

2022-2023 学年下学期期末三校联考

高二数学

命题学校：广州大学附属中学 命题人：曹路路 审题人：陈佩琴

本试卷共 4 页，22 小题，满分 150 分. 考试用时 120 分钟.

一、选择题(本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分).

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x \leq 0, x \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x | -2 < x < 2\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $[-1, 0]$ B. $[0, 2)$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{1, 2\}$

2. 设复数 z 满足 $z(1-i) = 2+i$, 则 z 的共轭复数在复平面内对应的点位于()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

3. $(\sqrt{x} - \frac{1}{x})^9$ 的展开式中的常数项为 ()

- A. -64 B. -84 C. 64 D. 84

4. 要得到函数 $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$ 的图象, 只需把函数 $g(x) = \cos 2x$ 的图象 ()

- A. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度 B. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度
C. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度 D. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

5. 如图, 湖北省分别与湖南、安徽、陕西、江西四省交界, 且湘、皖、陕互不交界, 在地图上分别给各省地域涂色, 要求相邻省涂不同色, 现有 5 种不同颜色可供选用, 则不同的涂色方案数为 ()

- A. 480 B. 600 C. 720 D. 840



6. 已知 $a = -\frac{5}{4}\ln \frac{4}{5}$, $b = \frac{e^{0.25}}{4}$, $c = \frac{1}{3}$, 则 ()

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $c < a < b$ D. $a < c < b$

7. 已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 设点 P 为 C 右支上一点, P 点到直线 $x = \frac{1}{2}$ 的距离为 d , 过 F_2 的直线 l 与双曲线 C 的右支有两个交点, 则下列说法正确的是 ()

- A. $d + |PF_1|$ 的最小值为 2 B. $\frac{|PF_2|}{d} = \sqrt{2}$
C. 直线 l 的斜率的取值范围是 $(\sqrt{3}, +\infty)$
D. $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆圆心到 y 轴的距离为 1

三、填空题(本大题共4小题,每小题5分,共20分).

13. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=5, |\vec{b}|=6, \vec{a} \cdot \vec{b}=-6$, 则 $\cos \langle \vec{a}, \vec{a}+\vec{b} \rangle =$ _____

14. 在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 上、下底面边长分别为 $3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}$, 该正四棱台的外接球的球心在棱台外, 且外接球的表面积为 100π , 则该正四棱台的高为 _____;

15. 已知抛物线 $x^2=2py (p>0)$, 焦点为 F , 过定点 $(0,1)$ 且斜率大于0的直线交抛物线于 A, B 两点, $OA \perp OB$, 线段 AB 的中点为 M , 则直线 MF 的斜率的最小值为 _____;

16. 对 $\forall x, y \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x, y)$ 都满足: ① $f(0, y) = y+1$; ② $f(x+1, 0) = f(x, 1)$; ③ $f(x+1, y+1) = f(x, f(x+1, y))$; 则 $f(3, 2023) =$ _____.

四、解答题(本大题共6小题,17题10分,18—22题每小题12分,共70分).

17. (本小题满分10分)

已知锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且

$$\frac{\sin(A-B)}{\cos B} = \frac{\sin(A-C)}{\cos C}.$$

(1) 若角 $A = \frac{\pi}{3}$, 求角 B ;

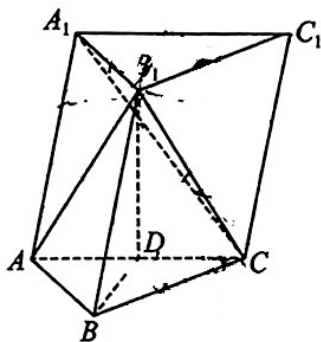
(2) 若 $a \sin C = 1$, 求 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ 的最大值.

18. (本小题满分12分)

如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=BC=B_1A=B_1C$, D 是 AC 的中点, $AB_1 \perp BD$.

(1) 证明: $B_1D \perp$ 平面 ABC ;

(2) 若 $AB = \sqrt{2}$, 点 B_1 到平面 ACC_1A_1 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 求三棱锥 $C_1-A_1B_1C$ 的体积.



19. (本小题满分12分)

正数数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $a_1=8, b_1=16$, 且 a_n, b_n, a_{n+1} 成等差数列, b_n, a_{n+1}, b_{n+1} 成等比数列.

(1) 求 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求证: $\frac{1}{a_1-1} + \frac{1}{a_2-1} + \dots + \frac{1}{a_n-1} < \frac{1}{3}$.

20. (本小题满分 12 分)

在世界杯期间, 学校组织了世界杯足球知识竞赛, 有单项选择题和多项选择题 (都是四个选项) 两种:

(1) 甲在知识竞赛中, 如果不会单项选择题那么就随机猜测. 已知甲会单项选择题和甲不会单项选择题随机猜测的概率分别是 $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$. 问甲在做某道单项选择题时, 在该道题做对的条件下, 求他会这道单项选择题的概率;

(2) 甲在做某多项选择题时, 完全不知道四个选项正误的情况下, 只好根据自己的经验随机选择, 他选择一个选项、两个选项、三个选项的概率分别为 0.5, 0.3, 0.2. 已知多项选择题每道题四个选项中有两个或三个选项正确, 全部选对得 5 分, 部分选对得 2 分, 有选择错误的得 0 分. 某个多项选择题有三个选项是正确的, 记甲做这道多项选择题所得的分数为 X , 求 X 的分布列及数学期望.

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, A_1, A_2 分别为椭圆 C 的左右顶点, F_1, F_2 分别为椭圆 C 的左右焦点, B 是椭圆 C 的上顶点, 且 $\triangle BAF_1$ 的外接圆半径为 $\frac{2\sqrt{21}}{3}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设与 x 轴不垂直的直线 l 交椭圆 C 于 P, Q 两点 (P, Q 在 x 轴的两侧), 记直线 A_1P, A_2P, A_2Q, A_1Q 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3, k_4 .

(i) 求 $k_1 \cdot k_2$ 的值;

(ii) 若 $k_1 + k_4 = \frac{5}{3}(k_2 + k_3)$, 则求 $\triangle F_2PQ$ 的面积取值范围.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^{\alpha x}$, $g(x) = kx + a$, 其中 $a > 0, k \in \mathbb{R}$.

(1) 当 $k = a = 1$ 时, 求函数 $y = \frac{g(x)}{f(x)}$ 的最大值;

(2) 是否存在实数 k , 使得只有唯一的 a , 当 $x > 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 若存在, 试求出 k, a 的值; 若不存在, 请说明理由.