绝密★启用前

天一大联考
2020—2021 学年(下)高一年级期末考试

数 学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 某射箭运动员进行射箭训练,射箭 60 次,统计结果如下:

环数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
击中的次数	0	0	1	2	4	4	6	10	12	13	8

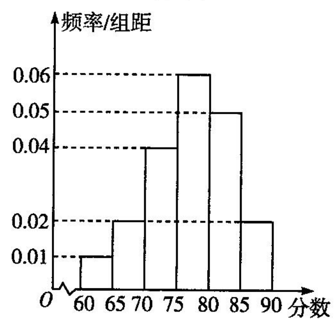
则估计他击中的环数不小于 8 的概率为

A. 0.46　　B. 0.55　　C. 0.57　　D. 0.63

2. 由一组样本数据(x_i, y_i)得到的线性回归方程为$\hat{y}=1.8x+26$,其中x_i的取值依次为 2,4,7,9,14,18,则$\bar{y}=$

A. 35.6　　B. 42.2　　C. 56.4　　D. 60.6

3. 某校高三年级共有 600 名学生选修地理,某次考试地理成绩均在 60 ~ 90 分之间,分数统计后绘成频率分布直方图,如图所示,则成绩在[70,85)分的学生人数为



A. 380　　B. 420　　C. 450　　D. 480

4. 已知$\tan^2\frac{\alpha}{2}=6$,则$\cos 2\alpha=$

A. $\frac{7}{25}$　　B. $\frac{1}{49}$　　C. $\frac{9}{25}$　　D. $-\frac{5}{49}$

5. 已知$\frac{\sin\alpha-2\cos\alpha}{\sin\alpha+3\cos\alpha}=\frac{1}{6}$,则$\frac{\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha}{2+4\sin\alpha\cos\alpha}=$

A. $-\frac{13}{16}$　　B. $-\frac{11}{18}$　　C. $-\frac{7}{12}$　　D. $\frac{9}{14}$

6. 已知实数 $c\in[-15,15]$,则直线 $x-2y=c$ 与圆 $x^2+y^2=20$ 有公共点的概率为

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{4}{5}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

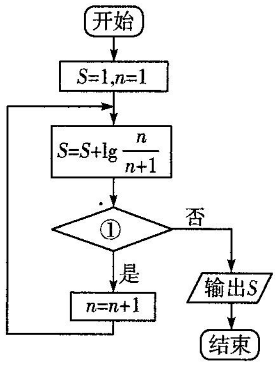
7. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是不共线的向量,在平面直角坐标系 xOy 中,$\overrightarrow{OA}=\lambda\boldsymbol{a}(\lambda\in\mathbf{R})$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OC}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,若 A,B,C 三点共线,则 $\lambda=$

A. $-\frac{5}{2}$　　B. $-\frac{2}{3}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{7}{3}$

8. 已知 $k\in\{-3,-1,1\}$,$b\in\{-4,-2,2,6\}$,则直线 $y=kx+b$ 经过第三象限的概率为

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

9. 执行如图所示的程序框图,若输出的值为 -2,则判断框①中可以填入的条件是



A. $n<999$?　　B. $n>999$?　　C. $n\leqslant 999$?　　D. $n\geqslant 999$?

10. 一名射击运动员连续射击 5 次,所得环数的平均数为 8,标准差为 1.2,则这五次射击不可能出现的环数是

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

11. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\cos 2x-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+1$,将 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位长度后所得图象对应的函数为奇函数,则 φ 的最小值为

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{12}$

12. 已知 $|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=2$,$|\boldsymbol{c}|=4$,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=\frac{\pi}{3}$,则 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$ 的最大值为

A. $17+4\sqrt{7}$　　B. $12+8\sqrt{5}$　　C. $18-2\sqrt{5}$　　D. $20-3\sqrt{7}$

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 某花卉种植园有红、黄、白三个品种的菊花,红色菊花有 60 盆、黄色菊花有 80 盆、白色菊花有 100 盆,现要按照三种颜色菊花的数量比例用分层抽样的方法从中抽取 48 盆参加花展,则需要抽取__________盆黄色菊花.

14. 甲、乙两人进行羽毛球比赛,采用三局两胜制(打满三局),已知甲每局比赛获胜的概率均为 0.7. 现用计算机随机产生的[0,9]之间的整数值来模拟甲和乙胜负的情况. 用0,1,2,3,4,5,6 表示甲胜,用7,8,9 表示乙胜. 由于是三局两胜制,所以以每 3 个随机数为一组,产生 20 组随机数:204,475,626,379,158,589,026,932,853,857,726,908,115,638,225,971,241,078,211,564. 估计最终乙获胜的概率为__________.

15. 已知 $\frac{\sqrt{3}}{\cos 20^\circ}+\frac{1}{\sin 20^\circ}=a$,则 $\tan 50^\circ=$__________.(用含 a 的式子表示)

16. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上是单调的,且 $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=f(\pi)=-f\left(\frac{\pi}{6}\right)$,则函数 $f(x)$ 的最小正周期为__________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知角 α 的顶点为坐标原点 O，始边与 x 轴正半轴重合，终边上有一点 $P(a,b)$ $(a<0)$，且 $\tan\alpha=2$，$|OP|=5$.

（Ⅰ）求 a,b 的值；

（Ⅱ）求 $\dfrac{\sin^2(\alpha+\pi)\cos(\pi+\alpha)}{\tan(\pi+\alpha)\cos^2(\alpha-\pi)\tan(-\alpha)}$ 的值.

18.（12 分）

已知向量 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 是夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$ 的单位向量，且向量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2$.

（Ⅰ）求 $|\boldsymbol{a}|$；

（Ⅱ）若 $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，求实数 λ 的值.

19.（12 分）

每到夏季，许多人选择到水上乐园游玩，某水上乐园统计了开业后第 3 ~ 7 天每天的游客人数 y（万人）的数据，得到下面的表格：

第 x 天	3	4	5	6	7
游客人数 y(万人)	1.5	2	3	3.5	5

（Ⅰ）若 y 与 x 具有线性相关关系，求 y 关于 x 的线性回归方程；

（Ⅱ）已知该水上乐园每天最大的游客承载量为 10 万人，如果某天的游客数量预计会超过该水上乐园每天最大的游客承载量，则当天需采取限流措施，根据（Ⅰ）中的回归方程估计：从第几天开始，该水上乐园需要采取限流措施？

附：回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 的斜率和截距的最小二乘法估计公式分别为：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

20. (12 分)

已知函数 $f(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right), x\in\mathbf{R}$.

(Ⅰ)若 $f(x)$ 在区间 $(m,0)$ 上单调递增,求 m 的最小值;

(Ⅱ)求函数 $y=\left[f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]^2+\left[f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]^2$ 的值域.

21. (12 分)

已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\varphi-\frac{\pi}{6}\right)(0<\varphi<\pi,\omega>0)$ 图象的一条对称轴方程为 $x=\frac{\pi}{12}$,且 $f(x)$ 相邻的两个零点间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的解析式;

(Ⅱ)求方程 $f(x)=\frac{3}{4}$ 在区间 $[0,2\pi]$ 内的所有实数根之和.

22. (12 分)

某家电商场搞开业庆典活动,购买家电的顾客可以参与“砸金蛋”的活动:每位顾客砸金蛋时一共摆放六个金蛋,其中有三个金蛋内装有红色纸条,另外三个金蛋内装有绿色纸条,每位顾客从中任选三个金蛋砸开.

(Ⅰ)求砸开的三个金蛋中至少有两个金蛋内是红色纸条的概率.

(Ⅱ)对砸金蛋的顾客有如下两种奖励方案:

方案一:若三个金蛋内的纸条颜色相同,则奖励该顾客 200 元代金券;若有两个金蛋内是红色纸条,一个是绿色纸条,则奖励该顾客 50 元代金券,其余情况没有奖励.

方案二:每砸出一个装有红色纸条的金蛋就奖励 20 元,没有红色纸条则没有奖励.

该商场预计开业当天购买家电的顾客有 300 人,用不同奖励发生的概率代替对应奖励发生的频率,试估计并比较这两种方案商场发放的代金券总金额的大小.

天一大联考

2020—2021 学年(下)高一年级期末考试

数学 · 答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. B	2. B	3. C	4. B	5. A	6. C
7. D	8. D	9. A	10. A	11. C	12. A

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 16

14. $\frac{3}{10}$

15. $\frac{a}{4}$

16. $\frac{5\pi}{3}$

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. **解析** (Ⅰ)由题意知 $\tan\alpha=\frac{b}{a}=2$,$\therefore b=2a$, ……(2 分)

又$\because |OP|=\sqrt{a^2+b^2}=5$,

$\therefore a^2+b^2=5a^2=25$,又 $a<0$,$\therefore a=-\sqrt{5}$, ……(4 分)

从而 $b=2a=-2\sqrt{5}$. ……(5 分)

(Ⅱ)原式 $=\dfrac{\sin^2\alpha\cdot(-\cos\alpha)}{\tan\alpha\cdot\cos^2\alpha\cdot(-\tan\alpha)}=\dfrac{\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos^2\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\cos\alpha$,……(8 分)

由(Ⅰ)知 $\cos\alpha=\frac{a}{|OP|}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

故原式 $=-\frac{\sqrt{5}}{5}$. ……(10 分)

18. **解析** (Ⅰ)$\because \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=1\times1\times\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, ……(2 分)

$\therefore |\boldsymbol{a}|=|3\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2|=\sqrt{(3\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2)^2}=\sqrt{9|\boldsymbol{e}_1|^2+24\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+16|\boldsymbol{e}_2|^2}=\sqrt{37}$. ……(6 分)

(Ⅱ)$\because \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, ……(8 分)

又 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(3\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2)\cdot(2\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2)=6|\boldsymbol{e}_1|^2+(3\lambda+8)\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+4\lambda|\boldsymbol{e}_2|^2=6+(3\lambda+8)\times\frac{1}{2}+4\lambda=10+\frac{11\lambda}{2}$,

……(10 分)

$\therefore 10+\frac{11\lambda}{2}=0$,解得 $\lambda=-\frac{20}{11}$. ……(12 分)

19. **解析** (Ⅰ)由表中数据计算得,$\bar{x}=5$,$\bar{y}=3$, ……(2 分)

$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=8.5$,$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=10$,

$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=0.85$, ……(5 分)

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=3-0.85\times5=-1.25.$ ……………………………………………………………………（7 分）

所以回归方程为 $\hat{y}=0.85x-1.25.$ ……………………………………………………………………（8 分）

（Ⅱ）令 $\hat{y}>10$，得 $0.85x-1.25>10$，得 $x>13.2$，……………………………………………………（11 分）

即从第 14 天开始，该水上乐园需要采取限流措施. ……………………………………………………（12 分）

20. **解析**　（Ⅰ）令 $2k\pi-\pi<x-\frac{\pi}{4}<2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $2k\pi-\frac{3\pi}{4}<x<2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{3\pi}{4},0\right)$ 上单调递增，……………………………………………………（3 分）

故 m 的最小值为 $-\frac{3\pi}{4}.$ ……………………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）$y=\left[f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]^2+\left[f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]^2=\cos^2\left(x-\frac{5\pi}{12}\right)+\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\frac{1+\cos\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)}{2}+\frac{1+\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}$

$=1+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}\cos 2x+\sin\frac{5\pi}{6}\sin 2x-\sin 2x\right)$

$=1-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)$

$=1-\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right).$ ……………………………………………………………………（9 分）

$\because x\in\mathbf{R}$，$\therefore \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\in[-1,1]$，

$\therefore y=1-\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$，

即所求的函数的值域为 $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right].$ ……………………………………………………………………（12 分）

21. **解析**　（Ⅰ）$\because f(x)$ 相邻的两个零点间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，

$\therefore f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\times\frac{\pi}{2}=\pi$，$\therefore \omega=2.$ ……………………………………………（2 分）

又函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴方程为 $x=\frac{\pi}{12}$，

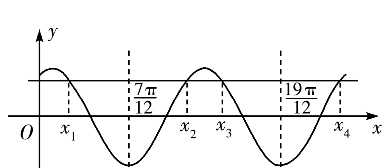
$\therefore 2\times\frac{\pi}{12}+\varphi-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，……………………………（4 分）

而 $0<\varphi<\pi$，$\therefore \varphi=\frac{\pi}{2}.$ ……………………………………………………………………（5 分）

故 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right).$ ……………………………………………………………………（6 分）

（Ⅱ）因为 $f(x)$ 的最小正周期为 π，所以 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 内恰有 2 个周期.

因为 $\frac{3}{4}<\frac{\sqrt{3}}{2}$，作出 $y=f(x)$ 与 $y=\frac{3}{4}$ 的大致图象如图. ……………………………………（8 分）



由图可知两个图象在$[0,2\pi]$内有 4 个交点,横坐标依次为 x_1,x_2,x_3,x_4, ……………………………………（9 分）

且 x_1 与 x_2 关于 $x=\frac{7\pi}{12}$对称,x_3 与 x_4 关于 $x=\frac{19\pi}{12}$对称,

所以 $x_1+x_2=\frac{7\pi}{6}$,$x_3+x_4=\frac{19\pi}{6}$, ……………………………………………………………………（11 分）

故所有实数根之和为$\frac{13\pi}{3}$. ………………………………………………………………………………（12 分）

22. **解析** 设装有红色纸条的金蛋分别为 A,B,C,装有绿色纸条的金蛋分别为 a,b,c,则随机选其中三个所得结果的基本事件有 $ABC,ABa,ABb,ABc,ACa,ACb,ACc,Aab,Aac,Abc,BCa,BCb,BCc,Bab,Bac,Bbc,Cab,Cac,Cbc,abc$,共 20 个. ……………………………………………………………………………………………（2 分）

（Ⅰ）“至少有两个金蛋内是红色纸条”包含的基本事件有 $ABC,ABa,ABb,ABc,ACa,ACb,ACc,BCa,BCb,BCc$,共 10 个. ………………………………………………………………………………………………………（4 分）

故所求概率为$\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$. ………………………………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）方案一:

“获得 200 元代金券”包含的基本事件有 2 个,概率为$\frac{1}{10}$;

“获得 50 元代金券”包含的基本事件有 9 个,概率为$\frac{9}{20}$.

所以发放的代金券总金额为 $300\times\frac{1}{10}\times200+300\times\frac{9}{20}\times50=12\ 750$. ……………………………（8 分）

方案二:

“获得 20 元代金券”包含的基本事件有 9 个,概率为$\frac{9}{20}$;

“获得 40 元代金券”包含的基本事件有 9 个,概率为$\frac{9}{20}$;

“获得 60 元代金券”包含的基本事件有 1 个,概率为$\frac{1}{20}$.

所以发放的代金券总金额为 $300\times\frac{9}{20}\times20+300\times\frac{9}{20}\times40+300\times\frac{1}{20}\times60=9\ 000$. ……………（11 分）

所以方案一商场发放的代金券总金额更大. ……………………………………………………………（12 分）