天壹名校联盟·2023届高三5月冲刺压轴大联考·数学
参考答案、提示及评分细则

1.【答案】A
【解析】集合 $A=\{x\mid 0<x-2023<2\}=\{x\mid 2023<x<2025\}$，$B=\mathbf{N}$，$\therefore A\cap B=\{x\mid x=2024\}$，元素个数为1.故选A.
【命题意图】本题考查简单的对数不等式的解法及集合的交集运算，考查数学运算的核心素养.
【难度】容易.

2.【答案】B
【解析】$\dfrac{2+3i}{a-i}=\dfrac{(2+3i)(a+i)}{(a-i)(a+i)}=\dfrac{(2a-3)+(3a+2)i}{a^2+1}=\dfrac{(2a-3)+(3a+2)i}{a^2+1}$，
所以要使$\dfrac{2+3i}{a-i}$为纯虚数，则$\begin{cases}2a-3=0\\3a+2\neq 0\end{cases}$，解得：$a=\dfrac{3}{2}$.故选B.
【命题意图】本题考查复数的概念及复数的运算，考查数学运算与数学抽象的核心素养.
【难度】容易.

3.【答案】D
【解析】$1.\dot{2}\dot{7}=1+0.27+0.0027+0.000027+\cdots=1+\dfrac{0.27}{1-\dfrac{1}{100}}=1+\dfrac{27}{99}=\dfrac{126}{99}=\dfrac{14}{11}$.故选D.
【命题意图】本题是选用教材《选择性必修第二册》第57页第14题改编，考查等比数列的求和，渗透数列的极限，等比数列各项和，考查数学运算与数学抽象的核心素养，提醒学生回归教材，重视基础，适度延展.
【难度】容易.

4.【答案】C
【解析】∵向量$\overrightarrow{AB}$在向量$\overrightarrow{AC}$上的投影向量为$\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$，$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\cdot\overrightarrow{AC}=3$
又$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，
$\therefore \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=1+\dfrac{2}{3}\times 9=7$.故选C.
【命题意图】本题考查平面向量的基本运算，线性运算，数量积运算，投影向量的概念，考查逻辑推理与数学运算的核心素养.
【难度】容易.

5.【答案】B
【解析】法一：由题意可知 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，（α为锐角），$\therefore \sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，
$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}\times\dfrac{5}{3}=\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$.故选B.
法二：由题意可知 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，（α为锐角）$\therefore \cos\alpha=2\sin\alpha$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，
$\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\dfrac{4\sin\alpha}{3\sin^2\alpha}=\dfrac{4}{3\sin\alpha}=\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$.故选B.
【命题意图】本题考查直线的倾斜角与斜率，同角三角函数的基本关系，三角恒等变换，考查数学运算的核心素养.
【难度】容易.

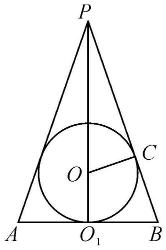
6.【答案】A
【解析】设必须马上维修记为事件A，则不需要马上维修为$\overline{A}$，
而$\overline{A}$表示9盏灯正常，且在9盏的中间有任意2盏都不相邻的3盏已坏的灯，
$\therefore P(\overline{A})=\dfrac{C_8^3}{C_{12}^3}=\dfrac{8\times 7\times 6}{12\times 11\times 10}=\dfrac{14}{55}$，$\therefore P(A)=1-P(\overline{A})=1-\dfrac{14}{55}=\dfrac{41}{55}$.故选A.
【命题意图】本题考查古典概型概率的计算，对立事件概率之间的关系，考查逻辑推理与数学运算的核心素养.
【难度】容易

7.【答案】C

【解析】如图，作出该几何体的轴截面得到如图所示的平面图形，

设该圆锥的内切球球心为 O，底面圆的圆心为点 O_1，

底面半径为 R，高为 h，



法一：由等面积法可得：$\frac{1}{2}\times 2R\cdot h=\frac{1}{2}\times(2R+2\sqrt{R^2+h^2})\times 1$，

化简得：$h=\frac{2R^2}{R^2-1}$，$V=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot h=\frac{2\pi}{3}\times\frac{R^4}{R^2-1}$，

又：$\frac{R^4}{R^2-1}=\frac{(R^2-1)^2+2(R^2-1)+1}{R^2-1}=(R^2-1)+\frac{1}{R^2-1}+2\geqslant 2\sqrt{(R^2-1)\cdot\frac{1}{R^2-1}}+2$
$=4$，

$\therefore V\geqslant\frac{2\pi}{3}\times 4=\frac{8\pi}{3}$，当且仅当 $R^2-1=\frac{1}{R^2-1}$，即 $R=\sqrt{2}$ 时取等号. 故选 C.

法二：如图：$\triangle POC\backsim\triangle PBO_1$，$\therefore\frac{R}{h}=\frac{r}{\sqrt{(h-r)^2-r^2}}=\frac{r}{\sqrt{h^2-2rh}}$，

$\therefore R^2=\frac{r^2h}{h-2r}$，$\because r=1$，$\therefore R^2=\frac{h}{h-2}$，

$\therefore V=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot h=\frac{\pi}{3}\times\frac{h^2}{h-2}=\frac{\pi}{3}\times\left[(h-2)+\frac{4}{h-2}+4\right]\geqslant\frac{8\pi}{3}$，当且仅当 $h-2=\frac{4}{h-2}$，即 $h=4$ 时取等号.

【命题意图】本题考查球与几何体的切接，基本不等式，考查直观想象与逻辑推理以及数学运算的核心素养.

【难度】中等偏难

8.【答案】B

【解析】由平面几何知识可知：$\angle F_1BF_2=\frac{\pi}{2}$，连接 AF_2.

设 $|AF_1|=m$，则 $|AF_2|=2a+m$，$|BA|=3m$，$|BF_2|=4m-2a$，

在 $\triangle ABF_2$ 中，由勾股定理有 $(2a+m)^2=(3m)^2+(4m-2a)^2$，解得 $m=\frac{5a}{6}$，

$\therefore|BF_2|=4m-2a=\frac{4a}{3}$，$|BF_1|=4m=\frac{10a}{3}$，

在 $\triangle BF_1F_2$ 中，由 $|BF_1|^2+|BF_2|^2=|F_1F_2|^2$，得 $\left(\frac{10a}{3}\right)^2+\left(\frac{4a}{3}\right)^2=(2c)^2$，

解得 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{29}{9}$，$e=\frac{\sqrt{29}}{3}$. 故选 B.

【命题意图】本题考查双曲线的定义，几何性质，考查逻辑推理与数学运算的核心素养.

【难度】较难

9.【答案】AD

【解析】由图可知 $A=2$，$2\sin\varphi=1$，$\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore\varphi=\frac{\pi}{6}$，$2\sin\left(\frac{1}{3}\omega+\frac{\pi}{6}\right)=2$，

且在 $t\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$ 内，y 随着 t 的增大而增大，$\therefore\frac{1}{3}\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，$\omega=\pi$，

$\therefore y=2\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$

对于 A：$\because\varphi=\frac{\pi}{6}$，$\therefore$A 正确；

对于 B：$\because\omega=\pi$，$\therefore T=\frac{2\pi}{\pi}=2$，$\therefore f=\frac{1}{T}=\frac{1}{2}$，$\therefore$B 错误；

对于 C：当 $t=6$ 时，$y=2\sin\left(6\pi+\frac{\pi}{6}\right)=1$，$\therefore$C 错误；

对于 D：$\frac{4}{3}\leqslant t\leqslant\frac{2\pi}{3}$ 时，$\frac{3\pi}{2}\leqslant\pi t+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{6}(4\pi+1)<\frac{5\pi}{2}$，

$\therefore$当 $t\in\left[\frac{4}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ 时，位移 y 随着时间 t 的增大而增大，$\therefore$D 正确. 故选 AD.

【命题意图】本题考查三角函数的图象、性质以及实际应用，考查直观想象与数学建模以及数学运算的核心素养.

【难度】容易

10.【答案】BC

【解析】对于 A：根据二项分布的方差公式可得：$D(X)=4\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{9}$，$\therefore D(3X+2)=3^2D(X)=$

8，∴A 错误；

对于 B：$10\times75\%=7.5$，∴这组数据的第 75 百分位数为第 8 个数 158，∴B 正确；

对于 C：∵$P(\overline{B})=\frac{2}{3}$，∴$P(B)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$，∴$P(A)\times P(B)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}=P(AB)$，根据事件独立性的定义可知：事件 A 与 B 相互独立，∴C 正确；

对于 D：根据 χ^2 的值以及常用的概率值与相应临界值可知：依据 $\alpha=0.05$ 的独立性检验可得：变量 x 与 y 相互独立，这个结论错误的概率不超过 0.1. ∴D 错误. 故选 BC

【命题意图】本题考查概率与统计的一些基本概念与基础知识，考查数学抽象与数据分析以及数学运算的核心素养.

【难度】容易

11.【答案】ACD

【解析】对于 A：直线 l 的方程可化为 $(2x+y-7)m+(x+y-4)=0$，

联立 $\begin{cases}2x+y-7=0,\\x+y-4=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\y=1.\end{cases}$

所以直线恒过定点 $P(3,1)$，∴A 正确；

对于 B：直线 l 不能表示直线 $2x+y-7=0$，也不能表示不过点 P 的直线，∴B 错误；

对于 C，直线 l 恒过圆 C 内一点 $P(3,1)$，所以直线 l 与圆相交，∴C 正确；

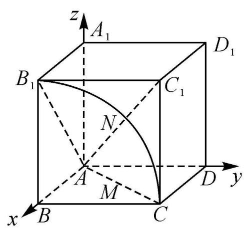
对于 D，当直线 $l\perp CP$ 时，直线被圆截得的弦长最短，所以最短弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{16-5}=2\sqrt{11}$，∴D 正确. 故选 ACD.

【命题意图】本题考查直线与圆的位置关系，考查数学直观与逻辑推理以及数学运算的核心素养.

【难度】容易

12.【答案】BCD

【解析】如图建立空间直角坐标系，则 $D(0,1,0)$，$C_1(1,1,1)$



∵直线 AM 与 AB 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，

当点 M 在侧面 AA_1D_1D 上时，$AB\perp AM$，不合题意；

当点 M 在底面 $A_1B_1C_1D_1$ 和侧面 CC_1D_1D 上时，点 M 到直线 AB 的距离大于 AB 的长度，此时，AM 与 AB 的夹角大于 $45°$；

当点 M 在侧面 AA_1B_1B 和底面 $ABCD$ 上时，可知线段 AC，AB_1 满足题意；

当点 M 在侧面 CC_1D_1D 上时，由 $AB\perp BM$，可知 $BM=AB$，此时弧 B_1C 为所求.

∴M 点的轨迹为线段 AC，AB_1，弧 B_1C，

显然线段 AC，AB_1，弧 B_1C 不共面，∴A 错误；

对于 B：点 M 的轨迹长度为 $\frac{\pi}{2}+2\sqrt{2}$，∴B 正确；

对于 C：若 M 在线段 AC 上，则 C_1M 的最小值为 1；

同理：若 M 在线段 AB_1 上，则 C_1M 的最小值也为 1；

若 M 在弧 B_1C 上，则 C_1M 的最小值为 $C_1B-1=\sqrt{2}-1$；∴C 正确；

对于 D：$M(1,y,z)(0<y,z<1)$，且 $y^2+z^2=1$，由题意设 $N(\lambda,\lambda,\lambda)$，$\lambda\in[0,1]$，

则 $\frac{\sqrt{3}}{3}AN+MN=\lambda+\sqrt{(1-\lambda)^2+(y-\lambda)^2+(z-\lambda)^2}\geqslant\lambda+\sqrt{(1-\lambda)^2}=\lambda+(1-\lambda)=1$，

等号当且仅当 $y=z=\lambda$，且 $y^2+z^2=1$，即 $y=z=\lambda=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时成立. ∴D 正确. 故选 BCD.

【命题意图】本题考查空间两点间距离公式，空间几何体与平面解析几何结合问题，考查数学直观与逻辑推理以及数学运算的核心素养.

【难度】较难

13.【答案】12000

【解析】∵总体密度函数为：$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-85)^2}{2\sigma^2}}$，∴$\mu=85$，

由 $P(70\leqslant X\leqslant100)=0.7$，得 $P(X\geqslant100)=\frac{1-0.7}{2}=0.15$，

∴超过 100 分的人数大约为 $80000\times0.15=12000$.

【命题意图】本题考查正态分布的概念以及概率计算，考查数学建模、逻辑推理以及数学运算的核心素养.

【难度】容易

14.【答案】$24x-y-32=0$

【解析】$\because f(x)=\lambda x^3+(\lambda-2)x^2(x\in\mathbf{R})$是奇函数，$\therefore f(-x)+f(x)=0$ 对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

即 $-\lambda x^3+(\lambda-2)x^2+\lambda x^3+(\lambda-2)x^2=2(\lambda-2)x^2=0$ 对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 恒成立，$\therefore\lambda=2$.

$f(x)=2x^3$，$f(2)=2\times2^3=16$，$f'(x)=6x^2$，$f'(2)=6\times2^2=24$，

$\therefore$曲线 $y=f(x)$在点$(2,16)$处的切线方程为 $y-16=24(x-2)$，化简得 $24x-y-32=0$.

【命题意图】本题考查函数奇偶性的定义、基本求导公式以及导数的几何意义，考查逻辑推理以及数学运算的核心素养.

【难度】容易

15.【答案】$\frac{\pi}{4}$

【解析】$\because$过点 $M(-1,0)$且斜率为正的直线 l 与抛物线相交于 A，B 两点，

设 $l:x=my-1(m>0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

联立$\begin{cases}y^2=8x,\\x=my-1,\end{cases}$可得 $y^2=8my-8$，$\therefore y_1+y_2=8m$，$y_1y_2=8$，$\therefore x_1+x_2=m(y_1+y_2)-2=8m^2-2$，

由$|FA|+|FB|=10$，可得 $x_1+2+x_2+2=10$，$\therefore 8m^2=8$，$m=1$，

$\therefore l$ 的方程为 $x-y+1=0$，

$\therefore$由 $F(2,0)$，$E(5,0)$在圆上，可知圆心的横坐标为$\frac{7}{2}$，

设圆心为$\left(\frac{7}{2},b\right)(b>0)$，则半径 $r^2=b^2+\frac{9}{4}$，

$\therefore$圆的方程为$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+(y-b)^2=\frac{9}{4}+b^2$，

$\because$该圆与 l 相切，$\left(\frac{\left|\frac{7}{2}-b+1\right|}{\sqrt{2}}\right)^2=b^2+\frac{9}{4}$，解得 $b=\frac{3}{2}$或 $b=-\frac{21}{2}$(舍去)，

此时圆的方程为$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{2}$，联立方程$\begin{cases}x-y+1=0\\\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{2}\end{cases}$可求得 $N(2,3)$，又

由，E，F，N 三点的坐标易知$\angle ENF=\frac{\pi}{4}$.

【命题意图】本题考查直线与抛物线的位置关系，直线与圆的位置关系，考查逻辑推理以及数学运算的核心素养.

【难度】中档

16.【答案】$[-1,1]$

【解析】当 $a=0$ 时，$f(x)=1$，符合题意；

当 $a\neq0$ 时，令 $t=a\sin x(x\in\mathbf{R})$，则 $t\in[-|a|,|a|](a\neq0)$，

$f(x)=\mathrm{e}^{a\sin x}-a\sin x$ 可化为 $y=\mathrm{e}^t-t$，

令 $g(t)=\mathrm{e}^t-t$，则 $g'(t)=\mathrm{e}^t-1$，

$t\in[-|a|,0]$时，$g(t)$单调递减，$t\in[0,|a|]$时，$g(t)$单调递增，

所以 $g(t)$的最小值为 $g(0)=1$，

对于任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，都有$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\mathrm{e}-2$ 等价于$\begin{cases}g(|a|)-1\leqslant\mathrm{e}-2,\\g(-|a|)-1\leqslant\mathrm{e}-2,\end{cases}$即$\begin{cases}\mathrm{e}^{|a|}-|a|\leqslant\mathrm{e}-1 & ①,\\\mathrm{e}^{-|a|}+|a|\leqslant\mathrm{e}-1 & ②,\end{cases}$

对于①：由 $g(t)$在$[0,|a|]$上单调递增，且 $g(1)=\mathrm{e}-1$，

可知$|a|\leqslant1$，即$-1\leqslant a\leqslant1$ 且 $a\neq0$.

在$-1\leqslant a\leqslant1$ 且 $a\neq0$ 的条件下，对②：由 $t\in[-|a|,0]$时，$g(t)$单调递减，

可得 $\mathrm{e}^{-|a|}+|a|\leqslant\mathrm{e}^{-1}+1=1+\frac{1}{\mathrm{e}}<\mathrm{e}-1$，②成立.

综上可知：实数 a 的取值范围为$[-1,1]$.

【命题意图】本题考查导数与单调性，不等式恒成立问题，考查逻辑推理以及数学运算的核心素养.

【难度】较难

17.【答案】(1)略　(2)$S_n=\frac{n}{2n+3}$

【解析】(1)证明:由 $3a_{n+1}-a_n=2\times3^{-n}$,可得 $3^{n+1}a_{n+1}-3^na_n=2,3a_1=3$, ………… 2 分

$\therefore\{3^n\cdot a_n\}$是以 3 为首项,2 为公差的等差数列; ………… 4 分

(2)由(1)知:$3^n\cdot a_n=2n+1$, ………… 6 分

$\therefore b_n=9^n\cdot a_n\cdot a_{n+1}=\frac{1}{3}(3^n\cdot a_n)\cdot(3^{n+1}\cdot a_{n+1})=\frac{1}{3}(2n+1)\cdot(2n+3)$ ………… 7 分

$\therefore\frac{1}{b_n}=\frac{3}{(2n+1)\cdot(2n+3)}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$ ………… 8 分

$\therefore S_n=\frac{3}{2}\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\right]$

$=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{n}{2n+3}$. ………… 10 分

【命题意图】本题考查等差数列的定义,通项公式,裂项求和法求简单数列的和,考查数学运算的核心素养.

【难度】容易

18.【答案】(1)$\frac{\pi}{3}$　(2)$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】(1)$\because\boldsymbol{\mu}=(c-2b,a)$,$\boldsymbol{v}=(\cos A,\cos C)$,且 $\boldsymbol{\mu}\perp\boldsymbol{v}$,

$\therefore(c-2b)\cdot\cos A+a\cdot\cos C=0$, ………… 2 分

由正弦定理知:$a=2R\sin A,b=2R\sin B,c=2R\sin C$($R$ 是$\triangle ABC$ 外接圆半径),

$\therefore(2R\sin C-2\cdot(2R\sin B)\cdot\cos A+2R\sin A\cdot\cos C=0$,

$\therefore\sin C\cdot\cos A-2\sin B\cdot\cos A+\sin A\cdot\cos C=0$,

即 $\sin(A+C)=2\sin B\cdot\cos A$, ………… 4 分

而 A,B,C 是$\triangle ABC$ 的三内角,$\therefore\sin(A+C)=\sin B>0$,

$\therefore\cos A=\frac{1}{2},A=\frac{\pi}{3}$; ………… 6 分

(2)$\because\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=2$,$\therefore bc\cos A=2,bc=4$, ………… 8 分

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\geqslant2bc-4=4$,$\therefore a\geqslant2$, ………… 10 分

$2R=\frac{a}{\sin A}\geqslant\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4\sqrt{3}}{3},R\geqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$,即$\triangle ABC$ 外接圆半径的最小值为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$. ………… 12 分

【命题意图】本题考查正、余弦定理,简单的三角恒等变换,考查逻辑推理及数学运算的核心素养.

【难度】容易

19.【答案】(1)略　(2)$\frac{2}{3}$

【解析】(1)证明:由三棱台 $A_1B_1C_1-ABC$ 知:$A_1B_1\parallel AB$,

在梯形 A_1ABB_1 中,取 AB 的中点 E,连接 B_1E,

则四边形 A_1AEB_1 是平行四边形,

$\therefore B_1E=AA_1=\sqrt{5}$,

$EB=AB-A_1B_1=4-2=2,BB_1=3$,

$B_1E^2+EB^2=BB_1^2$,

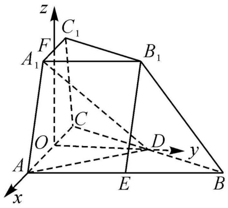
$\therefore\angle BEB_1=\frac{\pi}{2}$,$\therefore BA\perp AA_1$, ………… 3 分

又$\because\angle BAC=\frac{\pi}{2}$,$\therefore BA\perp AC$, ………… 4 分

$\because AA_1\cap AC=A$,$\therefore BA\perp$平面 A_1ACC_1, ………… 5 分

$\therefore$平面 $A_1ACC_1\perp$平面 ABC； …………………………………………………………… 6 分

(2)解：由(1)知：平面 $A_1ACC_1\perp$平面 ABC；



取 AC 的中点 O，A_1C_1 的中点 F，连接 OF，OD，

由条件知：四边形 A_1ACC_1 是等腰梯形，$\therefore OF\perp AC$，$\therefore OF\perp$平面 ABC，

分别以 OA，OD，OF 所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，如图，

则在等腰梯形 A_1ACC_1 中，由平面几何知识可得：$OF=\sqrt{5-(2-1)^2}=2$，

$\therefore A(2,0,0)$，$D(0,2,0)$，$A_1(1,0,2)$，$\overrightarrow{AD}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{AA_1}=(-1,0,2)$， ………………………… 8 分

设平面 A_1AD 的法向量 $\boldsymbol{\mu}=(x,y,z)$，则由 $\begin{cases}\boldsymbol{\mu}\perp\overrightarrow{AD},\\ \boldsymbol{\mu}\perp\overrightarrow{AA_1},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-2x+2y=0,\\ -x+2z=0,\end{cases}$

令 $x=2$，得 $y=2$，$z=1$，$\therefore\boldsymbol{\mu}=(2,2,1)$， ………………………………………………………… 10 分

又平面 A_1ACC_1 的法向量 $\boldsymbol{v}=(0,1,0)$，

设平面 A_1ACC_1 与平面 A_1AD 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{\mu}|\cdot|\boldsymbol{v}|}=\dfrac{2\times1}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}\times1}=\dfrac{2}{3}$. ………………………………………………… 12 分

【命题意图】本题考查直线与平面、平面与平面的位置关系，平面与平面的夹角，空间向量的坐标运算，考查直观想象、数学抽象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【难度】容易

20.【答案】(1)$y=c\cdot d^x$，$\hat{y}=3.47\times10^{0.25x}$，$x=8$ 时，$\hat{y}=3.47\times10^2=347$ 千户

(2)甲服务费为 70 元的概率是 $\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}$，50 元的概率是 $1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{15}{16}$；

乙服务费为 90 元的概率是 $\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}$，70 元的概率是 $2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$，50 元的概率是 $1-\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{11}{16}$.

服务费 X 的分布列为：

X	160	140	120	100
P	$\dfrac{1}{256}$	$\dfrac{19}{256}$	$\dfrac{71}{256}$	$\dfrac{165}{256}$

$E(X)=\dfrac{435}{4}$元

【解析】(1)由散点图可知：$y=c\cdot d^x$ 比较适宜， ……………………………………………………… 1 分

由 $y=c\cdot d^x$ 得：$\lg y=\lg c+\lg d\cdot x$，即 $z=\lg c+\lg d\cdot x$，z 是 x 的一次函数关系，

$\bar{x}=\dfrac{1+2+3+4+5+6+7}{7}=4$，$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2=140$， ……………………………… 2 分

$\lg d=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iz_i-n\bar{x}\bar{z}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}=\dfrac{50.12-7\times4\times1.54}{140-7\times4^2}=\dfrac{7}{28}=0.25$， ………………………………………… 3 分

$\lg c=\bar{z}-\lg d\cdot\bar{x}=0.54$，$\therefore\hat{y}=3.47\times10^{0.25x}$， …………………………………………………… 5 分

当 $x=8$ 时，$y=3.47\times10^{0.25\times8}=3.47\times100=347$ 千户； ……………………………………… 6 分

(2)由题意可知：抽奖后，

甲服务费为 70 元的概率是 $\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}$，50 元的概率是 $1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{15}{16}$； ………………………… 7 分

乙服务费为 90 元的概率是 $\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}$，70 元的概率是 $2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$，

50 元的概率是 $1-\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{11}{16}$. …………………………………………………………………… 8 分

∴今年该家庭支付的服务费 X 的分布列为：

X	160	140	120	100
P	$\frac{1}{256}$	$\frac{19}{256}$	$\frac{71}{256}$	$\frac{165}{256}$

…………………………………………………………………………………… 10 分

$E(X)=\frac{435}{4}$元. …………………………………………………………………… 12 分

【命题意图】本题考查最小二乘法求非线性经验回归方程，离散型随机变量的分布列与数学期望，考查数学抽象、数学建模、数据分析、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【难度】中档

21.【答案】(1)$x^2-y^2=2$　(2)$\pm x-2y+3=0$

【解析】(1)由题意，设双曲线 $C:\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的半焦距为 c，左焦点为 F_1，

斜率为正的渐近线方程为 $bx-\sqrt{2}y=0$，…………………………………………………… 1 分

则 $\frac{|bc|}{\sqrt{b^2+2}}=\frac{c}{\sqrt{2}}$，解得 $b^2=2$，…………………………………………………… 3 分

∴双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$；…………………………………………………… 4 分

(2)由题意可得 l 的斜率 k 一定存在且 $k\neq\pm1$，设 $l:y=kx+m$，

由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{y^2}{2}+x^2=1,\end{cases}$ 可得 $(kx+m)^2+2x^2-2=0$，即 $(k^2+2)x^2+2kmx+(m^2-2)=0$.

∵直线 l 与椭圆 $\frac{y^2}{2}+x^2=1$ 相切，∴$\Delta=4k^2m^2-4(k^2+2)(m^2-2)=0$，

化简得 $m^2-k^2=2$，…………………………………………………………………… 5 分

由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ x^2-y^2=2,\end{cases}$ 可得 $x^2-(kx+m)^2-2=0$，即 $(1-k^2)x^2-2kmx-(m^2+2)=0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)(x_1<0,x_2>0)$，

∴$x_1+x_2=\frac{-2km}{k^2-1}$，$x_1x_2=\frac{m^2+2}{k^2-1}<0$，∴$k^2<1$，$m^2=2+k^2<3$，…………………… 6 分

$|AB|=\sqrt{(1+k^2)(x_1-x_2)^2}=\frac{2\sqrt{1+k^2}\sqrt{m^2+2-2k^2}}{1-k^2}$，

D 到 AB 的距离 $d_1=\frac{2-m}{\sqrt{1+k^2}}$，$S_1=\frac{1}{2}|AB|\cdot d_1=\frac{(2-m)\sqrt{m^2+2-2k^2}}{1-k^2}$；………………… 7 分

由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ y=x,\end{cases}$ 可得 $x=\frac{m}{1-k}$，由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ y=-x,\end{cases}$ 可得 $x=\frac{m}{-1-k}$.

$S_2=\frac{1}{2}|OE|\cdot|OF|=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\left|\frac{m}{1-k}\right|\times\sqrt{2}\left|\frac{m}{-1-k}\right|=\frac{m^2}{1-k^2}$；………………………… 8 分

由 $\frac{7\sqrt{15}}{5}\cdot S_1-S_2=4$ 可得 $\frac{7\sqrt{15}}{5}\cdot\frac{(2-m)\sqrt{m^2+2-2k^2}}{1-k^2}-\frac{m^2}{1-k^2}=4$，

∴$\frac{7\sqrt{15}}{5}(2-m)\sqrt{6-m^2}=3(2-m)(2+m)$，∴$\frac{7\sqrt{15}}{5}\sqrt{6-m^2}=3(2+m)$，

化简得 $(2m-3)(16m+39)=0$，解得 $m=\frac{3}{2}$ 或 $m=-\frac{39}{16}$(舍去)，…………………………… 10 分

此时 $k=\pm\frac{1}{2}$. ∴l 的方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$，即 $\pm x-2y+3=0$. …………………………… 12 分

【命题意图】本题考查直线与圆锥曲线的位置关系，考查逻辑推理、数学运算的核心素养.

【难度】较难

22.【答案】(1)略　(2)$a\leqslant 1$

【解析】(1)证明:$f(x)=\ln(1+x)$,$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$.

当 $a=1$ 时,$g(x)=\dfrac{x}{e^x}$,$g'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$.

令 $h(x)=f'(x)-g'(x)=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1-x}{e^x}=\dfrac{1}{(1+x)e^x}(e^x+x^2-1)$, ………… 2 分

令 $\mu(x)=e^x+x^2-1$,则 $\mu'(x)=e^x+2x$,

显然 $\mu'(x)$在$(-1,0)$上是单调递增函数,且 $\mu'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{e}}-1<0$,$\mu'(0)=1>0$,

$\therefore\mu'(x)$在$\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$上有唯一零点 x_0, ………… 3 分

且 $x\in(-1,x_0)$时,$\mu'(x)<0$,$\mu(x)$单调递减,

$x\in(x_0,0)$时,$\mu'(x)>0$,$\mu(x)$单调递增.

又 $\mu(0)=0$,$\mu\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{e}}-\dfrac{3}{4}<\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{4}<0$,

$\mu\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)=e^{-\frac{\sqrt{6}}{3}}+\dfrac{2}{3}-1>e^{-1}-\dfrac{1}{3}>0$,

$\therefore\mu(x)=0$ 在$\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{3},-\dfrac{1}{2}\right)$上有唯一的根,

$\therefore h(x)=f'(x)-g'(x)$在$(-1,0)$上有唯一零点,

即 $f'(x)=g'(x)$在$(-1,0)$上有且仅有一个实数根; ………… 5 分

(2)$\because f(x)-g(x)=\ln(1+x)-\dfrac{ax}{e^x}=\dfrac{1}{e^x}[e^x\ln(1+x)-ax]$,

令 $G(x)=e^x\ln(1+x)-ax$,$x\in[0,+\infty)$,则 $G(0)=0$,

$f(x)>g(x)$等价于:$G(x)>0$,$x\in(0,+\infty)$, ………… 6 分

$G'(x)=e^x\left[\ln(1+x)+\dfrac{1}{1+x}\right]-a$,$G'(0)=1-a$,

令 $H(x)=e^x\left[\ln(1+x)+\dfrac{1}{1+x}\right]-a$,

则 $H'(x)=e^x\left[\ln(1+x)+\dfrac{2}{1+x}-\dfrac{1}{(1+x)^2}\right]$,

令 $T(x)=\ln(1+x)+\dfrac{2}{1+x}-\dfrac{1}{(1+x)^2}$,$x\in[0,+\infty)$,

则 $T'(x)=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{2}{(1+x)^2}+\dfrac{2}{(1+x)^3}=\dfrac{x^2+1}{(1+x)^3}>0$, ………… 8 分

故 $T(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,$T(x)\geqslant T(0)=1$,$H'(x)\geqslant 1>0$,

故 $H(x)$即 $G'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,$G'(x)>1-a$.

①当 $a\leqslant 1$ 时,$G'(x)>0$,$\therefore G(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,

$\therefore G(x)>G(0)=0$; ………… 9 分

②当 $a>1$ 时,$G'(0)=1-a<0$,取 $x_1=e-1+\ln a>0$,

则 $\ln(1+x_1)=\ln(e+\ln a)>\ln e=1$,$\dfrac{1}{1+x_1}>0$,

$e^{x_1}=e^{e-1+\ln a}>e^{\ln a}=a$,

$\therefore G'(x_1)=e^{x_1}\left[\ln(1+x_1)+\dfrac{1}{1+x_1}\right]-a>a\cdot(1+0)-a=0$,

$\therefore\exists x_2\in(0,x_1)$,使得 $G'(x_2)=0$,

$x\in(0,x_2)$时,$G'(x)<0$,$G(x)$单调递减,

此时 $G(x)<G(0)=0$,不符合题意. ………… 11 分

综上可知:a 的取值范围为$(-\infty,1]$. ………… 12 分

【命题意图】本题考查导数在研究函数性质、不等式中的应用,考查数学运算与逻辑推理的核心素养.

【难度】难

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。