2021年云南省第一次高中毕业生复习统一检测

理科数学参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分。

1. C　　2. D　　3. C　　4. D　　5. B　　6. A

7. B　　8. B　　9. C　　10. D　　11. A　　12. B

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 210；　　14. 216；　　15. $(1,-4)$或$(1,4)$；　　16. $(-\infty,\frac{3}{e}]$.

三、解答题：本大题共6小题，共70分。

17.（12分）

解：（1）$\because K^2=\dfrac{220(70\times20-40\times90)^2}{110\times110\times160\times60}$

$=\dfrac{55}{6}$

$=9\dfrac{1}{6}<10.828$. ……3分

$\therefore$在犯错误的概率不超过0.001的前提下，不能认为“社区住户对饲养宠物的管理规定的态度与家里是否有宠物有关系”. ……5分

（2）在由18户住户组成的样本T中，设家里没有宠物的住户有x户，家里有宠物的住户有y户，根据分层抽样的概念得$\begin{cases}\dfrac{x}{18}=\dfrac{20}{60},\\ \dfrac{y}{18}=\dfrac{40}{60},\end{cases}$解方程组得$\begin{cases}x=6,\\ y=12.\end{cases}$

$\therefore$样本T中的住户，家里没有宠物的有6户，家里有宠物的有12户.……7分

$\therefore$从样本T中随机抽取6户的事件数为C_{18}^6，这6户都是家里有宠物的事件数为C_{12}^6，这6户至少有1户家里没有宠物的事件数为$C_{18}^6-C_{12}^6$.……10分

$\because\dfrac{C_{18}^6-C_{12}^6}{C_{18}^6}=\dfrac{210}{221}$，$\therefore P=\dfrac{210}{221}$. ……12分

18.（12 分）

解：（1）$\because a_n=2-2S_n$，

$\therefore a_{n+1}=2-2S_{n+1}$. ……………………………………………………1 分

$\therefore a_{n+1}-a_n=2-2S_{n+1}-(2-2S_n)=-2(S_{n+1}-S_n)$.

$\because S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$，

$\therefore a_{n+1}-a_n=-2a_{n+1}$，即 $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$.

$\therefore a_n=a_1(\frac{1}{3})^{n-1}$. ……………………………………………………4 分

由 $a_n=2-2S_n$，$S_1=a_1$ 得 $a_1=2-2S_1=2-2a_1$，解得 $a_1=\frac{2}{3}$.

$\therefore$数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\frac{2}{3}\times(\frac{1}{3})^{n-1}=\frac{2}{3^n}$. ……………………6 分

（2）由（1）知：$a_n=\frac{2}{3^n}$.

$\therefore -\log_3 a_n=-\log_3\frac{2}{3^n}=-\log_3 2+\log_3 3^n=n-\log_3 2$. ……………………8 分

$\because \log_3 2\in(0,1)$，

$\therefore n-1<n-\log_3 2<n$.

$\therefore b_n=\lceil n-\log_3 2\rceil=n$. ……………………………………………10 分

$\therefore$数列$\{b_n\}$的前 n 项和 $T_n=\frac{(n+1)n}{2}=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$. ……………………………12 分

19.（12 分）

（1）证明：$\because PD\perp$平面 $ABCD$，$BC\subset$平面 $ABCD$，

$\therefore PD\perp BC$.

$\because ABCD$是矩形，

$\therefore BC\perp CD$.

$\because PD\cap CD=D$，$PD\subset$平面 PCD，$CD\subset$平面 PCD，

$\therefore BC\perp$平面 PCD.

$\because DE\subset$平面 PCD，$\therefore BC\perp DE$. ……………………………………3 分

又$\because DE\perp PC$，$BC\cap PC=C$，$BC\subset$平面PBC，$PC\subset$平面PBC，

$\therefore DE\perp$平面PBC.

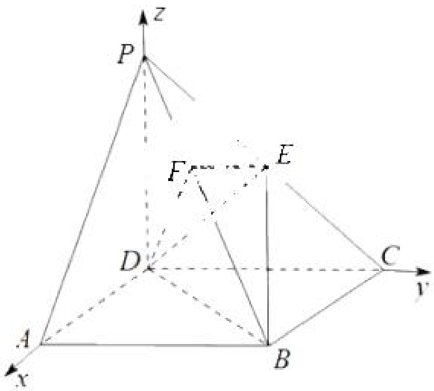
$\because PB\subset$平面PBC，

$\therefore DE\perp PB$.

又$\because EF\perp PB$，$EF\cap DE=E$，$EF\subset$平面EFD，$DE\subset$平面EFD，

$\therefore PB\perp$平面EFD. ……………………………………………………6分

（2）解：分别以射线DA，DC，DP为x轴，y轴，z轴的非负半轴，建立如图所示的空间直角坐标系$D-xyz$，设$PD=DC=DA=a$，



$\because PD=DC$，$DE\perp PC$，垂足为E，

$\therefore E$是PC的中点.

由题意可得$D(0,0,0)$，$B(a,a,0)$，$C(0,a,0)$，

$P(0,0,a)$，$E(0,\frac{a}{2},\frac{a}{2})$.

$\therefore \overrightarrow{BP}=(-a,-a,a)$，$\overrightarrow{DB}=(a,a,0)$，$\overrightarrow{DE}=(0,\frac{a}{2},\frac{a}{2})$.

由（1）知：$\overrightarrow{BP}=(-a,-a,a)$是平面$EFD$的一个法向量. ……………………………………………………8分

设平面DEB的一个法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DB}=ax+ay=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DE}=\frac{ay}{2}+\frac{az}{2}=0.\end{cases}$

取$z=1$，得$y=-1$，$x=1$.

$\therefore \vec{n}=(1,-1,1)$是平面$DEB$的一个法向量. ………………………………10分

$\therefore \cos<\overrightarrow{BP},\vec{n}>=\frac{\overrightarrow{BP}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{BP}||\vec{n}|}=\frac{1}{3}$.

$\because$二面角$F-DE-B$的平面角的取值范围为$(0,\pi)$，

$\therefore$二面角$F-DE-B$的正弦值为$\frac{2\sqrt{2}}{3}$. ………………………………12分

20.（12分）

解：（1）$\because f(x)=e^x+\sin x-2x$，

$\therefore g(x)=f'(x)=e^x+\cos x-2$，$g(0)=f'(0)=0$.……………………………2分

$\therefore$曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y-1=0(x-0)$，

即 $y-1=0$.………………………………………………………………………4分

（2）实数 m 的取值范围为 $(-\infty,0]$.……………………………………………………5分

$\because g(x)=f'(x)=e^x+\cos x-2$，对任意 $x\in[-\frac{\pi}{3},0]$，都有 $x\cdot g(x)\geq x^2+m$，

即对任意 $x\in[-\frac{\pi}{3},0]$，都有 $xe^x+x\cos x-2x-x^2\geq m$.

$\therefore 0e^0+0\cos 0-2\times 0-0^2\geq m$ 成立，故 $m\leq 0$.…………………………………6分

下面证明当 $m\leq 0$ 时，对任意 $x\in[-\frac{\pi}{3},0]$，都有 $xe^x+x\cos x-2x-x^2\geq m$.

设 $F(x)=e^x+\cos x-2-x$，

则 $G(x)=F'(x)=e^x-\sin x-1$.………………………………………………………7分

设 $H(x)=G'(x)=e^x-\cos x$，

$\because H'(x)=e^x+\sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{3},0]$ 单调递增，

又$\because H'(-\frac{\pi}{3})=e^{-\frac{\pi}{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{3}}}{2e^{\frac{\pi}{3}}}<\frac{2-\sqrt{3}e}{2e^{\frac{\pi}{3}}}<0$，$H'(0)=1>0$.

$\therefore$存在唯一实数 $x_0\in(-\frac{\pi}{3},0)$，使 $H'(x_0)=0$.

$\therefore$当 $x\in[-\frac{\pi}{3},x_0)$ 时，$H'(x)<0$；当 $x\in(x_0,0]$ 时，$H'(x)>0$.

$\therefore H(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{3},x_0)$ 单调递减，在 $(x_0,0]$ 单调递增.……………………9分

又∵ $H(-\frac{\pi}{3})=e^{-\frac{\pi}{3}}-\frac{1}{2}=\frac{2-e^{\frac{\pi}{3}}}{2e^{\frac{\pi}{3}}}<\frac{2-e}{2e^{\frac{\pi}{3}}}<0$，$H(0)=0$，

∴当 $x\in[-\frac{\pi}{3},0]$ 时，$H(x)=G'(x)\le 0$，故 $G(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{3},0]$ 单调递减.

∴当 $x\in[-\frac{\pi}{3},0]$ 时，$F'(x)=G(x)\ge G(0)=0$，故 $F(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{3},0]$ 单调递增.

∴当 $x\in[-\frac{\pi}{3},0]$ 时，$F(x)\le F(0)=0$，即 $F(x)=e^x+\cos x-2-x\le 0$.

∴当 $x\in[-\frac{\pi}{3},0]$ 时，$xF(x)=x(e^x+\cos x-2-x)\ge 0$，即 $x\cdot g(x)-x^2\ge 0$.

∵ m 的取值范围为 $(-\infty,0]$，

∴对任意 $x\in[-\frac{\pi}{3},0]$，都有 $x\cdot g(x)-x^2\ge m$，即 $x\cdot g(x)\ge x^2+m$.……12 分

21.（12 分）

解：（1）由已知：P，M，N 是椭圆 C 上的动点，P、F_1、M 三点共线，P、F_2、N 三点共线.

∴当 ΔF_1PF_2 的面积最大时，P 是椭圆 C 在短轴上的顶点.

∵当 ΔF_1PF_2 的面积最大时，ΔMPN 为等边三角形，

∴当 ΔF_1PF_2 的面积最大时，$\angle F_1PO=\frac{1}{2}\angle F_1PF_2=\frac{1}{2}\angle MPN=30^\circ$，

其中 O 是坐标原点. ……………………………………………………………2 分

∴当 ΔF_1PF_2 的面积最大时，$e=\frac{c}{a}=\sin\angle F_1PO=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$.

∴椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$. ……………………………………………………………4 分

（2）由（1）知：$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$.

∴ $c=\frac{1}{2}a$，$b^2=a^2-c^2=\frac{3a^2}{4}$.

∴椭圆 C 的方程可化为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{4y^2}{3a^2}=1$，$F_1(-\frac{1}{2}a,0)$，设 $P(x_0,y_0)$，$M(x_1,y_1)$.

$\therefore \overrightarrow{PF_1}=(-\frac{a}{2}-x_0,-y_0)$，　$\overrightarrow{F_1M}=(x_1+\frac{a}{2},y_1)$.

由已知和 $\overrightarrow{PF_1}=\lambda\overrightarrow{F_1M}$ 得：$x_1=\dfrac{-x_0-\frac{(1+\lambda)a}{2}}{\lambda}$，　$y_1=-\dfrac{y_0}{\lambda}$.……………6 分

$\because M(x_1,y_1)$ 在椭圆 C 上，

$\therefore \dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{4y_1^2}{3a^2}=1$，即 $\dfrac{1}{a^2}\times[\dfrac{-x_0-\frac{(1+\lambda)a}{2}}{\lambda}]^2+\dfrac{4}{3a^2}\times(-\dfrac{y_0}{\lambda})^2=1$.

$\therefore \dfrac{1}{\lambda^2}(\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{4y_0^2}{3a^2})+\dfrac{(1+\lambda)x_0}{a\lambda^2}+\dfrac{(1+\lambda)^2}{4\lambda^2}=1$.

$\because P(x_0,y_0)$ 在椭圆 C 上，

$\therefore \dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{4y_0^2}{3a^2}=1$.

$\therefore \dfrac{1}{\lambda^2}+\dfrac{(1+\lambda)x_0}{a\lambda^2}+\dfrac{(1+\lambda)^2}{4\lambda^2}=1$，解方程得 $\lambda=\dfrac{5a+4x_0}{3a}$. ……………………8 分

同理可得 $\mu=\dfrac{5a-4x_0}{3a}$.

$\therefore$ 直线 $\lambda x+\mu y=1$ 可化为 $\dfrac{5a+4x_0}{3a}x+\dfrac{5a-4x_0}{3a}y=1$.

$\because \dfrac{5a+4x_0}{3a}\times\dfrac{3}{10}+\dfrac{5a-4x_0}{3a}\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{5a+4x_0+5a-4x_0}{3a}=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{10a}{3a}=1$，

$\therefore$ 直线 $\dfrac{5a+4x_0}{3a}x+\dfrac{5a-4x_0}{3a}y=1$ 经过定点 $(\dfrac{3}{10},\dfrac{3}{10})$. ……………………10 分

即直线 $\lambda x+\mu y=1$ 经过定点 $(\dfrac{3}{10},\dfrac{3}{10})$.

$\because b^2=a^2-c^2=\dfrac{3a^2}{4}$，　$b>\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \dfrac{1}{a^2}=\dfrac{3}{4b^2}<3$.

$\because \dfrac{1}{a^2}\times(\dfrac{3}{10})^2+\dfrac{4}{3a^2}\times(\dfrac{3}{10})^2=\dfrac{9}{100}(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{4}{3a^2})=\dfrac{9}{100}\times\dfrac{7}{3a^2}=\dfrac{21}{100}\times\dfrac{1}{a^2}<\dfrac{63}{100}<1$，

$\therefore$ 定点 $(\dfrac{3}{10},\dfrac{3}{10})$ 在椭圆 C 内.

$\therefore$ 直线 $\lambda x+\mu y=1$ 与椭圆 C 有两个公共点.……………………12 分

22.（10分）选修4－4：坐标系与参数方程

解：（1）点B的直角坐标为$(4,0)$，……1分

曲线C_1的直角坐标方程为$x^2+\frac{y^2}{4}=1$，……3分

曲线C_2的普通方程为$x^2+y^2-4x=0$.……5分

（2）由已知设$A(\cos\varphi,2\sin\varphi)$，点$A$到$x$轴的距离$d=2|\sin\varphi|$.

由（1）知：点B的直角坐标为$(4,0)$.

$\therefore \Delta AOB$的面积$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}|OB|d=\frac{1}{2}\times4\times2|\sin\varphi|=4|\sin\varphi|$. ……8分

$\because |\sin\varphi|$的最大值为1，

$\therefore 4|\sin\varphi|$的最大值为4.

$\therefore \Delta AOB$面积的最大值为4. ……10分

23.（10分）选修4－5：不等式选讲

（1）证明：$\because a>0$，$b>0$，$a+b=2$，

$\therefore (\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1})^2=(a+b)+2+2\sqrt{a+1}\sqrt{b+1}$ ……2分

$=2+2+2\sqrt{a+1}\sqrt{b+1}$

$\le 4+2\times\frac{(a+1)+(b+1)}{2}$

$=4+(a+b)+2=8$. ……4分

$\therefore \sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}\le 2\sqrt{2}$. ……5分

（2）解：$\because a>0$，$b>0$，$a+b=2$，

$\therefore ab=(\sqrt{ab})^2\le(\frac{a+b}{2})^2=1$.

又$\because$当$a=b=1$时，$ab=1$.

$\therefore ab$的最大值为1.

$\therefore$不等式$|2x+1|-|2x-3|\ge ab$对满足已知条件的所有a、b都成立

$\Leftrightarrow |2x+1|-|2x-3| \ge 1$成立.……………………………………………………………6 分

当$x \le -\dfrac{1}{2}$时，不等式化为$-2x-1-(3-2x) \ge 1$，化简得$-4 \ge 1$，不成立，所以不等式无解；

当$-\dfrac{1}{2} < x \le \dfrac{3}{2}$时，不等式化为$2x+1-(3-2x) \ge 1$，解得$x \ge \dfrac{3}{4}$；

$\therefore \dfrac{3}{4} \le x \le \dfrac{3}{2}$.

当$x > \dfrac{3}{2}$时，不等式化为$2x+1-(2x-3) \ge 1$，化简得$4 \ge 1$，恒成立.

$\therefore x > \dfrac{3}{2}$.

$\therefore |2x+1|-|2x-3| \ge 1$的解集为$[\dfrac{3}{4}, +\infty)$.

综上，实数x的取值范围是$[\dfrac{3}{4}, +\infty)$. ……………………………………………………10 分

请注意：以上参考答案与评分标准仅供阅卷时参考，其他答案请参考评分标准酌情给分.

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 ” 专业、专注、有态度 ” 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。