数学答案

1.C 【解析】$z^2-2z=(a+2i)^2-2(a+2i)=a^2-4+4ai-2(a+2i)=a^2-2a-4+(4a-4)i\in\mathbf{R}$，故 $4a-4=0$，解得 $a=1$，故 $|z|=\sqrt{5}$. 故选 C.

2.B 【解析】$\complement_I M=\{x\mid x\geqslant 1\}$，$N=\{x\mid 0<x<2\}$，故 $(\complement_I M)\cap N=[1,2)$. 故选 B.

3.A 【解析】由 $f(-x)=f(x)$ 可知 $f(x)$ 是偶函数，排除选项 D；
当 $x>0$ 时，$e^x>1>e^{-x}$，$\therefore e^x-e^{-x}>0$，$\therefore f(x)>0$，排除选项 C；
当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to 0$. 故选 A.

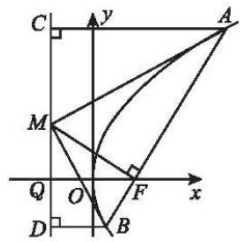
4.A 【解析】$\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{\omega}$，故 $\omega=\frac{3}{2}$，故 $f(x)=\sin\left(\frac{3}{2}x+\varphi\right)$，当 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$\frac{3}{2}\times\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，故 $\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，又 $\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{3\pi}{2}$，故 $\varphi=\pi$. 故选 A.

5.D 【解析】由 $f(-x)=\frac{x^2}{x^2+6x+18}$，易知选项 A，B 不正确；易得 $f(2)=\frac{2}{5}$，$f(4)=\frac{8}{5}$，故 $f(2)\neq f(4)$，故选项 C 不正确；$f(x)=\frac{x^2}{(x-3)^2+9}$，故 $f(6-x)+f(x)=\frac{(6-x)^2}{(3-x)^2+9}+\frac{x^2}{(x-3)^2+9}=\frac{2x^2-12x+36}{(x-3)^2+9}=2$，故 $f(x)$ 的图象关于点 $(3,1)$ 中心对称. 故选 D.

6.C 【解析】e，f 不相邻的排法种数为 $A_4^4A_5^2=480$，其中 a 或 b 在排头的排法种数为 $C_2^1A_3^3A_4^2=144$，故不同的排法种数为 $480-144=336$. 故选 C.

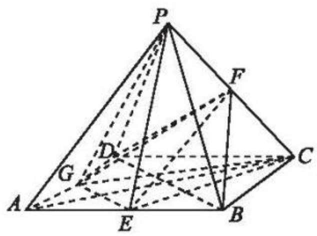
7.D 【解析】(方法 1)易知焦点 $F(2,0)$，故 $k_{MF}=-\frac{1}{2}$，则 $k_{AB}=2$，故直线 AB 的方程为 $y=2(x-2)=2x-4$，代入 $y^2=8x$ 得，$y^2-4y-16=0$，
设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=4$，$y_1y_2=-16$，
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x_1+2,y_1-2)\cdot(x_2+2,y_2-2)=\left(\frac{y_1^2}{8}+2\right)\left(\frac{y_2^2}{8}+2\right)+(y_1-2)(y_2-2)=\frac{(y_1y_2)^2}{64}+\frac{1}{4}(y_1^2+y_2^2)+4+y_1y_2-2(y_1+y_2)+4=\frac{(y_1y_2)^2}{64}+\frac{1}{4}(y_1+y_2)^2+\frac{1}{2}y_1y_2-2(y_1+y_2)+8=\frac{(-16)^2}{64}+\frac{1}{4}\times4^2+\frac{1}{2}\times(-16)-2\times4+8=0$. 故选 D.

(方法 2)设点 A，B 在准线上的射影分别为点 C，D，如图，



易知 $|AF|=|AC|$，$|AM|=|AM|$，$\angle ACM=\angle AFM=90°$，则 $\text{Rt}\triangle AFM\cong\text{Rt}\triangle ACM$，则 $\angle CMA=\angle FMA$，同理 $\text{Rt}\triangle BFM\cong\text{Rt}\triangle BDM$，则 $\angle DMB=\angle FMB$，由此可得 $\angle AMB=90°$，故 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$. 故选 D.

8.B 【解析】连接 BD，DF，如图，



设 $BF=DF=x$，由 $BD/\!/EG$，得 $\angle FBD$ 即为 BF 与 EG 所成的角，在 $\triangle FBD$ 中，易知 $BD=2\sqrt{2}$，$\cos\angle FBD=\frac{x^2+8-x^2}{4\sqrt{2}x}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，解得 $x=\sqrt{3}$. 设 $PB=PC=y$，在 $\triangle PFB$ 中，$\left(\frac{y}{2}\right)^2+3-2\sqrt{3}\cdot\frac{y}{2}\cos\angle PFB=y^2$，在 $\triangle BCF$ 中，$\left(\frac{y}{2}\right)^2+3-2\sqrt{3}\cdot\frac{y}{2}\cos\angle BFC=4$，两式相加求得 $y=2$. 因为 F 为 PC 的中点，故 $V_{P-EFG}=V_{C-EFG}=V_{F-ECG}$，在等腰直角三角

形 PAC 中,易求得 P 到 AC 的距离即 P 到底面的距离为$\sqrt{2}$,故 F 到平面 CEG 的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$,$S_{\triangle ECG}=S_{ABCD}-S_{\triangle AEG}-S_{\triangle CDG}-S_{\triangle CEB}=4-\frac{1}{2}-1-1=\frac{3}{2}$,故所求三棱锥的体积为$\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

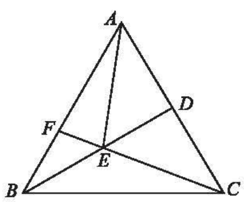
故选 B.

9. BC 【解析】取 $a=\pi,b=\frac{\pi}{2}$,则 $\sin a<\sin b$,故 A 错误;构造函数 $f(x)=x-\sin x\ (x>0)$,则 $f'(x)=1-\cos x\geqslant0$,故 $f(x)$为增函数,故 $f(a)>f(b)$,即 $a-\sin a>b-\sin b$,故 B 正确;$c>d>0$,故$\frac{1}{d}>\frac{1}{c}>0$ 与 $a>b>0$ 两式相乘得$\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$,故 C 正确;$ad+bc-(ab+cd)=a(d-b)+c(b-d)=(d-b)(a-c)<0$,故 D 错误. 故选 BC.

10. AB 【解析】$\tan\theta=\dfrac{\sin\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}}{\sin\frac{3\pi}{8}-\cos\frac{3\pi}{8}}=\dfrac{\tan\frac{3\pi}{8}+1}{\tan\frac{3\pi}{8}-1}=-\tan\frac{5\pi}{8}=\tan\frac{3\pi}{8}$,故 $\theta=\frac{3\pi}{8}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,又 $\sin\frac{3\pi}{8}-\cos\frac{3\pi}{8}>0$,$\sin\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}>0$,故 θ 是第一象限角,又 $\theta\in(0,2\pi)$,故 $\theta=\frac{3\pi}{8}$,故 A 正确;$|OM|^2=\left(\sin\frac{3\pi}{8}-\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2+\left(\sin\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2=2$,故 $|OM|=\sqrt{2}$,故 B 正确;$\tan\theta=\tan\frac{3\pi}{8}>\tan\frac{\pi}{4}=1$,故 C 错误;$\cos\theta=\cos\frac{3\pi}{8}<\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$,故 D 错误.

故选 AB.

11. AB 【解析】如图,



$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$,故 A 正确;设 $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AF}$,则 $\overrightarrow{AE}=\frac{k}{2}\overrightarrow{AF}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$,又 E,F,C 三点在一条直线上,故$\frac{k}{2}+\frac{1}{4}=1$,故 $k=\frac{3}{2}$,即 $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{FB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$,故 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$,故 B 正确;$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$,故 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC})=\frac{1}{4}\times(-2+2)=0$,故 C 错误;$S_{\triangle DEC}=S_{\triangle BEC}=\frac{1}{2}S_{\triangle BDC}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$,$S_{\triangle BEF}=S_{\triangle FBC}-S_{\triangle BEC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}-\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{12}S_{\triangle ABC}$,故 $S_{\triangle DEC}=3S_{\triangle BEF}$,故 D 错误. 故选 AB.

12. ABD 【解析】$a_2=\frac{a_1}{1}=1$,故 A 正确;由 $a_{n+1}=\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n}$知,$a_n=\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{n-1}(n\geqslant2)$,两式相减得 $a_{n+1}-a_n=\frac{a_n}{n}(n\geqslant2)$,故$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}$,故当 $n\geqslant2$ 时,$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$为常数列,故$\frac{a_n}{n}=\frac{a_2}{2}=\frac{1}{2}$,故 $a_n=\begin{cases}1,n=1,\\ \frac{n}{2},n\geqslant2,\end{cases}$ 故 $a_{2\,024}=1\ 012$,故 B 正确;$S_n=1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\cdots+\frac{n}{2}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\cdots+\frac{n}{2}\right)=\frac{n(n+1)}{4}+\frac{1}{2}$,故 C 错误;$\frac{1}{S_n}=\dfrac{1}{\frac{n(n+1)}{4}+\frac{1}{2}}<\frac{4}{n(n+1)}=4\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,故$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}<1+4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1+4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)<3$,故 D 正确.

故选 ABD.

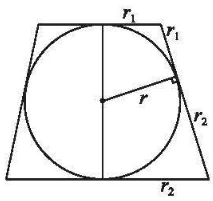
13. $\sqrt{2}$ 【解析】由题意得,$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{m^2+m^2+4}{m^2}=4$,又 $m>0$,则 $m=\sqrt{2}$.

14. $(\sqrt{2}-1,1)$ 【解析】$f'(x)=\frac{1}{x\ln a}+\frac{1}{x\ln(a+2)}=\frac{1}{x}\left[\frac{1}{\ln a}+\frac{1}{\ln(a+2)}\right]\leqslant0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立,则$\frac{1}{\ln a}+\frac{1}{\ln(a+2)}\leqslant0$,

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

又 $0<a<1$,则 $\ln a<0,\ln(a+2)>0$,不等式化为 $\ln(a+2)+\ln a\geqslant 0$,即 $\ln(a^2+2a)\geqslant 0$,则 $a^2+2a\geqslant 1$,解得 $\sqrt{2}-1\leqslant a<1$,当 $a=\sqrt{2}-1$ 时,$f(x)=\log_{\sqrt{2}-1}x+\log_{\sqrt{2}+1}x=0$,不合题意,故 $\sqrt{2}-1<a<1$.

15. $\dfrac{14\sqrt{2}}{3}\pi$ 【解析】设内切球的半径为 r,圆台上、下底面圆半径分别为 r_1,r_2,则圆台的高 $h=2r=2\sqrt{2}$,右图为圆台的轴截面图形,



可得母线长 $l=r_1+r_2$,故 $S_{圆台}=\pi(r_1+r_2)^2+\pi r_1^2+\pi r_2^2=14\pi$,知 $r_1^2+r_1r_2+r_2^2=7$,故 $V_{圆台}=\dfrac{1}{3}h\cdot\pi(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)=\dfrac{1}{3}\times 2\sqrt{2}\pi\times 7=\dfrac{14\sqrt{2}}{3}\pi$.

16. 3 【解析】这一组数据有 1 个 1,2 个 2,3 个 3,…,故出现 n 以前共有数据的个数为 $1+2+\cdots+n-1$,而 $1+2+\cdots+13=91$,$1+2+\cdots+14=105$,故第 100 个数和第 101 个数均为 14,中位数为 14,故②正确;$1+2+3+\cdots+19=190$,$1+2+3+\cdots+20=210$,故最大的数有 10 个,数值为 20,故极差为 $20-1=19$,故①正确;$\dfrac{1}{200}\times(1\times 1+2\times 2+\cdots+19\times 19+10\times 20)=\dfrac{1}{200}\times\left(\dfrac{1}{6}\times 19\times 20\times 39+200\right)=13.35$,故③错误;$S(x)=\sum\limits_{i=1}^{200}(x-x_i)^2=\sum\limits_{i=1}^{200}(x^2-2x_ix+x_i^2)=200x^2-2(x_1+x_2+\cdots+x_{200})x+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{200}^2$,这是关于 x 的二次函数,且开口向上,$x=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{200}}{200}=13.35$ 为二次函数的对称轴,故 $S(13)<S(14)$,故④正确.

故正确结论的个数为 3.

17. 解:(1)由 $a_1=a_2=0$ 得,$a_1+1=1,a_2+2=2$, (1 分)

故等比数列 $\{a_n+n\}$ 的公比为 2, (2 分)

则 $a_n+n=(a_1+1)\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$, (4 分)

故 $a_n=2^{n-1}-n$. (5 分)

(2) $a_1+a_2+\cdots+a_n=(2^0+2^1+\cdots+2^{n-1})-(1+2+\cdots+n)=2^n-1-\dfrac{n(n+1)}{2}$, (7 分)

当 $n=11$ 时,$2^{11}-1-\dfrac{11\times 12}{2}=1\ 981<2\ 024$, (8 分)

当 $n=12$ 时,$2^{12}-1-\dfrac{12\times 13}{2}=4\ 017>2\ 024$, (9 分)

易知当 $n>2$ 时,$a_n>0$,

故满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n<2\ 024$ 的最大整数 n 为 11. (10 分)

18. 解:(1)连接 BD 交 AC 于点 O,连接 B_1O,

因为 $BD_1\perp$ 平面 ACB_1,$B_1O\subset$ 平面 ACB_1,所以 $BD_1\perp B_1O$, (1 分)

故在矩形 BDD_1B_1 中,$\angle D_1BB_1=\angle BOB_1$,又 $\angle B_1BO=\angle D_1B_1B=90°$,

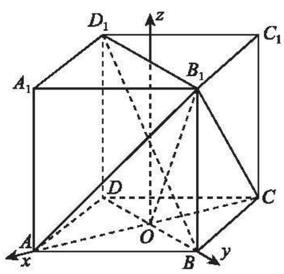
则 $\triangle BOB_1\backsim\triangle B_1BD_1$,则 $\dfrac{B_1D_1}{BB_1}=\dfrac{BB_1}{BO}$. (3 分)

因为四边形 $ABCD$ 是菱形,$AB=2$,$\angle DAB=60°$,

所以 $BD=B_1D_1=2$,$BO=1$, (4 分)

则 $BB_1^2=2$,即 $AA_1=BB_1=\sqrt{2}$. (5 分)

(2)以 O 为原点,$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{AA_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$,



则 $B(0,1,0)$,$C(-\sqrt{3},0,0)$,$B_1(0,1,\sqrt{2})$,$D_1(0,-1,\sqrt{2})$,

则 $\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},-1,0)$,$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,\sqrt{2})$, (6 分)

设平面 BCB_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\sqrt{3}x-y=0,\\ \sqrt{2}z=0,\end{cases}$

官方微信公众号：zizzsw
咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com
微信客服：zizzs2018

取 $x=1$，则 $\boldsymbol{m}=(1,-\sqrt{3},0)$， (8分)

由题意易知 $\overrightarrow{D_1B}$ 为平面 AB_1C 的法向量，$\overrightarrow{D_1B}=(0,2,-\sqrt{2})$， (9分)

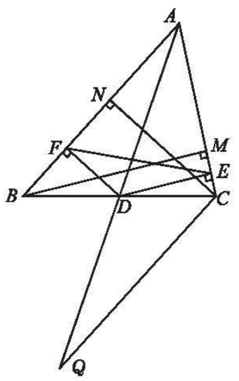
则 $\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{D_1B}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{D_1B}}{|\boldsymbol{m}|\,|\overrightarrow{D_1B}|}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{2\times\sqrt{6}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， (11分)

故 $\sin\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{D_1B}\rangle=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即二面角 $B-B_1C-A$ 的正弦值为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (12分)

19. 解：(1)在四边形 $AFDE$ 中，$\angle BAC=60°$，$\angle DFA=\angle DEA=90°$，故$\angle FDE=120°$， (1分)

故 $S_{\triangle DEF}=\dfrac{1}{2}DE\cdot DF\sin 120°=\dfrac{\sqrt{3}}{4}DE\cdot DF$. (2分)

作 $BM\perp AC$ 于点 M，$CN\perp AB$ 于点 N，



又 D 为 BC 的中点，

则 $DE=\dfrac{1}{2}BM=\dfrac{1}{2}AB\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{4}AB$， (3分)

$DF=\dfrac{1}{2}CN=\dfrac{1}{2}AC\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{4}AC$， (4分)

故 $S_{\triangle DEF}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}AB\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}AC=\dfrac{3}{16}S_{\triangle ABC}=\dfrac{3}{16}\times 10\sqrt{3}=\dfrac{15\sqrt{3}}{8}$. (6分)

(2)设$\triangle ABC$ 的三条边 BC,AC,AB 分别为 a,b,c，由 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin\angle BAC=10\sqrt{3}$，知 $bc=40$， (7分)

延长 AD 到点 Q，使 $AD=DQ$，连接 CQ，则 $AQ=\sqrt{129}$，$\angle ABC=\angle BCQ$，

则在$\triangle AQC$ 中，$\angle ACQ=120°$，$CQ=AB=c$， (8分)

故由 $b^2+c^2+bc=129$ 与 $bc=40$ 可得，

$b^2+c^2-bc=49=a^2$，则 $a=7$， (9分)

$b^2+c^2+2bc=169$，则 $b+c=13$， (10分)

故$\dfrac{b+c}{\sin\angle ABC+\sin\angle ACB}=\dfrac{a}{\sin\angle BAC}=\dfrac{14}{\sqrt{3}}$， (11分)

则 $\sin\angle ABC+\sin\angle ACB=\dfrac{13\sqrt{3}}{14}$. (12分)

20. 解：(1)由题意，可分为两种情况，即分甲连胜两场和前三场甲、乙、丙各胜负一场，第4场甲胜乙：

①甲连胜两场的概率为$\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{6}{25}$； (2分)

②前三场甲、乙、丙各胜负一场，第4场甲胜乙的概率为$\left(\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{5}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{39}{250}$， (4分)

则甲进入正式比赛的概率为$\dfrac{6}{25}+\dfrac{39}{250}=\dfrac{99}{250}$. (6分)

(2)由题意得 X 的可能取值为1，2，且前3场甲、乙、丙各胜一场， (7分)

则 $P(X=1)=\dfrac{2}{5}$，$P(X=2)=\dfrac{3}{5}$， (8分)

则 X 的分布列为

X	1	2
P	$\dfrac{2}{5}$	$\dfrac{3}{5}$

(10分)

则 $E(X)=1\times\dfrac{2}{5}+2\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{8}{5}$. (12分)

21. 解：设 $M(x,y)$，易知 $B(-2,-1)$，由 $k_{MA}\cdot k_{MB}=-\dfrac{1}{2}$，

得$\dfrac{y-1}{x-2}\cdot\dfrac{y+1}{x+2}=-\dfrac{1}{2}$， (2分)

化简得$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$，

故椭圆 C 的标准方程为$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$. (4分)

官方微信公众号：zizzsw
官方网站：www.zizzs.com
咨询热线：010-5601 9830
微信客服：zizzs2018

(2)设 l 的方程为 $y=kx+t(t\neq0)$,设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,将 $y=kx+t$ 代入椭圆方程整理得,

$(1+2k^2)x^2+4ktx+2t^2-6=0$,

$\Delta=8(6k^2-t^2+3)>0$,

$x_1+x_2=-\dfrac{4kt}{1+2k^2},x_1x_2=\dfrac{2t^2-6}{1+2k^2}(t^2\neq3)$,(6 分)

则 $|PQ|=\sqrt{k^2+1}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{k^2+1}\cdot\dfrac{\sqrt{8(3+6k^2-t^2)}}{1+2k^2}$, (7 分)

又原点 O 到 l 的距离为 $d=\dfrac{|t|}{\sqrt{k^2+1}}$, (8 分)

故 $S_{\triangle OPQ}=\dfrac{1}{2}|PQ|\cdot d=$

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{3+6k^2-t^2}\cdot|t|}{1+2k^2}\leqslant$

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{3+6k^2-t^2+t^2}{1+2k^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$,

当且仅当 $\sqrt{3+6k^2-t^2}=|t|$ 时取等号,

此时 $3+6k^2=2t^2(t^2\neq3)$,$\triangle OPQ$ 的面积最大. (9 分)

故 $k_{OP}\cdot k_{OQ}=\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}=\dfrac{(kx_1+t)(kx_2+t)}{x_1x_2}=$

$\dfrac{k^2x_1x_2+kt(x_1+x_2)+t^2}{x_1x_2}=$

$\dfrac{k^2\cdot\dfrac{2t^2-6}{1+2k^2}+kt\cdot\dfrac{-4kt}{1+2k^2}+t^2}{\dfrac{2t^2-6}{1+2k^2}}=$

$\dfrac{k^2(2t^2-6)-4k^2t^2+t^2+2k^2t^2}{2t^2-6}=\dfrac{-6k^2+t^2}{2t^2-6}=$

$\dfrac{-(2t^2-3)+t^2}{2t^2-6}=-\dfrac{1}{2}$. (12 分)

22. 解:(1)易得 $f'(x)=e^x\ln(a+x)+\dfrac{e^x}{a+x}-1$,

由 $f'(0)=0$ 得,$\ln a+\dfrac{1}{a}-1=0$, (1 分)

令 $g(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}-1$,

则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$, (2 分)

当 $0<x<1$ 时,$g'(x)<0$;当 $x>1$ 时,$g'(x)>0$,

故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,

故 $g(x)$ 有最小值 $g(1)=0$,

故 $a=1$. (4 分)

(2)证明:要证当 $x>\ln 4$ 时,$f(x)>x^2$,

即证 $e^x\ln(1+x)>x+x^2$,即证 $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}>\dfrac{x}{e^x}$,

令 $1+x=t$,$e^x=s$,则上式等价于 $\dfrac{\ln t}{t}>\dfrac{\ln s}{s}$, (5 分)

构造函数 $p(x)=\dfrac{\ln x}{x}$,则 $p'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$,(6 分)

故在 $(0,e)$ 上,$p'(x)>0$,$p(x)$ 为增函数;

在 $(e,+\infty)$ 上,$p'(x)<0$,$p(x)$ 为减函数. (7 分)

由 $e>2.7>\dfrac{5}{2}$ 得,$e-1>\dfrac{3}{2}$,故 $e^{e-1}>e^{\frac{3}{2}}>\sqrt{2.7^3}>\sqrt{16}=4$,故 $e-1>\ln 4$. (8 分)

当 $\ln 4<x<e-1$ 时,$t=1+x\in(1+\ln 4,e)$,

$s=e^x\in(4,e^{e-1})$,又 $(4,e^{e-1})\subseteq(e,+\infty)$,

故 $p(s)<p(4)=\dfrac{\ln 4}{4}=\dfrac{\ln 2}{2}=p(2)$, (9 分)

又 $(1,e)$ 是 $p(x)$ 的增区间,而 $2<1+\ln 4<t$,

故 $p(2)<p(t)$,故 $p(t)>p(s)$,

即 $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}>\dfrac{x}{e^x}$. (10 分)

当 $x\geqslant e-1$ 时,$e^x>1+x\geqslant e$,即 $s>t\geqslant e$.

在 $[e,+\infty)$ 上,$p(x)$ 为减函数,故 $p(t)>p(s)$,即 $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}>\dfrac{x}{e^x}$,

故原命题得证. (12 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

自主选拔在线 微信号：zizzsw