

理科数学

(全卷满分 150 分, 考试时间 120 分钟)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在本试卷和答题卡相应位置上.
2. 作答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案. 答案不能答在试卷上.
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域相应位置上; 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新答案; 不准使用铅笔和涂改液. 不按以上要求作答无效.
4. 考生必须保证答题卡的整洁. 考试结束后, 将试卷和答题卡一并交回.

第 I 卷(选择题, 共 60 分)

一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题列出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

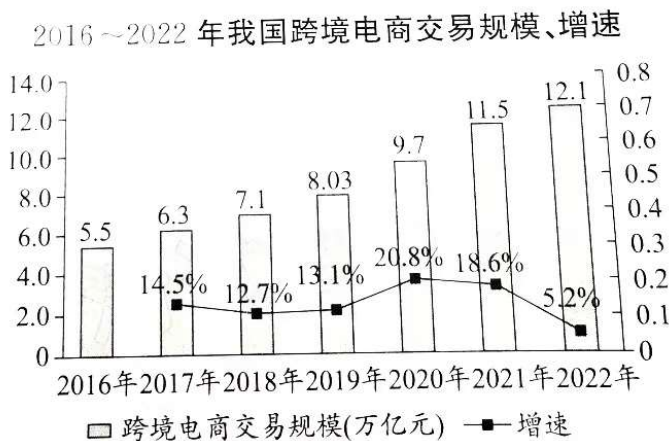
1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x < 0\}$, $B = \{x | 3^x > \sqrt{3}\}$, 则 $A \cup B =$

- A. $(0, \frac{1}{2})$ B. $[\frac{1}{2}, 3)$ C. $(0, +\infty)$ D. $[\frac{1}{2}, +\infty)$

2. 已知 z 的共轭复数是 \bar{z} , 且 $|z - \bar{z} + 1 - 2i|$ (i 为虚数单位), 则复数 z 的虚部为

- A. $\frac{3}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $-2i$ D. -2

3. 下图是我国跨境电商在 2016~2022 年的交易规模与增速统计图, 则下列结论正确的是



- A. 这 7 年我国跨境电商交易规模的平均数为 8.0 万亿元
 B. 这 7 年我国跨境电商交易规模的增速越来越大
 C. 这 7 年我国跨境电商交易规模的极差为 7.6 万亿元
 D. 图中我国跨境电商交易规模的 6 个增速的中位数为 13.8%

4. 设实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y+2 \geq 0, \\ 2x-y \leq 0, \\ 2x+3y+6 \geq 0, \end{cases}$ 则 $z=x-2y$ 的最小值为

- A. -8 B. -6 C. -4 D. -2

5. $(\frac{1}{x}-2)(1-2x)^4$ 的展开式中, 常数项为

- A. -10 B. -8 C. -6 D. -4

6. 我国古代魏晋时期数学家刘徽用“割圆术”计算圆周率, “割之弥细, 所失弥少, 割之, 又割, 以至于不可割, 则与圆周合体无所失矣”. 刘徽从圆内接正六边形逐次分割, 一直分割到圆内接正 3072 边形, 用正多边形的面积逼近圆的面积. 利用该方法, 由圆内接正 n 边形与圆内接正 $2n$ 边形分别计算出的圆周率的比值为

- A. $\sin(\frac{180}{n})^\circ$ B. $\cos(\frac{180}{n})^\circ$ C. $2\sin(\frac{360}{n})^\circ$ D. $2\cos(\frac{360}{n})^\circ$

7. 从 0, 2, 4 中选一个数字, 从 1, 3, 5 中选两个数字, 组成无重复数字的三位数, 其中奇数的个数为

- A. 24 B. 27 C. 30 D. 36

8. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右焦点为 $F(\sqrt{5}, 0)$, 点 P, Q 在双曲线上, 且关于原点 O 对称. 若 $PF \perp QF$, 且 $\triangle PQF$ 的面积为 4, 则双曲线的离心率为

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. 3

9. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + f(-x) = 0, f(1-x) + f(1+x) = 0$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) = 2^x - \sqrt{5}$, 则 $f(\log_2 80) =$

- A. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

10. 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 与直线 $y = k(x+2) (k > 0)$ 相交于 A, B 两点, F 为抛物线 C 的焦点, 若 $|FA| = 2|FB|$, 则 AB 的中点的横坐标为

- A. $\frac{5}{2}$ B. 3 C. 5 D. 6

11. 设 $a = \frac{1}{21}, b = \ln 1.05, c = e^{0.05} - 1$, 则下列关系正确的是

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $c > b > a$ D. $c > a > b$

12. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, M 为 DD_1 的中点, N 为正方形 $ABCD$ 所在平面上的一动点, N_1 为正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 所在平面上的一动点, 且 $NN_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 则下列命题正确的个数为

- ①若 MN 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$, 则动点 N 的轨迹为圆;
②若三棱柱 $NAD-N_1A_1D_1$ 的侧面积为定值, 则动点 N 的轨迹为椭圆;
③若 D_1N 与 AB 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$, 则动点 N 的轨迹为双曲线;
④若点 N 到直线 BB_1 与直线 DC 的距离相等, 则动点 N 的轨迹为抛物线.

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

第 II 卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 平面向量 a, b 满足 $a + b = (3, -2), a - b = (1, x)$, 且 $a \cdot b = 0$, 则 x 的值为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

14. 已知直线 $l_1: y = (2 - \sqrt{3})x, l_2: y = (2 + \sqrt{3})x$, 圆 C 与 l_1, l_2 都相切, 则圆 C 的一个方程为

$\underline{\quad \blacktriangle \quad}$. (写出满足题意的任意一个即可)

15. 已知三棱锥 $P - ABC$ 的体积为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 各顶点均在以 PC 为直径的球面上, $AC = 2\sqrt{3}, AB = 2, BC = 2$, 则该球的表面积为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

16. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$), $f(\frac{\pi}{4}) = 0, f(\frac{\pi}{4} - x) = f(\frac{\pi}{4} + x)$, 且 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{18}, \frac{2\pi}{9})$ 上单调, 则 ω 的最大值为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答; 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一)必考题:共 60 分.

17. (本小题满分 12 分) 针对我国老龄化问题日益突出, 人社部将推出延迟退休方案. 某机构进行了网上调查, 所有参与调查的人中, 持“支持”“保留”和“不支持”态度的人数如下表所示.

	支持	保留	不支持
50 岁以下	8000	4000	2000
50 岁以上(含 50 岁)	1000	2000	3000

(I) 在所有参与调查的人中, 用分层抽样的方法抽取 n 个人, 已知从持“不支持”态度的人中抽取了 30 人, 求 n 的值;

(II) 在持“不支持”态度的人中, 用分层抽样的方法抽取 10 人看成一个总体, 从这 10 人中任意选取 3 人, 求 50 岁以下人数 ξ 的分布列和期望.

\blacktriangle

18. (本小题满分 12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, a_1 = 2, S_n = a_{n+1} - 2$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 令 $b_n = \log_2 a_n$, 从 ① $c_n = b_n \cdot a_n$, ② $c_n = \frac{1}{4b_n^2 - 1}$, ③ $c_n = (-1)^n \cdot b_n^2$ 三个条件中任选一个,

求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

\blacktriangle

版权所有 盗版必究 严禁影印 违者必究

19. (本小题满分 12 分) 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, $B=90^\circ$, $AB=4$, $BC=2$, D, E 分别是边 AB, AC 的中点. 现将 $\triangle ADE$ 沿着 DE 折起, 使点 A 到达点 P 的位置, 连接 PB, PC , 得到四棱锥 $P-BCED$, 如图 2 所示, 设平面 $PDE \cap$ 平面 $PBC = l$.

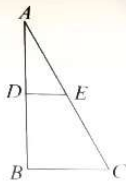


图 1

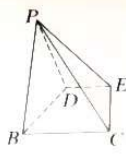


图 2

(I) 求证: $l \perp$ 平面 PBD ;

(II) 若点 B 到平面 PDE 的距离为 $\sqrt{3}$, 求平面 PEC 与平面 PBD 夹角的正弦值.

20. (本小题满分 12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$, 其右焦点为 $F(\sqrt{3}, 0)$.

(I) 求椭圆 C 的标准方程;

(II) 椭圆 C 的右顶点为 A , 若点 P, Q 在椭圆 C 上, 且满足直线 AP 与 AQ 的斜率之积为 $\frac{1}{20}$,

求 $\triangle APQ$ 面积的最大值.

21. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = 2a \ln x + x^2 - 2(a+1)x (a > 0)$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的零点个数;

(II) 若 $f(x)$ 有两个零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 求证: $x_1 + x_2 > 2$.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 那么按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (本小题满分 10 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线

$$l: x+y=1 \text{ 与曲线 } C: \begin{cases} x = \frac{2}{1-t^2} \\ y = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}), \text{ 以坐标原点 } O \text{ 为极点, } x \text{ 轴正半轴为极轴建立极$$

坐标系.

(I) 求曲线 C 的普通方程;

(II) 在极坐标系中, 射线 $m: \theta = \alpha (0 < \alpha < \frac{3\pi}{8})$ 与直线 l 和曲线 C 分别交于点 A, B , 若 $|OA| =$

$(\sqrt{3}-1)|OB|$, 求 α 的值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (本小题满分 10 分) 已知存在 $x_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $|x_0 + a| - |x_0 - 2b| \geq 4$ 成立, $a > 0, b > 0$.

(I) 求 $a+2b$ 的取值范围;

(II) 求 $a^2 + b^2$ 的最小值.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线