2023 年高考诊断性测试

数学参考答案及评分标准

一、选择题

ACBB　ADBC

二、选择题

9. AC　10. ACD　11. ABD　12. ABD

三、填空题

11. -60　12. $\dfrac{43}{75}$　13. $2x+y+1=0$　14. 5，$\dfrac{148\pi}{5}$

四、解答题

17. 解：（1）设数列$\{a_n\}$的公比为q，因为$3a_1,a_3,5a_2$ 成等差数列，

所以$3a_1+5a_1q=2a_1q^2$；……1 分

即$3+5q=2q^2$，解得$q=3$或$q=-\dfrac{1}{2}$，

因为$\{a_n\}$各项均为正数，所以$q>0$，所以$q=3$．……2 分

由$S_4+5=5a_3$，得$\dfrac{a_1(3^4-1)}{3-1}+5=5\times3^2a_1$，解得$a_1=1$．……4 分

所以$a_n=a_1 3^{n-1}=3^{n-1}$．……5 分

（2）由（1）知，$b_n=n\times3^{n-1}$．……6 分

则$T_n=1\times3^0+2\times3^1+3\times3^2+\cdots+n\times3^{n-1}$

所以$3T_n=1\times3^1+2\times3^2+3\times3^3+\cdots+n\times3^n$，……7 分

两式相减可得$-2T_n=3^0+3^1+\cdots+3^{n-1}-n\times3^n$，……8 分

$$=\frac{1-3^n}{1-3}-n\times3^n,$$

整理可得$T_n=\dfrac{2n-1}{4}\times3^n+\dfrac{1}{4}$．……10 分

18. 解：（1）因为$c-2b\cos A=b$，由正弦定理得$\sin C-2\sin B\cos A=\sin B$．…2 分

又$A+B+C=\pi$，所以

$\sin(A+B)-2\sin B\cos A=\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin(A-B)=\sin B$. ……4 分

因为ΔABC为锐角三角形，所以$A\in(0,\frac{\pi}{2}),B\in(0,\frac{\pi}{2})$，$A-B\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，

又$y=\sin x$在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$上单调递增，所以$A-B=B$，即$A=2B$. ……………6 分

（2）由（1）可知，$A=2B$，所以在ΔABD中，$\angle ABC=\angle BAD$，

由正弦定理得：$\frac{AD}{\sin B}=\frac{AB}{\sin(\pi-2B)}=\frac{2}{\sin 2B}$，所以$AD=BD=\frac{1}{\cos B}$，

所以$S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}\times AB\times AD\times\sin B=\frac{\sin B}{\cos B}=\tan B$. ………………………………9 分

又因为ΔABC为锐角三角形，所以$0<B<\frac{\pi}{2}$，$0<2B<\frac{\pi}{2}$，$0<\pi-3B<\frac{\pi}{2}$，

解得$\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{4}$， ……………………………………………………………………11 分

所以$\tan B\in(\frac{\sqrt{3}}{3},1)$，即$\Delta ABD$面积的取值范围为$(\frac{\sqrt{3}}{3},1)$. ………………………12 分

19. 解：（1）Logistic 非线性回归模型$y=\frac{u}{1+e^{a-bt}}$拟合效果更好. ………………1 分

从散点图看，散点更均匀地分布在该模型拟合曲线附近；从残差图看，该模型下的残差更均匀地集中在以残差为0的直线为对称轴的水平带状区域内. …………………3 分

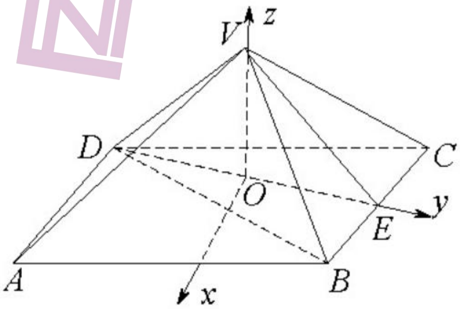
（2）将$y=\frac{u}{1+e^{a-bt}}$两边取对数得$\ln(\frac{u}{y}-1)=a-bt$，………………………………5 分

则$-\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{20}(w_i-\overline{w})(t_i-\overline{t})}{\sum_{i=1}^{20}(t_i-\overline{t})^2}=\frac{-138.32}{665}=-0.208$，$\hat{b}=0.208$，…………………7 分

$\hat{a}=\overline{w}-(-\hat{b})\cdot\overline{t}=-1.608+0.208\times10.5=0.576$. ………………………………9 分

所以 y 关于 t 的经验回归方程为 $y=\dfrac{12.5}{1+e^{0.576-0.208t}}$. ……………………………10 分

当 $t=22$ 时，体长 $y=\dfrac{12.5}{1+e^{0.576-0.208\times22}}=\dfrac{12.5}{1+e^{-4}}\approx12.28$ mm. ……………………12 分



20. 解：（1）证明：取 BC 中点 E，连接 BD,DE,VE，

因为 $ABCD$ 为菱形，且 $\angle BAD=60^\circ$，

所以 ΔBCD 为等边三角形，故 $DE\perp BC$.….1 分

又在等边三角形 VBC 中，$VE\perp BC$，……2 分

$DE\cap VE=E$，所以 $BC\perp$ 面 DEV .………4 分

$VD\subset$ 面 DEV，所以 $BC\perp VD$；…………5 分

（2）由 $VE\perp BC$，$DE\perp BC$，可得 $\angle DEV$ 就是二面角 $A-BC-V$ 的平面角，

所以 $\angle DEV=60^\circ$，……………………………………………………………6 分

在 ΔDEV 中，$VE=DE=\sqrt{3}$，所以 ΔDEV 为边长为 $\sqrt{3}$ 的等边三角形，

由（1）可知，面 $DEV\perp$ 底面 $ABCD$，取 DE 中点 O，以 O 为坐标原点，以 $\overrightarrow{DA},\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OV}$ 所在的方向为 x,y,z 轴的正向，建立空间直角坐标系 $O-xyz$，….7 分

在 ΔVOE 中，$OE=\dfrac{\sqrt{3}}{2},OV=\dfrac{3}{2}$，可得 $A(2,-\dfrac{\sqrt{3}}{2},0)$，$B(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2},0)$，$C(-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2},0)$，

$V(0,0,\dfrac{3}{2})$，故 $\overrightarrow{CB}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{CV}=(1,-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2})$，$\overrightarrow{AV}=(-2,\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2})$………8 分

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 VBC 的一个法向量，则有

$\begin{cases}2x=0\\ x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y+\dfrac{3}{2}z=0\end{cases}$，令 $y=\sqrt{3}$，则 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}=(0,\sqrt{3},1)$，………………10 分

设直线 VA 与平面 VBC 所成角为 θ，

则有 $\sin\theta=|\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{AV}>|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AV}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AV}|}=\dfrac{3}{2\times\sqrt{7}}=\dfrac{3\sqrt{7}}{14}$，

故直线 VA 与平面 VBC 所成角的正弦值为 $\dfrac{3\sqrt{7}}{14}$. ……………………………………12 分

21. 解：（1）设 $P(x,y)$，由题意 $\dfrac{|PF|}{|x-2\sqrt{2}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

因为 $|PF|=\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+y^2}$，所以 $\dfrac{\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+y^2}}{|x-2\sqrt{2}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， ……………2 分

即 $\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+y^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}|x-2\sqrt{2}|$，两边平方并整理得 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

故点 P 的轨迹 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$. ……………………………………………4 分

（2）设直线 l 方程为 $y=kx+1(\dfrac{1}{2}\leqslant k\leqslant 2)$，

联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ y=kx+1\end{cases}$，消 y 并整理得，$(2k^2+1)x^2+4kx-2=0$，

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\dfrac{4k}{2k^2+1}$，$x_1x_2=-\dfrac{2}{2k^2+1}$， …………5 分

又 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2=\dfrac{2}{2k^2+1}$，可得线段 AB 中点坐标为 $(-\dfrac{2k}{2k^2+1},\dfrac{1}{2k^2+1})$，

所以线段 AB 中垂线的方程为 $y-\dfrac{1}{2k^2+1}=-\dfrac{1}{k}(x+\dfrac{2k}{2k^2+1})$，

令 $y=0$，可得 $N(-\dfrac{k}{2k^2+1},0)$， ……………………………………………………6 分

对于直线 $y=kx+1$，令 $y=0$，可得 $M(-\dfrac{1}{k},0)$，

所以 $|MN|=|\dfrac{1}{k}-\dfrac{k}{2k^2+1}|=\dfrac{k^2+1}{k(2k^2+1)}$. ……………………………………………7 分

又 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(\frac{4k}{2k^2+1})^2+\frac{8}{2k^2+1}}=\frac{2\sqrt{1+k^2}}{2k^2+1}\sqrt{8k^2+2}$，

………………………………………………………………………………9 分

所以 $\frac{|AB|}{|MN|}=\frac{2k\sqrt{8k^2+2}}{\sqrt{1+k^2}}=2\sqrt{8(k^2+1)+\frac{6}{k^2+1}-14}$，…………………………10 分

令 $t=k^2+1\in[\frac{5}{4},5]$，则 $y=8(k^2+1)+\frac{6}{k^2+1}-14=8t+\frac{6}{t}-14$，

因为 $y=8t+\frac{6}{t}-14$ 在 $[\frac{5}{4},5]$ 上单调递增，

所以 $y\in[\frac{2}{5}\sqrt{5},\frac{2}{5}\sqrt{170}]$，故 $\frac{|AB|}{|MN|}\in[\frac{4}{5}\sqrt{5},\frac{4}{5}\sqrt{170}]$．…………………………12 分

22. 解：（1）$f'(x)=a\cos x-1-\frac{1}{(x+1)^2}$，…………………………………………… 1 分

因为 0 为 $f(x)$ 的一个极值点，所以 $f'(0)=a-2=0$，所以 $a=2$．………… 2 分

（2）①当 $-1<x\le 0$ 时，$f'(x)\le 2-1-1=0$，所以 $f(x)$ 单减，所以对 $\forall x\in(-1,0]$，

有 $f(x)\ge f(0)=1$，此时函数 $f(x)$ 无零点；……………………………………… 3 分

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$f''(x)=-2\sin x+\frac{2}{(x+1)^3}$，$f''(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减，又

$f''(0)=2>0$，$f''(\frac{\pi}{2})=-2+\frac{2}{(\frac{\pi}{2}+1)^3}<0$，由零点存在定理，存在 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得

$f''(x)=0$，且当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f''(x)>0$，即 $f'(x)$ 单调递增，当 $x\in(x_0,\frac{\pi}{2})$ 时，

$f''(x)<0$，即 $f'(x)$ 单调递减．

又因为 $f'(0)=0$，所以 $\forall x\in(0,x_0)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单增；因为

$f'(x_0)>0$，$f'(\frac{\pi}{2})=-1-\frac{1}{(\frac{\pi}{2}+1)^2}<0$，所以存在 $x_1\in(x_0,\frac{\pi}{2})$，当 $x\in(x_0,x_1)$ 时，

$f'(x)>0$，$f(x)$ 单增，当 $x\in(x_1,\frac{\pi}{2})$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单减.

所以，当 $x\in(0,x_1)$ 时，$f(x)$ 单增，$f(x)>f(0)=1$；当 $x\in(x_1,\frac{\pi}{2})$ 时，$f(x)$ 单减，

$f(x)>f(\frac{\pi}{2})=2-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\frac{\pi}{2}+1}>0$，此时 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上无零点；……………… 5 分

当 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 时，$f'(x)=2\cos x-1-\frac{1}{(x+1)^2}<0$，所以 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 单减，又

$f(\frac{\pi}{2})>0$，$f(\pi)=0-\pi+\frac{1}{\pi+1}<0$，由零点存在定理，函数 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上存在唯一零点；…………………………………………………………………………… 6 分

当 $x\geq\pi$ 时，$f(x)=2\sin x-x+\frac{1}{x+1}<2-\pi+1<0$，此时函数无零点；

综上，$f(x)$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上存在唯一零点. ……………………………………… 7 分

②因为 $f'(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}-1-\frac{1}{(\frac{\pi}{4}+1)^2}>0$，由（1）中 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上的单调性分析，知

$x_1>\frac{\pi}{4}$，所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 单增，所以对 $\forall x\in(0,\frac{\pi}{4})$，有 $f(x)>f(0)=1$，即

$2\sin x-x+\frac{1}{x+1}>1$，所以 $\sin x>\frac{1}{2}(x+1-\frac{1}{x+1})$. …………………………… 8 分

令 $x=\frac{1}{k^2}(k\geqslant 2)$，则 $\sin\frac{1}{k^2}>\frac{1}{2}(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1})>\frac{1}{k^2+1}>\frac{1}{k^2+k}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ … 9 分

所以 $\sum_{k=2}^{n}\sin\frac{1}{k^2}>(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}$ ……………… 10 分

因为$\sin x<x$，$x\in(0,\frac{1}{4}]$，所以$\sin\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k^2}<\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$，…………11 分

所以$\sum_{k=2}^{n}\sin\frac{1}{k^2}<(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=1-\frac{1}{n}<1$，

所以$\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}<\sum_{k=2}^{n}\sin\frac{1}{k^2}<1$. ……………………………………………………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。