实验中学5月得分训练（一）数学答案

一、单选题

1.

【答案】D

【解析】由题得 $B=\{x|3-x<1\}=\{x|x>2\}$，所以 $A\cap B=\{x|x>2\}\cap\{1,2,4\}=\{4\}$.故选：D.

2.

【答案】D

【解析】由题意得复数 $\frac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(2-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{2-2\mathrm{i}-\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{2}=\frac{1-3\mathrm{i}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}$，

所以共轭复数为 $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$，在复平面内对应的点为 $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$，位于第一象限.故选：D.

3.

【答案】B

【解析】杜甫看到的月影是月亮在水面的倒影，月亮在空中近似沿平行于水面的直线 MN 移动，杜甫看到的月影沿 M'N'移动，视线所成的平面与水平面的交线是直线，所以选 B.

4.

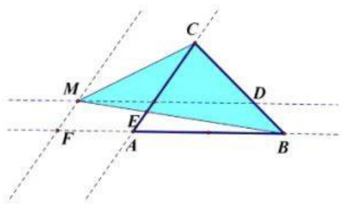
【答案】A

【解析】基本事件为 $C_5^2=10$，满足被 3 整除的基本事件有 $\{1,5\}$，$\{1,2\}$，$\{2,4\}$，$\{4,5\}$，故概率为 $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

5.

【答案】B

如图所示，$S_{\triangle BCM}=S_{\triangle BCE}+S_{\triangle MCE}=\frac{7}{9}(S_{\triangle BCA}+S_{\triangle MCA})=\frac{7}{9}S_{\triangle BCF}=\frac{7}{9}\times\frac{3}{2}S_{\triangle ABC}$. 故选 B



6.

【答案】B

【解析】将函数 $f(x)=\frac{1}{8}\cos 4x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到函数 $h(x)=\frac{1}{8}\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，

则 $h(\omega x)=\frac{1}{8}\cos\left(4\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$，当 $x\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$ 时，$\frac{\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{3}\le 4\omega x+\frac{\pi}{3}\le\frac{2\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{3}$，

由于函数 $y=h(\omega x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增，所以，$\left[\frac{\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{3},\frac{2\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{3}\right]\subseteq[2k\pi-\pi,2k\pi]$，

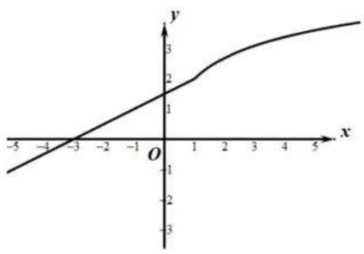
所以，$\begin{cases}\dfrac{\pi\omega}{3}+\dfrac{\pi}{3}\geq 2k\pi-\pi\\ \dfrac{2\pi\omega}{3}+\dfrac{\pi}{3}\leq 2k\pi\end{cases}$，解得 $6k-4\leq\omega\leq 3k-\dfrac{1}{2}(k\in Z)$，

由 $6k-4\leq 3k-\dfrac{1}{2}$，解得 $k\leq\dfrac{7}{6}$，$\because k\in Z$，当 $k=1$ 时，$2\leq\omega\leq\dfrac{5}{2}$，因此，正数 ω 的最大值为 $\dfrac{5}{2}$.故选：B.

7.

【答案】C

【解析】画出 $f(x)$ 的图像如图所示，可知 $f(x)$ 为 R 上的单调递增函数，由于



$f(1)=2$，不妨设 $x_1<x_2$，可知 $x_1<1<x_2$，

故 $f(x_1)=\dfrac{1}{2}x_1+\dfrac{3}{2}, f(x_2)=2+\ln x_2$，$\dfrac{1}{2}x_1+\dfrac{3}{2}+2+\ln x_2=4$，

$\therefore x_1=1-2\ln x_2$，$x_1+x_2=1-2\ln x_2+x_2$

不妨设 $g(x)=1-2\ln x+x, x>1$，$g'(x)=1-\dfrac{2}{x}=\dfrac{x-2}{x}, x>1$

故 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 单调递减，在 $(2,+\infty)$ 单调递增，

则 $g(x)_{\min}=g(2)=3-2\ln 2$，所以 x_1+x_2 的最小值为 $3-2\ln 2$.

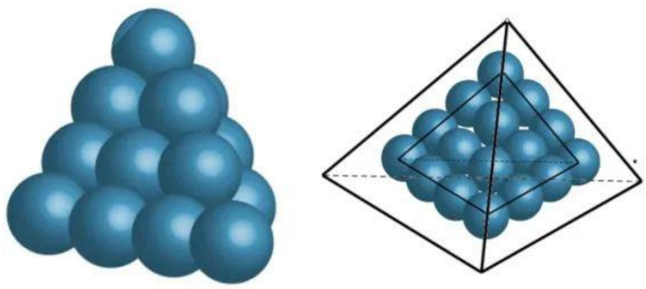
故选：C.

8.

【答案】C

【解析】小球半径最大时恰好和四面体相切，同时各个小球也相切，20 个小球如图所示进行堆叠， 设四面体棱长为 a，根据四面体的高可以列出等式：

$h=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a=3r+\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times 6r+r$ 其中 $r=\sqrt{6}$，可以求出 $a=12+6\sqrt{6}$，故选 C.



二、多选题

9.

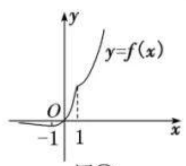
【答案】ABD

【解析】对于 A 选项：$m=1$ 时，方程为 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}=1$，即 $x^2+y^2=2$，曲线 C 是圆，A 正确；对于 B 选项：$m=5$ 时，方程为 $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{2}=1$，曲线 C 为双曲线，其渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，B 正确；对于 C 选项：$m>1$ 时，不妨令 $m=5$，由选项 B 知，曲线 C 为双曲线，C 不正确；对于 D 选项：要使曲线 C 为双曲线，必有 $(m+1)(3-m)<0$，即 $m<-1$ 或 $m>3$，$m<-1$ 时，曲线 C: $\dfrac{y^2}{3-m}-\dfrac{x^2}{-(m+1)}=1$，$m>3$ 时，曲线 C: $\dfrac{x^2}{m+1}-\dfrac{y^2}{m-3}=1$，因双曲线离心率为 $\sqrt{2}$ 时，则它的实半轴长与虚半轴长相等，而 $-(m+1)\neq 3-m$，$m+1\neq m-3$，D 正确．故选 A、B、D.

10.

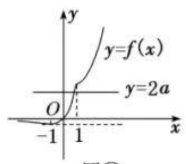
【答案】AC

【解析】当 $x\leqslant 1$ 时，$f(x)=xe^x$，所以 $f'(x)=(x+1)e^x$.若 $-1<x\leqslant 1$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；若 $x<-1$，则 $f'(x)<0$，$f(x)$单调递减．当 $x>1$ 时，$f(x)=\frac{e^x}{x}$，所以 $f'(x)=\frac{e^x}{x^2}(x-1)>0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 单调递增．作出 $f(x)$的图象如图①.对于 A：因为 $f(0)=0$，所以 $x=0$ 为 $y=f(x)$的一个零点，故 A 正确；对于 B：在 $x\in(-1,+\infty)$上 $f(x)$单调递增，所以"$\exists x_1\in(0,1)$，$x_2\in(1,3)$，使 $f(x_1)>f(x_2)$"不成立，故 B 错误；对于 C：因为在 $x\in(-\infty,-1)$上 $f(x)$单调递减，在 $x\in(-1,+\infty)$上 $f(x)$单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(-1)=-e^{-1}$；而当 $x\to+\infty$时，$f(x)\to+\infty$，所以函数 $f(x)$的值域为$[-e^{-1},+\infty)$，故 C 正确；



图①

对于 D：关于 x 的方程$[f(x)]^2-2af(x)=0$ 有两个不相等的实数根，即关于 x 的方程 $f(x)\cdot[f(x)-2a]=0$ 有两个不相等的实数根，所以 $f(x)=0$ 或 $f(x)-2a=0$.由函数的图象可知：方程 $f(x)=0$ 只有一个实数根，所以方程 $f(x)-2a=0$ 也只有一个实数根，即函数 $y=f(x)$与函数 $y=2a$ 的图象只有一个交点．如图②.所以 $a\in(0,+\infty)\cup\left\{-\frac{1}{2e}\right\}$.故 D 不正确.



图②

11.

【答案】ABD

【解析】对于 A，$S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\angle AOB$，而 $|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\angle AOB$，故 $S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|$，正确；

对于 B，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB$，当 $\angle AOB\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\tan\angle AOB$ 有意义

则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\tan\angle AOB=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\angle AOB=|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|$，正确；

对于 C，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=2,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2,\cos\angle AOB=\frac{1}{2},\sin\angle AOB=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|=2\sqrt{3}$，错误；

对于 D，$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$ 的模长即为平行六面体底面 $OABC$ 的面积，且方向垂直于底面，由数量积的几何意义可知，$|\overrightarrow{OO'}\cdot(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})|$ 就是 $\overrightarrow{OO'}$ 在垂直于底面 $OABC$ 的方向上的投影向量的模长（即为高）乘以底面的面积，即为体积，正确；

故选 ABD.

12.

【答案】ABD

【解析】对选项 A，考查函数的周期性，取 $T=1$，

若 $x=0$，则 $x+1=1$，

$r(0)=1,r(1)=1$，所以满足 $r(x+1)=r(x)$，

若 x 为无理数，则 $x+1$ 也是无理数，满足 $r(x+1)=r(x)$.

若 x 为非零有理数，即 $x=\frac{q}{p}$，$x+1=\frac{q}{p}+\frac{p}{p}=\frac{p+q}{p}$，$\because p,q$ 互质，则 $p+q$ 与 p 也互质，$\therefore r(x)=\frac{1}{p}, r(x+1)=\frac{1}{p}$，满足 $r(x+1)=r(x)$，故 A 选项正确.

对于 B 中，①若 $a,b\in(0,1]$，设 $a=\frac{q}{p}$，$b=\frac{n}{m}$（p,q 互质，m,n 互质），$a\cdot b=\frac{q}{p}\cdot\frac{n}{m}\geq\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{m}$，则 $R(a\cdot b)\geq R(a)\cdot R(b)$；

②若 a,b 有一个为 0，则 $R(a\cdot b)\geq R(a)\cdot R(b)=0$，所以 B 正确；

对于 C 中：若 n 为大于 1 的正数，则 $\frac{n}{n+1}>\frac{1}{2}$，$R(x)$ 的值域为 $\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{p},\cdots\right\}$，其中 p 是大于等于 2 的正整数，所以该方程不可能有实根，所以 C 错误；

对于选项 D，满足 $\left\{x\in[n,n+1] \mid r(x)=\frac{1}{t}\right\}$ 的元素为 $n+\frac{i}{t}(i=1,2,\cdots t-1)$，一个质数与任何比小于他的自然数都互质，共 t-1 个，故 D 正确.

故选：ABD

三、填空题

13.

【答案】243

【解析】由 $(2-x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，

令 $x=-1$，可得 $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5=(2+1)=3^5=243$.

故答案为：243.

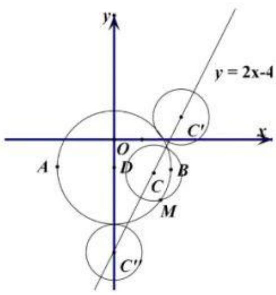
14.

【答案】$1-e$

【解析】设切点为 $(x_0,f(x_0))$，斜率 $f'(x_0)=1-e^{-x_0}$，切线方程为 $y-x_0-e^{-x_0}=(1-e^{-x_0})(x-x_0)$，

将原点坐标代入化简得 $(x_0+1)e^{-x_0}=0$，因为 $e^{-x_0}\neq0$，所以 $x_0+1=0$ 即 $x_0=-1$，故 $k=f'(-1)=1-e$.故答案为：$1-e$.

15.



【答案】$\left[0,\frac{12}{5}\right]$

【解析】如图 $(x-a)^2+(y-2a+4)^2=1$ 的圆心 $C(a,2a-4)$ 在直线 $y=2x-4$ 上，满足 $MA\perp MB$ 的点 M 在圆 D $x^2+(y+1)^2=4$ 上，圆 C 和圆 D 的交点就是 M.

由图可知，a 的范围就是 $[x_{C''},x_{C'}]$，做圆心 D 到直线 $y=2x-4$ 的垂线，垂足为 H，

$DH=\frac{3\sqrt{5}}{5}$，$\begin{cases}y=2x-4\\y=\frac{1}{2}x-1\end{cases}$ 得 $x_H=\frac{6}{5}$.两圆半径和为 3，由勾股定理得，$C'H=C''H=\frac{6\sqrt{5}}{5}$,即

$\sqrt{1+2^2}\left|x_{C''}-x_H\right|=\sqrt{1+2^2}\left|x_{C'}-x_H\right|=\frac{6\sqrt{5}}{5}$，$\left|x_{C''}-x_H\right|=\left|x_{C'}-x_H\right|=\frac{6}{5}$，$\left[x_{C''},x_{C'}\right]=\left[0,\frac{12}{5}\right]$

16.

【答案】 1 $\left[2\sqrt{2},2\sqrt{6}\right]$

【解析】根据题意设 $CD:x=my+\sqrt{2}$，联立方程结合题意可求得 $0\le m^2<1$.空 1：根据题意分析利用韦达定理可得 $\left|AF_1\right|\cdot\left|CF_2\right|=\left|1+\frac{2}{m^2-1}\right|$，结合不等式分析运算；空 2：根据点到直线的距离结合韦达定理运算求解.

【详解】由双曲线 $x^2-y^2=1$ 可得 $a=b=1,c=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，则 $F_1\left(-\sqrt{2},0\right),F_2\left(\sqrt{2},0\right)$，

设直线 $CD:x=my+\sqrt{2},C(x_1,y_1),D(x_2,y_2)$，

联立方程 $\begin{cases}x=my+\sqrt{2}\\x^2-y^2=1\end{cases}$，消去 x 得：$\left(m^2-1\right)y^2+2\sqrt{2}my+1=0$，

则 $\Delta=\left(2\sqrt{2}m\right)^2-4\left(m^2-1\right)\times1=4\left(m^2+1\right)>0,y_1+y_2=-\frac{2\sqrt{2}m}{m^2-1},y_1y_2=\frac{1}{m^2-1}$，

由题意可得 $y_1y_2=\frac{1}{m^2-1}<0$，解得 $0\le m^2<1$，

空 1：根据对称性可知：$\left|AF_1\right|=\left|DF_2\right|$，

则 $\left|AF_1\right|\cdot\left|CF_2\right|=\left|DF_2\right|\cdot\left|CF_2\right|=\left(\sqrt{1+m^2}\left|y_2\right|\right)\cdot\left(\sqrt{1+m^2}\left|y_1\right|\right)=\left(1+m^2\right)\left|y_1y_2\right|=\left(1+m^2\right)\left|\frac{1}{m^2-1}\right|=\left|\frac{m^2+1}{m^2-1}\right|=\left|1+\frac{2}{m^2-1}\right|$，

$\because 0\le m^2<1$，则 $-1\le m^2-1<0$，可得 $\frac{1}{m^2-1}\le-1$，$\therefore 1+\frac{2}{m^2-1}\le-1$，可得 $\left|AF_1\right|\cdot\left|CF_2\right|=\left|1+\frac{2}{m^2-1}\right|\ge1$，

故 $\left|AF_1\right|\cdot\left|CF_2\right|$ 的最小值为 1；

空 2：连接 AC,BD,AD,BC，根据题意可知四边形 $ABDC$ 为平行四边形，且 $AD\cap BC=O$，

点 $O(0,0)$ 到直线 $CD:x-my-\sqrt{2}=0$ 的距离 $d=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+m^2}}$，$m\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

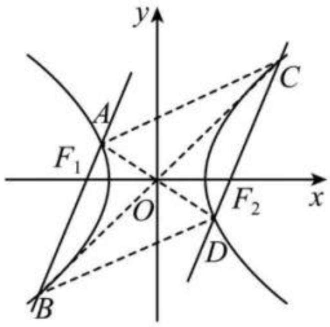
且 $\left|CD\right|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{\left(-\frac{2\sqrt{2}m}{m^2-1}\right)^2-4\times\frac{1}{m^2-1}}=\frac{2\left(m^2+1\right)}{1-m^2}$，

故四边形 AF_1F_2C 的面积 $S_{AF_1F_2C}=\frac{1}{2}S_{ABDC}=\frac{1}{2}\times4S_{\triangle OCD}=2\times\frac{1}{2}\times d\times\left|CD\right|=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+m^2}}\times\frac{2\left(m^2+1\right)}{1-m^2}=\frac{2\sqrt{2\left(m^2+1\right)}}{1-m^2}$

令$t^2=m^2+1\in\left[1,\frac{4}{3}\right]$，$\frac{2\sqrt{2(m^2+1)}}{1-m^2}=\frac{2\sqrt{2}t}{2-t^2}=2\sqrt{2}\frac{1}{\frac{2}{t}-t}$，关于 t 单调递增.

故四边形AF_1F_2C的面积$S_{AF_1F_2C}=\frac{2\sqrt{2(m^2+1)}}{1-m^2}=\frac{2\sqrt{2}t}{2-t^2}\in\left[2\sqrt{2},2\sqrt{6}\right]$.

故答案为：1；$\left[2\sqrt{2},2\sqrt{6}\right]$.



四、解答题

17.（10分）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_n=\frac{a_{n+1}}{2^n}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$b_n=\log_2 a_n^2+3n$，数列$\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$的前$n$项和$S_n$，求证：$S_n<\frac{3}{4}$.

【答案】(1)$a_n=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$

(2)证明见解析

【详解】(1) 解：因为$a_1=1$，$\frac{a_{n+1}}{2^n}=a_n$　$(n\in\mathbf{N}^*)$，

所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$，

所以$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=2^{n-1}\cdot2^{n-2}\cdot\cdots\cdot2^1\cdot1=2^{1+2+\cdots+(n-1)}=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ ……………………2分

当$n=1$时，$a_1=1$满足条件，……………………3分

所以$a_n=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$；……………………4分

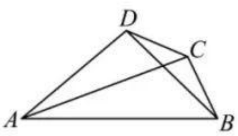
(2) 因为$b_n=\log_2 a_n^2+3n=n(n+2)$，……………………5分

所以$\frac{1}{b_n}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})$，……………………6分

所以$S_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})=\frac{1}{2}(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})$，……………………8分

所以$S_n<\frac{3}{4}$．……………………10分

18.（12分）如图在平面四边形$ABCD$中，$AC=\sqrt{7}$，$AB=3$，$\angle DAC=\angle BAC$，$\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{21}}{14}$.



(1)求边BC；

(2)若$\angle CDA=\frac{2\pi}{3}$，求四边形$ABCD$的面积.

【答案】(1)1；(2)$\frac{5\sqrt{3}}{4}$.

【解析】(1) 因为 $\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{21}}{14}$，$\angle BAC$ 为锐角，

所以 $\cos\angle BAC=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{21}}{14}\right)^2}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$. ……………………2 分

因为 $AC=\sqrt{7}$，$AB=3$，

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $BC^2=AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cdot\cos\angle BAC$，

即 $BC^2=7+9-2\times\sqrt{7}\times3\times\frac{5\sqrt{7}}{14}=1$，得 $BC=1$. ……………………4 分

(2) 在 $\triangle ADC$ 中，由正弦定理得 $\frac{CD}{\sin\angle DAC}=\frac{AC}{\sin\angle ADC}$，

即 $\frac{CD}{\frac{\sqrt{21}}{14}}=\frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，所以 $CD=1$. ……………………6 分

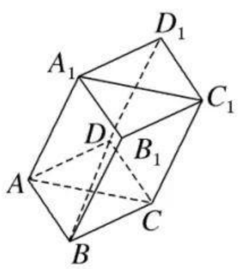
在 $\triangle ADC$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle ADC=\frac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}$，

即 $-\frac{1}{2}=\frac{AD^2+1-7}{2AD}$，解得 $AD=2$. ……………………8 分

因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{7}\times3\times\frac{\sqrt{21}}{14}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times1\times2\times\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，……………………10 分（一个 1 分）

所以 $S_{ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{4}$. ……………………12 分

19.（12 分）如图，棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱长都等于 2，$\angle ABC$ 和 $\angle A_1AC$ 均为 $60°$，平面 $AA_1C_1C\perp$ 平面 $ABCD$.

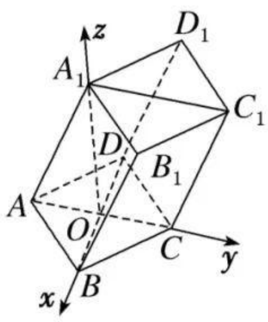


(1)在直线 CC_1 上是否存在点 P，使 $BP//$ 平面 DA_1C_1？若存在，求出点 P 的位置，若不存在，请说明理由.

(2)求平面 DA_1C_1 和平面 PA_1C_1 的夹角.

【答案】(1) 点 P 在 C_1C 的延长线上，且 $CP=CC_1$.；(2) $\frac{\pi}{4}$.

【解析】



(1)证明：设 BD 与 AC 交于点 O，

则 $BD\perp AC$，连接 A_1O，

在 $\triangle AA_1O$ 中，$AA_1=2$，$AO=1$，$\angle A_1AO=60°$，

所以 $A_1O^2=AA_1^2+AO^2-2AA_1\cdot AO\cos60°=3$，

所以 $AO^2+A_1O^2=AA_1^2$，

所以 $A_1O\perp AO$. ……………………2 分

由于平面 $AA_1C_1C\perp$ 平面 $ABCD$，且平面 $AA_1C_1C\cap$ 平面 $ABCD=AC$，$A_1O\subset$ 平面 AA_1C_1C，

所以 $A_1O\perp$ 平面 $ABCD$. ……………………4 分

以 OB，OC，OA_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $A(0,\ -1,\ 0)$，$B(\sqrt{3},\ 0,\ 0)$，$C(0,\ 1,\ 0)$，$D(-\sqrt{3},\ 0,\ 0)$，$A_1(0,\ 0,\ \sqrt{3})$，$C_1(0,\ 2,\ \sqrt{3})$.

由于 $\overrightarrow{BD}=(-2\sqrt{3},\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{AA_1}=(0,\ 1,\ \sqrt{3})$，$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BD}=0\times(-2\sqrt{3})+1\times0+\sqrt{3}\times0=0$，

所以 $\overrightarrow{BD}\perp\overrightarrow{AA_1}$，即 $BD\perp AA_1$.

假设在直线 CC_1 上存在点 P，使 BP∥平面 DA_1C_1，

设 $\overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{CC_1}$，$P(x,\ y,\ z)$，则$(x,\ y-1,\ z)=\lambda(0,\ 1,\ \sqrt{3})$.

从而有 $P(0,\ 1+\lambda,\ \sqrt{3}\lambda)$，$\overrightarrow{BP}=(-\sqrt{3},\ 1+\lambda,\ \sqrt{3}\lambda)$.

设平面 DA_1C_1 的一个法向量为 $\mathbf{n}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$，则 $\begin{cases}\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0,\\ \mathbf{n}\cdot\overrightarrow{DA_1}=0,\end{cases}$

又 $\overrightarrow{A_1C_1}=(0,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{DA_1}=(\sqrt{3},\ 0,\ \sqrt{3})$，则 $\begin{cases}2y_1=0,\\ \sqrt{3}x_1+\sqrt{3}z_1=0,\end{cases}$ 取 $\mathbf{n}=(1,\ 0,\ -1)$，……………………6 分

因为 BP∥平面 DA_1C_1，所以 $\mathbf{n}\perp\overrightarrow{BP}$，即 $\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{BP}=-\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda=0$，解得 $\lambda=-1$，……………………7 分

即点 P 在 C_1C 的延长线上，且 $CP=CC_1$. ……………………8 分

（2）P 在 C_1C 的延长线上，所以 P 在平面 C_1CA_1 内，平面 PA_1C_1 就是平面 CC_1A_1

故所求为平面 DA_1C_1 和平面 CA_1C_1 的夹角.（若第（1）问错误，有此说明，第（2）问也可以给分）

按照（1）中的建系和结果得平面 DA_1C_1 的一个法向量为 $\mathbf{n}=(1,\ 0,\ -1)$，

$\overrightarrow{CC_1}=(0,\ 1,\ \sqrt{3})$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(0,\ 2,\ 0)$，

设平面 CC_1A_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{CC_1}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0\end{cases}$

取 $\boldsymbol{m}=(1,\ 0,\ 0)$

（或由 $BB_1\perp$ 平面 ACC_1A_1 得平面 CC_1A_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,\ 0,\ 0)$）……………………10 分

$$\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\times|\vec{n}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

所以平面 DA_1C_1 和平面 PA_1C_1 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$ ……………………12 分

20. 为了有针对性地提高学生体育锻炼的积极性，某中学需要了解性别因素是否对学生体育锻炼的经常性有影响，为此随机抽查了男女生各 100 名，得到如下数据：

性别	锻炼	
	不经常	经常

女生	40	60
男生	20	80

(1)依据$\alpha=0.01$的独立性检验，能否认为性别因素与学生体育锻炼的经常性有关系；

(2)为了提高学生体育锻炼的积极性，集团设置了“学习女排精神，塑造健康体魄”的主题活动，在该活动的某次排球训练课上，甲乙丙三人相互做传球训练，第1次由甲将球传出，每次传球时，传球者都等可能地将球传给另外两个人中的任何一人.求第n次传球后球在甲手中的概率.

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

α	0.010	0.005	0.001
x_α	6.635	7.879	10.828

【答案】(1)可以认为性别因素与学生体育锻炼的经常性有关系，理由见解析

(2)$\dfrac{1}{3}\left[1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$

【解析】

（1）零假设为H_0

H_0：性别因素与学生体育锻炼的经常性无关（或者不同性别学生体育锻炼经常性无差异）………………………1分

$\chi^2=\dfrac{200\times(40\times80-60\times20)^2}{100\times100\times60\times140}\approx9.524>6.635$，………………………3分

故依据$\alpha=0.01$的独立性检验，可以推断H_0不成立，可以认为性别因素与学生体育锻炼的经常性有关系；

………………………4分

（2）设n次传球后球在甲手中的概率为p_n，$n=1,2,3\cdots$，

则有$p_1=0$，$p_{n+1}=\dfrac{1}{2}(1-p_n)+0\cdot p_n=-\dfrac{1}{2}p_n+\dfrac{1}{2}$，………………………6分

设$p_{n+1}+\lambda=-\dfrac{1}{2}(p_n+\lambda)$，则$p_{n+1}=-\dfrac{1}{2}p_n-\dfrac{3}{2}\lambda$，

所以$-\dfrac{3}{2}\lambda=\dfrac{1}{2}$，解得：$\lambda=-\dfrac{1}{3}$，

所以$p_{n+1}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{2}\left(p_n-\dfrac{1}{3}\right)$，其中$p_1-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{3}$，………………………8分

故数列$\left\{p_n-\dfrac{1}{3}\right\}$是以$-\dfrac{1}{3}$为首项，$-\dfrac{1}{2}$为公比的等比数列，………………………9分

所以$p_n-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{3}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$，………………………10分

故 $p_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$，

故第 n 次传球后球在甲手中的概率为 $\frac{1}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$.……………………12 分

21．已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过$F_2$作$x$轴的垂线交$C$于点$P$，$|PF_1|=\frac{7}{2}$，$|PF_2|=\frac{1}{2}$，$M$、$N$为椭圆的左右顶点．

(1)求椭圆C的方程；

(2)设过点$G(1,0)$的动直线l交椭圆C于A，B两点（A在第一象限，B在第四象限），若直线AM，BN的斜率分别为k_{AM}，k_{BN}．

（i）试探究k_{AM}与k_{BN}的比值$\frac{k_{AM}}{k_{BN}}$是否为定值．若是定值，求出这个定值；若不是定值，请说明理由；

（ii）求$k_{AM}^2-\frac{1}{3}k_{BN}$的取值范围．

【答案】(1)$\frac{x^2}{4}+y^2=1$(2)（i）是定值$\frac{1}{3}$；（ii）$\left(-\frac{1}{4},-\frac{5}{36}\right)$

【解析】（1）因为$|PF_1|+|PF_2|=2a=4$，所以$a=2$，　　………………………1分

联立椭圆方程$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$和 x=c，可得$|PF_2|=\frac{1}{2}=\frac{b^2}{a}$，所以$b=1$，　………………………3分

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$．　　………………………4分

（2）（i）设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，直线AB的方程为$x=my+4$，

由$\begin{cases}x=my+4\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，消元得$(m^2+4)y^2+2my-3=0$．所以$\begin{cases}y_1+y_2=-\frac{2m}{m^2+4}\\ y_1y_2=-\frac{3}{m^2+4}\end{cases}$，　………………………6分

$$\therefore\frac{k_{AM}}{k_{BN}}=\frac{\frac{y_1}{x_1+2}}{\frac{y_2}{x_2-2}}=\frac{y_1}{x_1+2}\times\frac{x_2-2}{y_2}=\frac{y_1(my_2-1)}{y_2(my_1+3)}=\frac{my_1y_2-y_1}{my_1y_2+3y_2}$$

由韦达定理可得$\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}=\frac{2m}{3}$，即$my_1y_2=\frac{3}{2}(y_1+y_2)$，

$\frac{k_{AM}}{k_{BN}}=\frac{my_1y_2-y_1}{my_1y_2+3y_2}=\frac{\frac{3}{2}(y_1+y_2)-y_1}{\frac{3}{2}(y_1+y_2)+3y_2}=\frac{y_1+3y_2}{3y_1+9y_2}=\frac{1}{3}$，即$k_{AM}$与$k_{BN}$的比为定值$\frac{1}{3}$．　………………………8分

（ii）因为点A在第一象限，所以$k_{AM}\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，

同理可得$k_{BN}\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$，……………………9 分

由（i）中结论可知$k_{BN}=3k_{AM}\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$，

得$k_{AM}\in\left(\frac{1}{6},+\infty\right)$，所以$k_{AM}\in\left(\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right)$，……………………10 分

故$k_{AM}^2-\frac{1}{3}k_{BN}=k_{AM}^2-k_{AM}=\left(k_{AM}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，

故$k_{AM}^2-\frac{1}{3}k_{BN}$的取值范围为$\left(-\frac{1}{4},-\frac{5}{36}\right)$．……………………12 分

22．已知函数 $f(x)=ax+(a+1)\ln x-\frac{1}{x}$．

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)当 $a=0$ 时，$g(x)=x(1-f(x))=t$ 有两个不相等的实根 x_1,x_2，证明 $\left|\frac{x_1-x_2}{x_1+x_2}\right|>\frac{2\sqrt{2-t}}{e}$．

【答案】(1)见解析

(2)证明见解析

【解析】(1) 因为 $f(x)=ax+(a+1)\ln x-\frac{1}{x}$，所以 $f'(x)=a+\frac{a+1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{(x+1)(ax+1)}{x^2}$． ……………………1 分

当 $a\geq 0$ 时，$f¢(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增．

当 $a<0$ 时，令 $f¢(x)>0$，得 $0<x<-\frac{1}{a}$；令 $f'(x)<0$，得 $x>-\frac{1}{a}$．

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,-\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减． ……………………3 分

(2)

$a=0$ 时，$g(x)=x(1-f(x))=x-x\ln x+1$，$g(x_1)=g(x_2)=t$．

即 $y=x-x\ln x+1$与$y=t$ 有两不同交点

$g'(x)=-\ln x,$

$x\in(0,1),g'(x)>0,g(x)$单调递增

$x\in(1,+\infty),g'(x)<0,g(x)$单调递减

$\therefore\ g(x)$最大值$g(1)=2,$且$g(e)=1$

不妨令$0<x_1<1<x_2$．

下面分两部分来证明：① $x_1+x_2<e$ ② $x_2-x_1>2\sqrt{2-t}$

证明①：

$g'(e)=-1,$ $g(x)=x-x\ln x+1$ 在 $(e,1)$ 处的切线为 $y=-x+e+1$

$x>1$时，令 $m(x)=-x+e+1-g(x)=-x+e+1-(x-x\ln x+1)=e+x\ln x-2x$

$m'(x)=\ln x-1$，$x\in(1,e),m'(x)<0,m(x)$递减，

$x\in(e,+\infty),m'(x)>0,m(x)$递增 $m(x)$的最小值为$m(e)=0$，$m(x_2)\geq 0$，$m(x_2)=-x_2+e+1-g(x_2)\geq 0$，

$g(x_2)=t$

所以$-x_2+e+1\geq t,x_2\leq e+1-t$． ……………………5 分

$0<x<1$时，令 $n(x)=g(x)-(x+1)=x-x\ln x+1-x-1=-x\ln x$

$0<x<1$时，$n(x)\ge 0$恒成立，$n(x_1)\ge 0$，$n(x_1)=g(x_1)-(x_1+1)\ge 0$，$g(x_1)=t$

所以$t\ge x_1+1, x_1\le t-1$.

所以$x_1+x_2\le e+1-t+t-1$，即$x_1+x_2\le e$.

$x_1=x_2=1$时取等，不合题意，故$x_1+x_2<e$ ························7 分

证明②：构造函数$t(x)=2-(x-1)^2$

令$h(x)=g(x)-t(x)=x-x\ln x+1-\left[2-(x-1)^2\right]=x-x\ln x+1-2+x^2-2x+1=x^2-x-x\ln x$

$h(x)=g(x)-t(x)=x^2-x-x\ln x=x(x-1-\ln x)$

令$s(x)=x-1-\ln x, s'(x)=1-\dfrac{1}{x}, s(x)$在$(0,1)$递减，在$(1,+\infty)$递增，$s(x)\ge s(1)=0$

所以$h(x)=x\bullet s(x)\ge 0$ ························9 分

$0<x<1$时，$h(x_1)\ge 0, g(x_1)-t(x_1)\ge 0$，$t\ge t(x_1)$，$t\ge 2-(x_1-1)^2$

$1-x_1\ge\sqrt{2-t}$，$x_1\le 1-\sqrt{2-t}$

$x>1$时，$h(x_2)\ge 0, g(x_2)-t(x_2)\ge 0$，$t\ge t(x_2)$，$t\ge 2-(x_2-1)^2$

$x_2-1\ge\sqrt{2-t}$，$x_2\ge 1+\sqrt{2-t}$

因为$-x_1\ge\sqrt{2-t}-1$，$x_2\ge 1+\sqrt{2-t}$，$|x_1-x_2|=x_2+(-x_1)\ge 2\sqrt{2-t}$

$x_1=x_2=1$时取等，不合题意，故$|x_1-x_2|>2\sqrt{2-t}$ ························11 分

综合①$x_1+x_2<e$，即$\dfrac{1}{x_1+x_2}>\dfrac{1}{e}$②$x_2-x_1>2\sqrt{2-t}$ 即$|x_1-x_2|>2\sqrt{2-t}$，将两式相乘得$\left|\dfrac{x_1-x_2}{x_1+x_2}\right|>\dfrac{2\sqrt{2-t}}{e}$.

························12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。