高三理科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。
4. 本试卷主要命题范围：集合与常用逻辑用语、函数、导数、三角函数、三角恒等变换、解三角形、平面向量、数列、不等式。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|(x+1)(3-x)<0\}$，$B=\left\{x\left|\frac{1}{x}\leqslant 1\right.\right\}$，则 $(\complement_R A)\cap B=$ ~~A~~ B

A. $[-1,0]\cup[1,3]$　　B. $[-1,0)\cup[1,3]$　　C. $(-\infty,-1)\cup[3,+\infty)$　　D. $[1,3]$

2. "$\sqrt{x-1}<1$"是"$x<2$"的 ~~A~~ $p\nRightarrow q$ $p\Rightarrow q$ $x\geqslant 1$ $x<2$

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件
C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2+a_3=2(a_1+a_2)$，则数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=$ D

A. 2　　B. 1　　C. -1 或 1　　D. -1 或 2

4. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $\triangle ABC$ 的面积等于 $\frac{1}{4}(a^2+c^2-b^2)$，则角 B 的大小为

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

5. 已知实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-4\leqslant 0, & y=4-x\\ x-y+1\leqslant 0,\\ 4x-y+4\geqslant 0, & y=4x+4\end{cases}$ 则 $z=2x-y$ 的最大值为 B

A. 2　　B. $\frac{1}{2}$　　C. -2　　D. -4

6. 对于向量 a,b，定义"$a\times b$"运算：$a\times b$ 的运算结果是一个向量，且 $|a\times b|=|a|\cdot|b|\sin\langle a,b\rangle$，其中 $\langle a,b\rangle$ 表示向量 a,b 的夹角．在锐角 $\triangle ABC$ 中，$BC=8$，$AC=5$，$|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CA}|=24$，则 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=$ D

A. 21　　B. 32　　C. -21　　D. -32

7.《九章算术》中的"两鼠穿墙题"是我国数学的古典名题："今有垣厚若干尺，两鼠对穿，大鼠日一尺，小鼠也日一尺，大鼠日自倍，小鼠日自半．"题意是有两只老鼠从墙的两边打洞穿墙，大老鼠第一天进一尺，以后每天加倍；小老鼠第一天也进一尺，以后每天减半．如果墙足够厚，第 n 天后大老鼠打洞的总进度是小老鼠的 4 倍，则 n 的值为 C

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

8. 若 $a<b<0$，则下列不等式中，一定不成立的是 A

A. $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$　　B. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　C. $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$　　D. $|a|>|b|$

9. 对于函数 $f(x)$，若 $x_1+x_2=2a$ 时，$f(x_1)+f(x_2)=2b$，则函数 $f(x)$ 的图象关于点 (a,b) 成中心对称. 探究函数 $f(x)=\frac{2\cdot 3^x}{3^x+\sqrt{3}}$ 图象的对称中心，并利用它求 $f\left(\frac{1}{2\,022}\right)+f\left(\frac{2}{2\,022}\right)+f\left(\frac{3}{2\,022}\right)+\cdots+f\left(\frac{2\,021}{2\,022}\right)$ 的值为

A. 4 042　　B. $2\,021\sqrt{3}$　　C. 2 022　　D. 2 021

10. 在公差为 1 的等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=t$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\frac{1+a_n}{a_n}$. 若对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，$b_n\leqslant b_8$ 恒成立，则实数 t 的取值范围为

A. $[-8,-7]$　　B. $(-8,-7)$　　C. $[-9,-8]$　　D. $(-9,-8)$

11. 定义 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，如 $[-0.5]=-1$，$[2.3]=2$. 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=[\log_2 n](n\in\mathbf{N}^*)$，则 $\sum\limits_{n=1}^{4\,025}a_n=$

A. $10\times 2^{12}+2$　　B. $9\times 2^{11}+2$　　C. $2^{10}-2$　　D. 78

12. 函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)+\cos(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象过点 $(0,\sqrt{3})$；且相邻两对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，设 $g(x)=f(x)-\sqrt{3}$，若 $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$，$g^2(x)-(2+m)g(x)+2+m\geqslant 0$ 恒成立，则实数 m 的取值范围为

$=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

A. $\left(-\infty,\frac{-1+3\sqrt{3}}{2}\right]$　　B. $\left(-\infty,\frac{1-3\sqrt{3}}{2}\right]$　　C. $[-2,+\infty)$　　D. $[2,+\infty)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_5=9$，则 $a_3=$ ~~±3~~ 3.

14. 若 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$，则 $\tan(\alpha-3\pi)=$ $2\sqrt{2}$.

15. 已知等差数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n，T_n，若 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{3n-1}{2n+3}$，则 $\frac{a_9}{b_{11}}=$ $\frac{3}{2}$.

16. 已知 $a>0$，$b\neq 0$，且 $a+|b|=3$，则 $\frac{9}{a}+\frac{b+3}{|b|}$ 的最小值为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

已知 $f(x)=ax^2+b(4-b)x-3$.

(1)若不等式 $f(x)>0$ 的解集为 $(1,3)$，求实数 a,b 的值；

(2)解关于 b 的不等式 $f(1)-ab<0(a\in\mathbf{R})$.

$-3a+3b(4-b)-3=0$
$9a+3b(4-b)-3=0$
$-6a-6=0$
$a=-1$
$-3-1+$
$-b^2+4b-4=0$
$b^2-4b+4=0$
$(b-2)^2=0$

$(b-1)^2>0$
$a<0$

$a-b^2+4b-3-ab$
$=a+4b-b^2-3-ab$
$=-b^2+(4-a)b+a-3<0$
$b^2+(a-4)b+3-a>0$
$(b-1)(b-(3-a))$

$3-a>1$
$-a>-2$
$a<2$
$a=2$

$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots$

18.（本小题满分 12 分）

在等差数列$\{a_n\}$中，$a_2+a_4=14$，$a_1+a_3+a_5+a_7=36$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）令$b_n=\frac{2}{a_n-1}$，求数列$\{b_nb_{n+2}\}$的前 n 项和 T_n.

$a_1+d+a_1+3d=14$

$2a_1+4d=14$

$4a_1+12d=36$

$4a_1+8d=28$

$4d=8$

$d=2$

$a_1=\frac{14-8}{2}=3$

$a_n=3+2(n-1)$

$=2n+1$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$

$\frac{3(n+1)(n+2)}{2(n+1)(n+2)}-\frac{n+2}{n+1}$

$\frac{-4n-6}{2(n+1)(n+2)}$

$3(n^2+3n+2)$

$3n^2+9n+6-2n+3$

$\cancel{3n^2+7n+3}$

$3n^2+5n$

19.（本小题满分 12 分）

面对全球能源、资源危机，环境污染日益严重等一系列难题，世界各国都在积极寻找应对措施，努力开发新能源. 对于汽车行业来说，传统的燃油汽车耗能大，污染大，因此发展新能源汽车有着非常积极的作用，这也与我国所提出的环境保护、节能减排理念相一致. 我国在积极推进新能源汽车研发生产工作，某大型公司对新推出的新能源汽车市场调研，通过市场分析，全年需投入固定成本 3 000 万元，生产 x 百辆，需另投入成本 $C(x)$ 万元，且 $C(x)=\begin{cases}10x^2+200x, & 0<x<50,\\ 601x+\frac{10\ 000}{x}-9\ 000, & x\geqslant 50,\end{cases}$ 由市场调研知，每辆车售价为 6 万元，且全年内生产的车辆当年能全部销售完.

（1）求出年利润 $L(x)$（万元）关于年产量 x（百辆）的函数关系式；

（2）当年产量为多少百辆时，企业所获利润最大？并求出最大利润.

-4000

$0<x<50$

$600x-3000-10x^2-200x$

$-10x^2+400x-3000$ $=-10(x^2-40x)$

$=-10(x-20)^2$ -4000

$x\geqslant 50$

$600x-601x-\frac{10000}{x}+9000$

$-x-\frac{10000}{x}+9000$

$+$

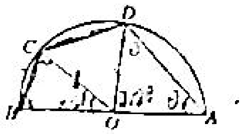
100 1

20.（本小题满分 12 分）

北京 2022 年冬奥会将于 2022 年 2 月 4 日在北京和张家口开幕，运动员休息区本着环保、舒适、温馨这一出发点，进行精心设计．如图，道路 AB 长为 4 百米，现在 AB 的同一侧设计四边形 $ABCD$，C、D 在以 AB 为直径的半圆上．设 $\angle COB=\theta$（O 为圆心）．

(1)若在四边形 $ABCD$ 内种植花卉，且 $\angle COD=\frac{\pi}{3}$，当 θ 为何值时，花卉种植面积最大？

(2)若为了景观错落有致，沿着 BC、CD 和 DA 设置景观花带，且 $BC=CD$，则当 θ 为何值时，景观花带总长 L 最长？并求 L 的最大值．



$\frac{2}{3}\pi-\theta$

$\frac{2}{\sin\theta}=\frac{AD}{\sin(\pi-\theta)}$

$2\cdot\sin(\frac{2}{3}\pi-\theta)+2\sin\theta$

$\sin\frac{2\pi}{3}\cos\theta+\sin\theta\cos\frac{2\pi}{3}$

$\frac{OC}{\sin\theta}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}s$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta$

$-2\sin 2\theta$

-2 $\quad -4\sin\theta$

21.（本小题满分 12 分）

已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_2=3$ 且 $2S_n=n(a_n+1)(n\in\mathbf{N}^*)$．

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)若 $b_n=S_n\sin\frac{n\pi}{2}+S_{n+1}\sin\frac{(n+1)\pi}{2}$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求 T_{50}．

$S_n=\frac{n}{2}(a_n+1)$ $\quad S_{n-1}=\frac{n-1}{2}(a_{n-1}+1)$

$S_n-S_{n-1}=a_n=\frac{n}{2}a_n+\frac{n}{2}-\frac{n-1}{2}a_{n-1}-\frac{n-1}{2}$

22.（本小题满分 12 分）

已知 $f(x)=e^x-ax^2-x-1(a>0)$．

$e^x-\frac{e}{2}x^2-x-1$

$f'(1)=e-e-1$

(1)当 $a=\frac{e}{2}$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

e^x-ex-1

$f(1)=e-\frac{e}{2}-1-1$

(2)设 $F(x)=f(x)+2$，若当 $a\in(t,+\infty)$ 时，$F(x)$ 有三个不同的零点，求实数 t 的最小值．

$y-f(1)=f'(1)(x-1)$

$y-\frac{e}{2}=-x+1$

$=-x-1+\frac{e}{2}$

$y+x+1-\frac{e}{2}=0$

高三理科数学参考答案、提示及评分细则

1. B　由题意知 $A=(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$，$B=(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$，所以 $\complement_{\mathbf{R}}A=[-1,3]$，所以 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=[-1,0)\cup[1,3]$. 故选 B.

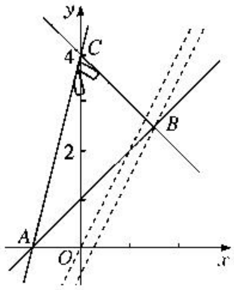
2. A　由 $\sqrt{x-1}<1$ 得 $1\leqslant x<2$，所以"$\sqrt{x-1}<1$"是"$x<2$"的充分不必要条件. 故选 A.

3. D　法一：由题意知 $a_2+a_3=a_1q+a_2q=q(a_1+a_2)=2(a_1+a_2)$，若 $a_1+a_2\neq0$，则 $q=2$；若 $a_1+a_2=0$，则 $a_2=-a_1$，所以 $q=-1$，所以 $q=-1$ 或 $q=2$. 故选 D.

法二：由题意知 $a_1(q+q^2)-2a_1(1+q)=0$，所以 $(1+q)(q-2)=0$，所以 $q=-1$ 或 $q=2$. 故选 D.

4. C　由题意及余弦定理知 $\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{4}\times2ac\cos B$，所以 $\tan B=1$，又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$. 故选 C.

5. B　画出可行域(如图阴影部分所示)，当直线 $2x-y-z=0$ 过点 B 时，z 取得最大值，联立 $\begin{cases}x+y-4=0,\\x-y+1=0,\end{cases}$ 解得点 B 的坐标为 $\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$，所以 $z_{\max}=2\times\frac{3}{2}-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$. 故选 B.



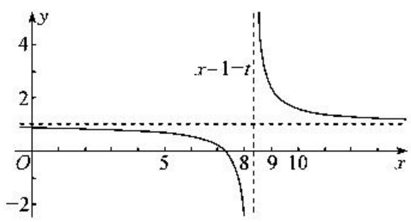
6. D　因为 $|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{CA}|\sin\langle\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\rangle=8\times5\times\sin\langle\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\rangle=24$，所以 $\sin\langle\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\rangle=\frac{3}{5}$，又 $\langle\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\rangle=\pi-C$，因为 C 为锐角，所以 $\langle\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\rangle$ 为钝角，所以 $\cos\langle\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\rangle=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$，所以 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{CA}|\cos\langle\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\rangle=8\times5\times\left(-\frac{4}{5}\right)=-32$. 故选 D.

7. C　大老鼠每天打洞的长度构成等比数列，设为 $\{a_n\}$，则 $a_1=1$，其公比为 2，所以其前 n 项和 $S_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$. 小老鼠每天打洞的长度也构成等比数列，设为 $\{b_n\}$，则 $b_1=1$，其公比为 $\frac{1}{2}$，所以其前 n 项和 $T_n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$. 由题意知 $S_n=4T_n$，即 $2^n-1=8\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$，化简得 $(2^n)^2-9\times2^n+8=0$，所以 $2^n=8$ 或 $2^n=1$，所以 $n=3$ 或 $n=0$(舍). 故选 C.

8. A　若 $a<b<0$，则 $\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a}=\frac{a-(a-b)}{a(a-b)}=\frac{b}{a(a-b)}<0$，即 $\frac{1}{a-b}<\frac{1}{a}$，故 A 不成立；因为 $a<b<0$，所以 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}>0$，即 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，故 B 成立；因为 $a<b<0$，所以 $\frac{a}{b}>0$，$\frac{b}{a}>0$，所以 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=2$，又 $a\neq b$，所以 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$，故 C 成立；因为 $a<b<0$，所以 $|a|>|b|$，故 D 成立. 故选 A.

9. D　因为 $f(x)+f(1-x)=\frac{2\cdot3^x}{3^x+\sqrt{3}}+\frac{2\cdot3^{1-x}}{3^{1-x}+\sqrt{3}}=2\left(\frac{3^x}{3^x+\sqrt{3}}+\frac{3}{3+\sqrt{3}\cdot3^x}\right)=2$，令 $S=f\left(\frac{1}{2\,022}\right)+f\left(\frac{2}{2\,022}\right)+f\left(\frac{3}{2\,022}\right)+\cdots+f\left(\frac{2\,021}{2\,022}\right)$，利用倒序相加法得 $2S=2\,021\times2$，所以 $S=2\,021$. 故选 D.

10. B　由题意得 $a_n=n+t-1$，则 $b_n=\frac{1}{a_n}+1=1+\frac{1}{n-(1-t)}$，因为函数 $f(x)=1+\frac{1}{x-(1-t)}$ 在 $(-\infty,1-t)$ 上单调递减，在 $(1-t,+\infty)$ 上单调递减，且当 $x\in(-\infty,1-t)$ 时，$f(x)<1$，当 $x\in(1-t,+\infty)$ 时，$f(x)>1$，其图象如图所示，$\{b_n\}$ 的图象为其上一系列孤立的点，由对 $n\in\mathbf{N}^*$，$b_n\leqslant b_9$ 恒成立，即 b_9 为 $\{b_n\}$ 的最大项，结合图象得 $8<1-t<9$，所以 $-8<t<-7$. 故选 B.



11. A　当 $2^k\leqslant n<2^{k+1}(k\in\mathbf{N})$ 时，含有 2^k 个数列 $\{a_n\}$ 中的项 $a_n=[\log_2n]=k$，又 $2^{11}<4\,095<4\,096=2^{12}$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{4\,095}a_n=0\times2^0+1\times2^1+2\times2^2+\cdots+11\times2^{11}$，两边同乘以 2，得 $2\sum\limits_{i=1}^{4\,095}a_n=0\times2^1+1\times2^2+2\times2^3+\cdots+11\times2^{12}$，两式相减，得 $-\sum\limits_{i=1}^{4\,095}a_n=0+2^1+2^2+\cdots+2^{11}-11\times2^{12}=\frac{2(1-2^{11})}{1-2}-11\times2^{12}=-10\times2^{12}-2$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{4\,095}a_n=10\times2^{12}+2$. 故选 A.

12. C　$f(x)=\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)+\cos(\omega x+\varphi)=2\sin\left(\omega x+\varphi+\frac{\pi}{6}\right)$，因为相邻两对称轴之间的距离为$\frac{\pi}{2}$，所以 $f(x)$ 的最小正周期为 π，所以 $\omega=2$，由题意知 $f(0)=2\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$，即 $\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，故 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$. 由 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$得 $0\leqslant 2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 2$，所以 $-\sqrt{3}\leqslant g(x)\leqslant 2-\sqrt{3}$，设 $g(x)=t$，则 $t\in[-\sqrt{3},2-\sqrt{3}]$，则原问题转化为对 $\forall t\in[-\sqrt{3},2-\sqrt{3}]$，$t^2-(2+m)t+2+m\geqslant 0$，即 $(1-t)m\geqslant -t^2+2t-2$ 恒成立，因为 $\sqrt{3}-1\leqslant 1-t\leqslant\sqrt{3}+1$，所以 $m\geqslant -\left(1-t+\frac{1}{1-t}\right)$，因为 $1-t+\frac{1}{1-t}\geqslant 2$，当且仅当 $1-t=1$，即 $t=0$ 时等号成立，所以 $-\left(1-t+\frac{1}{1-t}\right)_{\max}=-2$，所以 $m\geqslant -2$. 故选 C.

13. 3　$a_5=a_1q^4=q^4=9$，所以 $q^2=3$，所以 $a_3=a_1q^2=3$.

14. $2\sqrt{2}$　由题意得 $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$，则 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\tan(\alpha-3\pi)=\tan\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=2\sqrt{2}$.

15. $\frac{10}{9}$　因为等差数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n，T_n，且$\frac{S_n}{T_n}=\frac{3n-1}{2n+3}$，所以 $S_n=\lambda n(3n-1)(\lambda\neq 0)$，$T_n=\lambda n(2n+3)$，又 $S_{17}=17a_9$，$T_{21}=21b_{11}$，所以 $a_9=\frac{S_{17}}{17}=\frac{\lambda\times 17(3\times 17-1)}{17}=50\lambda$，$b_{11}=\frac{T_{21}}{21}=\frac{1}{21}\times\lambda\times 21(2\times 21+3)=45\lambda$，所以$\frac{a_9}{b_{11}}=\frac{50\lambda}{45\lambda}=\frac{10}{9}$.

16. $3+2\sqrt{3}$　$\frac{9}{a}+\frac{b+3}{|b|}=\frac{9}{a}+\frac{3}{|b|}+\frac{b}{|b|}$，当 $b>0$ 时，$\frac{b}{|b|}=1$，当 $b<0$ 时，$\frac{b}{|b|}=-1$；$\frac{9}{a}+\frac{3}{|b|}=\frac{1}{3}\left(\frac{9}{a}+\frac{3}{|b|}\right)(a+|b|)=\frac{1}{3}\left(12+\frac{9|b|}{a}+\frac{3a}{|b|}\right)\geqslant\frac{1}{3}(12+6\sqrt{3})=4+2\sqrt{3}$，当且仅当$\frac{9|b|}{a}=\frac{3a}{|b|}$，即 $a=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$，$|b|=\frac{3}{\sqrt{3}+1}$时等号成立，所以当 $a=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$，$b=-\frac{3}{\sqrt{3}+1}$时，$\frac{9}{a}+\frac{b+3}{|b|}$取得最小值，且最小值为 $3+2\sqrt{3}$.

17. 解：(1)因为 $ax^2+b(4-b)x-3>0$ 的解集为 $(1,3)$，

所以 1，3 是方程 $ax^2+b(4-b)x-3=0$ 的两根，…… 2 分

所以$\begin{cases}1+3=-\dfrac{b(4-b)}{a},\\ 1\times 3=\dfrac{-3}{a},\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=-1,\\ b=2.\end{cases}$ …… 4 分

(2)由题意知 $f(1)-ab=a+b(4-b)-3-ab<0$，

所以 $b^2+(a-4)b+3-a>0$，

方程 $b^2+(a-4)b+3-a=0$ 的两根分别为 $1,3-a$，…… 5 分

①当 $1=3-a$，即 $a=2$ 时，解得 $b\neq 1$，故 $f(1)-ab<0$ 的解集为 $\{b|b\neq 1\}$；…… 6 分

②当 $1>3-a$，即 $a>2$ 时，解得 $b>1$ 或 $b<3-a$，故 $f(1)-ab<0$ 的解集为 $\{b|b<3-a$，或 $b>1\}$；…… 8 分

③当 $1<3-a$，即 $a<2$ 时，解得 $b>3-a$ 或 $b<1$，故 $f(1)-ab<0$ 的解集为 $\{b|b<1$，或 $b>3-a\}$. …… 10 分

18. 解：(1)法 1：因为 $a_2+a_4=14$，所以 $a_3=7$，…… 1 分

因为 $a_1+a_3+a_5+a_7=36$，所以 $a_3+a_5=18$，…… 2 分

所以 $a_5=11$，所以公差 $d=\frac{a_5-a_3}{5-3}=2$，…… 4 分

所以 $a_n=a_3+(n-3)d=7+2n-6=2n+1$. …… 5 分

法 2：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，联立$\begin{cases}a_2+a_4=14,\\ a_1+a_3+a_5+a_7=36,\end{cases}$ …… 1 分

得$\begin{cases}2a_1+4d=14,\\ 4a_1+12d=36.\end{cases}$ …… 2 分

解得$\begin{cases}a_1=3,\\ d=2.\end{cases}$ …… 4 分

(2)由(1)知 $a_n=2n+1$，所以 $b_n=\frac{2}{a_n-1}=\frac{1}{n}$，$b_nb_{n+2}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$，…… 7 分

所以 $T_n=b_1b_3+b_2b_4+b_3b_5+\cdots+b_{n-1}b_{n+1}+b_nb_{n+2}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$ …… 9 分

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+4}$. …… 12 分

19. 解：(1)当 $0<x<50$ 时，$L(x)=6\times100x-10x^2-200x-3\,000=-10x^2+400x-3\,000$，…… 2 分

当 $x\geqslant50$ 时，$L(x)=6\times100x-601x-\frac{10\,000}{x}+9\,000-3\,000=6\,000-\left(x+\frac{10\,000}{x}\right)$. …… 4 分

综上所述，$L(x)=\begin{cases}-10x^2+400x-3\,000, & 0<x<50,\\ 6\,000-\left(x+\frac{10\,000}{x}\right), & x\geqslant50.\end{cases}$ …… 6 分

(2)当 $0<x<50$ 时，$L(x)=-10(x-20)^2+1\,000$，…… 7 分

所以当 $x=20$ 时，$L(x)_{\max}=L(20)=1\,000$；

当 $x\geqslant50$ 时，$L(x)=6\,000-\left(x+\frac{10\,000}{x}\right)$，$L'(x)=-1+\frac{10\,000}{x^2}=\frac{10\,000-x^2}{x^2}$，

当 $x\in(50,100)$ 时，$L'(x)>0$，当 $x\in(100,+\infty)$ 时，$L'(x)<0$，

所以 $L(x)$ 在 $(50,100)$ 上单调递增，在 $(100,+\infty)$ 上单调递减；

所以当 $x=100$ 时，$L(x)_{\max}=L(100)=5\,800>1\,000$. …… 10 分

所以当 $x=100$，即当年产量为 100 百辆时，该企业所获利润最大，且最大利润为 5 800 万元. …… 12 分

20. 解：(1)因为 AB 长为 4 百米，所以圆的半径为 2 百米，即 $OA=OB=OC=OD=2$，

当 $\angle COD=\frac{\pi}{3}$ 时，$S_{四边形ABCD}=S_{\triangle BOC}+S_{\triangle COD}+S_{\triangle DOA}$

$=\frac{1}{2}\times2^2\sin\theta+\frac{1}{2}\times2^2\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\times2^2\sin\left(\pi-\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ …… 1 分

$=2\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\left(0<\theta<\frac{2\pi}{3}\right)$. …… 3 分

又 $\frac{\pi}{6}<\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{5}{6}\pi$，…… 4 分

所以当 $\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时，$(S_{四边形ABCD})_{\max}=3\sqrt{3}$，…… 5 分

即当 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时，花卉种植面积最大. …… 6 分

(2)因为 $BC=CD$，所以 $\angle COD=\angle BOC=\theta$，且 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，…… 7 分

由余弦定理得 $BC=\sqrt{2^2+2^2-2\times2\times2\cos\theta}=4\sin\frac{\theta}{2}$，…… 8 分

$DA=\sqrt{2^2+2^2+2\times2\times2\times\cos2\theta}=4\cos\theta$，…… 9 分

所以 $L=8\sin\frac{\theta}{2}+4\cos\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，

令 $t=\sin\frac{\theta}{2}$，因为 $0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{4}$，所以 $0<t<\frac{\sqrt{2}}{2}$，…… 10 分

所以 $L=8\sin\frac{\theta}{2}+4\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)=8t+4(1-2t^2)=-8\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+6$，

所以当 $t=\frac{1}{2}$，即 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时，L 取得最大值 6.

即当 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时，景观花带总长 L 最长，L 的最大值为 6 百米. …… 12 分

21. 解：(1)当 $n=1$ 时，$2S_1=a_1+1$，又 $a_1=S_1$，所以 $a_1=1$；…… 1 分

当 $n\geqslant2$ 时，$2S_{n-1}=(n-1)(a_{n-1}+1)$，所以 $2a_n=na_n-(n-1)a_{n-1}+1$，

即 $(n-1)a_{n-1}=(n-2)a_n+1$，…… 2 分

所以 $na_n=(n-1)a_{n+1}+1$，所以 $na_n-(n-1)a_{n-1}=(n-1)a_{n+1}-(n-2)a_n$，

化简,得 $2(n-1)a_n=(n-1)(a_{n-1}+a_{n+1})$, ……

即当 $n\geqslant 2$ 时,$2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}$,所以$\{a_n\}$为等差数列. ……

又 $a_1=1,a_2=3$,所以公差 $d=2$, ……

所以 $a_n=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$. ……

(2)由(1)知$\{a_n\}$为以 1 为首项,2 为公差的等差数列,

所以 $S_n=n\times1+\frac{n(n-1)}{2}\times2=n^2$. ……

所以 $b_n=n^2\sin\frac{n\pi}{2}+(n+1)^2\sin\frac{(n+1)\pi}{2}$, ……

所以 $T_{50}=1^2-3^2-3^2+5^2+5^2-7^2-7^2+9^2+9^2-11^2-11^2+13^2+\cdots+49^2-51^2$ ……

$=(1^2-3^2)-(3^2-5^2)+(5^2-7^2)-(7^2-9^2)+(9^2-11^2)-(11^2-13^2)+\cdots+(49^2-51^2)$ …… 1

$=-2\times4+2\times8-2\times12+2\times16-2\times20+\cdots+2\times96-2\times100$

$=-2\times4+2\times(8-12)+2\times(16-20)+\cdots+2\times(96-100)$ …… 1

$=-8-8\times12=-104$. …… 1

22. 解:(1)因为 $a=\frac{e}{2}$时,$f(x)=e^x-\frac{e}{2}x^2-x-1$,

所以 $f'(x)=e^x-ex-1,f'(1)=-1$, ……

又 $f(1)=e-\frac{e}{2}-1-1=\frac{e}{2}-2$,所以切线方程为 $y-\left(\frac{e}{2}-2\right)=-(x-1)$,

即所求的切线方程为 $x+y-\frac{e}{2}+1=0$. ……

(2)$F(x)=e^x-ax^2-x+1$,所以 $F'(x)=e^x-2ax-1$,

令 $g(x)=e^x-2ax-1$,则 $g'(x)=e^x-2a$,

因为 $a>0$,由 $g'(x)<0$,得 $x<\ln 2a$;由 $g'(x)>0$,得 $x>\ln 2a$,

所以 $F'(x)$在$(-\infty,\ln 2a)$上单调递减,在$(\ln 2a,+\infty)$上单调递增, ……

①当 $0<2a<1$,即 $0<a<\frac{1}{2}$时,$\ln 2a<0$,因为 $F'(0)=0$ 且 $F'(x)$在$(\ln 2a,+\infty)$上单调递增,所以 $F'(\ln 2a)<0$

$F'\left(\ln 2a-\frac{1}{2a}\right)=2a(e^{-\frac{1}{2a}}-\ln 2a)>0$,

所以$\exists x_1\in\left(\ln 2a-\frac{1}{2a},\ln 2a\right)$,使得 $F'(x_1)=0$,又 $F'(x)$在$(-\infty,\ln 2a)$上单调递减,

所以当 $x\in(-\infty,x_1)$时,$F'(x)>0$,当 $x\in(x_1,0)$时,$F'(x)<0$,当 $x\in(0,+\infty)$时,$F'(x)>0$,所以 $F(x)$在$(-\infty,$

上单调递增,在$(x_1,0)$上单调递减,在$(0,+\infty)$上单调递增,

所以 $F(x)_{极小值}=F(0)=2>0$,

所以函数 $F(x)$最多有一个零点,不合题意; ……

②当 $2a=1$,即 $a=\frac{1}{2}$时,$\ln 2a=0$,此时 $F'(x)\geqslant0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,则 $F(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

所以 $F(x)$在 $\mathbf{R}$ 上最多有一个零点,不合题意; ……

③当 $2a>1$,即 $a>\frac{1}{2}$时,$\ln 2a>0$,因为 $F'(0)=0$ 且 $F'(x)$在$(-\infty,\ln 2a)$上单调递减,所以 $F'(\ln 2a)<0$,

因为当 $x>0$ 时,易证得 $e^x>x^2$,

所以 $F'(2a+1)=e^{2a+1}-2a(2a+1)-1>(2a+1)^2-2a(2a+1)-1=2a>0$,易证 $2a+1>\ln 2a$,

所以$\exists x_2\in(\ln 2a,2a+1)$,使得 $F'(x_2)=e^{x_2}-2ax_2-1=0$,$e^{x_2}=2ax_2+1$, …… 1

故 $F(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增,在$(0,x_2)$上单调递减,在$(x_2,+\infty)$上单调递增,

由 $F(x)_{极大值}=F(0)=2>0$,所以要使 $F(x)$有三个零点,必有 $F(x_2)=e^{x_2}-ax_2^2-x_2+1<0$,

所以 $ax_2^2-(2a-1)x_2-2>0$,即$(x_2-2)(ax_2+1)>0$,所以 $x_2>2$, …… 1

又因为 $a=\frac{e^{x_2}-1}{2x_2}$,令 $h(x)=\frac{e^x-1}{2x}(x\geqslant2)$,则 $h'(x)=\frac{(x-1)e^x+1}{2x^2}$,

因为当 $x>2$ 时,$h'(x)>0$,所以函数 $h(x)$在区间$(2,+\infty)$上单调递增,

所以 $a=h(x_2)>h(2)=\frac{e^2-1}{4}$,即 $t_{min}=\frac{e^2-1}{4}$. …… 1

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。