可知：$Y\sim B(5,0.3)$

∴ $E(Y)=5\times 0.3=1.5$ ……………………………10 分

$D(Y)=5\times 0.3\times 0.7=1.05$ ……………………………………12 分

21.解：由已知，双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的渐近线方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 和 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$

设 $A(x_1,\frac{\sqrt{3}}{3}x_1)$，$B(x_2,-\frac{\sqrt{3}}{3}x_2)$，$P(x,y)$

∵ $|AB|=4\sqrt{3}$ ∴ $(x_1-x_2)^2+(\frac{\sqrt{3}}{3}x_1+\frac{\sqrt{3}}{3}x_2)^2=48$ 即 $(x_1-x_2)^2+\frac{1}{3}(x_1+x_2)^2=48$

∵ $\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}x_1-\frac{\sqrt{3}}{3}x_2}{2} \end{cases}$ ∴ $\begin{cases} x_1+x_2=2x \\ x_1-x_2=2\sqrt{3}y \end{cases}$ ∴ $(2\sqrt{3}y)^2+\frac{1}{3}(2x)^2=48$ ∴ $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$ ……5 分

（2）证明：设 $l: x=my-4\sqrt{2}$，$E(x_3,y_3)$，$F(x_4,y_4)$

$\begin{cases} x=my-4\sqrt{2} \\ \dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$ ∴ $(m^2+9)y^2-8\sqrt{2}my-4=0$

∴ $y_3+y_4=\frac{8\sqrt{2}m}{m^2+9}$，$y_3y_4=\frac{-4}{m^2+9}$ ……7 分

$\overrightarrow{ME}=(x_3,y_3-t)$，$\overrightarrow{ED}=(-4\sqrt{2}-x_3,-y_3)$

∵ $\overrightarrow{ME}=m_1\overrightarrow{ED}$ ∴ $y_3-t=-my_3$ ∴ $m_1=\frac{t-y_3}{y_3}=\frac{t}{y_3}-1$

同理：$m_2=\frac{t}{y_4}-1$

∴ $m_1+m_2=\frac{t}{y_3}+\frac{t}{y_4}-2=\frac{t(y_3+y_4)}{y_3y_4}-2=\dfrac{t\cdot\frac{8\sqrt{2}m}{m^2+9}}{\frac{-4}{m^2+9}}-2=-2\sqrt{2}mt-2$ ……………………………10 分

$\because E$、F、M、D 四点共线

$\therefore M(0,t)$ 满足 l 方程 $\therefore 0=mt-4\sqrt{2}$ $\therefore mt=4\sqrt{2}$

$\therefore m_1+m_2=-2\sqrt{2}\times4\sqrt{2}-2=-18$ 为定值. ....12 分

22. 解：（1）由题意即 $f(x)$ 有两个不同的零点 x_1,x_2

$f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$, $f'(x)=\frac{a}{x}+1=\frac{x+a}{x}$.

当 $a\ge0$ 时，$f'(x)>0$, $f(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 单调递增，至多只有 1 个零点，不合题意；

若 $a<0$，当 $x>-a$ 时，$f'(x)>0$，当 $0<x<-a$ 时，$f'(x)<0$，

故 $f(x)$ 在 $(0,-a]$ 单调递减，在 $[-a,+\infty)$ 单调递增；

故 $f(x)$ 在 $x=-a$ 处取得极小值，$f(-a)$ 最小值，

由 $f(x)$ 有两个不同的零点，得 $f(-a)=a\ln(-a)-a<0$，解得：$a<-\mathrm{e}$，

又 $f(1)=1>0$，

令 $g(x)=\ln x-\sqrt{x},x>0$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2-\sqrt{x}}{2x}$，

当 $0<x<4$ 时，$g'(x)>0$，当 $x>4$ 时，$g'(x)<0$，

故 $g(x)=\ln x-\sqrt{x}$ 在 $(0,4]$ 上单调递增，在 $[4,+\infty)$ 上单调递减，

故 $g(x)=\ln x-\sqrt{x},x>0$ 在 $x=4$ 处取得极大值，也是最大值，

故 $g(x)\le g(4)=\ln4-2<0$，故 $\ln x<\sqrt{x}$，$x>0$，

$\therefore f(x)=x+a\ln x>x+a\sqrt{x}=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+a\right)$，

不妨令 $x=a^2$，则 $f\left(a^2\right)=2a^2>0$，故 $f(x)$ 在 $(1,-a),\left(-a,a^2\right)$ 各有一个不同的零点，

所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-\mathrm{e})$； ....5 分

（2）由 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$ 得 $x_0=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}(\lambda\ne-1)$

$f(x)=a\ln x+x$，由题 $\begin{cases}a\ln x_1+x_1=0\\a\ln x_2+x_2=0\end{cases}$，不妨设 $0<x_1<x_2$，

则 $a(\ln x_1-\ln x_2)=x_2-x_1$，设 $t=\frac{x_1}{x_2}\in(0,1)$，$\therefore a=\frac{x_2-x_1}{\ln x_1-\ln x_2}=\frac{x_2-x_1}{\ln t}$, $f'(x)=\frac{a}{x}+1$，

$\therefore f'(x_0)=f'(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda})=a\frac{1+\lambda}{x_1+\lambda x_2}+1=\frac{x_2-x_1}{\ln t}\cdot\frac{1+\lambda}{x_1+\lambda x_2}+1=\frac{\frac{x_2}{x_2}-\frac{x_1}{x_2}}{\ln t}\cdot\frac{1+\lambda}{\frac{x_1}{x_2}+\frac{\lambda x_2}{x_2}}+1$

$=\frac{(1+\lambda)(1-t)}{(t+\lambda)\ln t}+1>0$ 恒成立，

又$\because t\in(0,1)$，$\therefore \ln t<0$，即$\frac{(1+\lambda)(1-t)}{t+\lambda}+\ln t<0$恒成立，

设$h(t)=\frac{(1+\lambda)(1-t)}{t+\lambda}+\ln t, h(t)<0$恒成立，

$h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{(1+\lambda)^2}{(t+\lambda)^2}=\frac{(t+\lambda)^2-t(1+\lambda)^2}{t(t+\lambda)^2}=\frac{(t-1)(t-\lambda^2)}{t(t+\lambda)^2}$，

i）当$\lambda^2\geq 1$时，$t-\lambda^2<0$，

$\therefore h'(t)>0$，$\therefore h(t)$在$(0,1)$上单调递增，

$\therefore h(t)<h(1)=0$恒成立，注意到$\lambda\neq -1$，

$\therefore \lambda\in(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$符合题意；

ii）当$\lambda^2<1$时，$\because t\in(0,1)$，$\therefore t\in(0,\lambda^2)$时，$h'(t)>0$，$\therefore h(t)$在$(0,\lambda^2)$上单调递增；

$t\in(\lambda^2,1)$时，$h'(t)<0$，$\therefore h(t)$在$(\lambda^2,1)$上单调递减.

$\therefore t\in(\lambda^2,1)$时，$h(t)>h(1)=0$，不满足$h(t)<0$恒成立.

综上：$\lambda\in(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$. ....12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。