湘豫名校联考

2023年5月高三第三次模拟考试

数学(理科)

注意事项:

1. 本试卷共6页。时间120分钟,满分150分。答题前,考生先将自己的姓名、准考证号填写在试卷指定位置,并将姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上,然后认真核对条形码上的信息,并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 作答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。作答非选择题时,将答案写在答题卡上对应的答题区域内。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将试卷和答题卡一并收回。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知全集$U=\{1,2,3,4,5\}$,$\complement_U A=\{2,4\}$,$\complement_U B=\{3,4\}$,则

A. $1\in A,1\notin B$　　B. $2\in A,2\in B$

C. $3\in A,3\notin B$　　D. $5\notin A,5\in B$

2. 已知$i^3=a-bi(a,b\in\mathbf{R})$,则$a+b$的值为

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

3. 已知向量$\boldsymbol{a}=(1,3)$,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-1,7)$,则向量$\boldsymbol{a}$在向量$\boldsymbol{b}$方向上的投影为

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. 5　　D. $2\sqrt{5}$

4. 近年来,电动自行车以其快捷、轻便、经济等优点成为老百姓的代步工具,但随之出现了一系列问题,如违规停放、私拉电线充电、占用安全通道等,给人民安全带来隐患.为进一步规范电动自行车管理,某社区持续开展了两轮电动车安全检查和宣传教育,为了解工作效果,该社区将四名工作人员随机分派到A,B,C三个小区进行抽查,每人被分派到哪个小区互不影响,则三个

小区中恰有一个小区未分配到任何工作人员的概率为

A. $\frac{4}{9}$ B. $\frac{14}{27}$

C. $\frac{5}{9}$ D. $\frac{16}{27}$

5. 若双曲线 C_1 与双曲线 C_2：$\frac{x^2}{7}-y^2=1$ 有相同的焦距，且 C_1 过点(3,1)，则双曲线 C_1 的标准方程为

A. $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}=1$

B. $\frac{y^2}{9-\sqrt{73}}-\frac{x^2}{\sqrt{73}-1}=1$

C. $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}=1$ 或 $\frac{y^2}{9-\sqrt{73}}-\frac{x^2}{\sqrt{73}-1}=1$

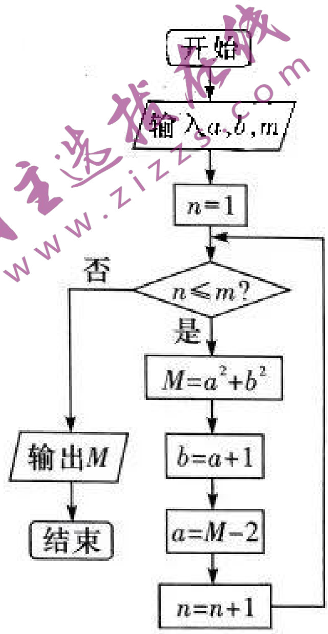
D. $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}=1$ 或 $y^2-\frac{x^2}{3}=1$

6. 已知 $a>0,b>0$，且 $a+b=1$，则下列不等式不正确的是

A. $ab\leqslant\frac{1}{4}$ B. $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b+1}>2$ D. $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant1$

7. 执行如图所示的程序框图，若输入的 a,b,m 的值分别为 1,1,5，则输出的 $M=$



A. 4 B. 5

C. 18 D. 272

8. $\left(\frac{1}{y}+x\right)(x+3y)^6$ 的展开式中 x^4y^3 的系数为

A. 18 B. 135

C. 540 D. 1 215

9. 已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_8=2a_5-2$，$a_3+a_{11}=26$，则数列$\{a_n\cdot\cos n\pi\}$的前 2 022 项的和为

A. 1 010 B. 1 011

C. 2 021 D. 2 022

10. 已知非钝角$\triangle ABC$中，$\angle BAC=60°$，$AB=2$，Q是边BC上的动点. 若$PA\perp$平面ABC，$PA=\sqrt{2}$，且$\triangle PAQ$周长的最小值为$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$，则三棱锥$P-ABC$外接球的体积为

A. $\sqrt{6}\pi$　　B. 6π　　C. $2\sqrt{2}\pi$　　D. 8π

11. 已知抛物线$C:y^2=4x$的焦点为F，准线为l，过点F的直线交抛物线C于A，B两点，过点A作准线l的垂线，垂足为M，点D为准线l与x轴的交点，若$\angle FMD=30°$，则四边形$AMDB$的面积为

A. $\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{20}{3}$　　C. $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$　　D. $\dfrac{16}{3}$

12. 已知$a=\dfrac{1}{1+e^2}$，$b=\dfrac{1}{e}$，$c=\ln\dfrac{1+e^2}{e^2}$，则

A. $a>b>c$　　B. $b>c>a$　　C. $c>b>a$　　D. $b>a>c$

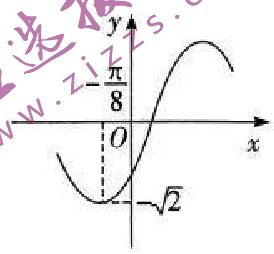
二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 曲线$f(x)=2x^3+4x^2$在点$(1,f(1))$处的切线方程为__________.

14. 已知直线$l:y=x$与圆$C:(x-a)^2+(y-1)^2=r^2$（a为整数，r为正整数）相交于A，B两点，若$|AB|=2\sqrt{2}$，则满足条件的a的值可以为________.（答案不唯一，答出一个即可）

15. 已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$S_5=252$，$8a_7=a_4$，则当$n=$________时，$a_1a_2\cdots a_n$最大.

16. 已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示，同时满足$f\left(\dfrac{3\pi}{4}-x\right)=f(x)$，若函数$g(x)=f(x)-1$在区间$(0,\lambda)$上共有8个零点，则这8个零点之和为________.



三、解答题：共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第22、23题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共60分.

17.（本小题满分12分）

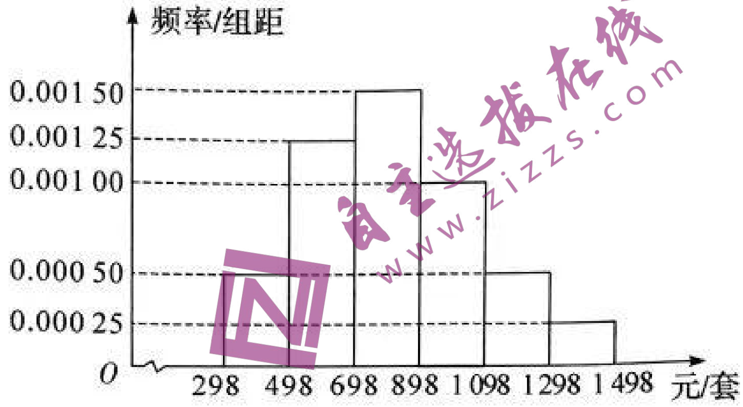
已知a，b，c分别为$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边，且$\sqrt{3}a\sin C+c\cos A=a+b$.

(1)求角C；

(2)若$c=2$，$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$的周长.

18.(本小题满分 12 分)

随着我国居民生活水平的提高和人们对精神生活的追求,如今有越来越多的人养宠物,很多人的朋友圈除了晒美食、晒旅行、晒孩子外,还会晒各自的宠物,宠物也成了很多家庭中的重要角色之一.为记录下宠物可爱、呆萌的瞬间,会有很多人选择去宠物照相馆.为了解顾客的消费需求,某宠物照相馆对近期 200 名客户的宠物拍照信息进行了相关统计,绘制成如图所示的频率分布直方图.若套餐价格(单位:元)在[898,1 498]内的称为“尊享套餐”,在[298,898)内的称为“普通套餐”.



(1)根据统计数据完成以下 2×2 列联表,并判断是否有 99%的把握认为是否选择“尊享套餐”与年龄有关?

	选择“尊享套餐”	选择“普通套餐”	合计
年龄不低于 45 岁	50		
年龄低于 45 岁			80
合计			

(2)把频率当作概率,现从年龄低于 45 岁的所有客户中,随机抽取 3 名客户,记所抽取的 3 名客户中选择“普通套餐”的人数为 ξ,求 ξ 的分布列和数学期望. 来源: 高三答案公众号

参考公式:$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,其中 $n=a+b+c+d$.

参考数据:

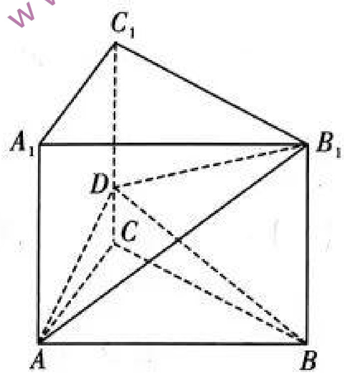
$P(K^2\geq k_0)$	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

19.（本小题满分 12 分）

如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC=2$，$BC=3$，$AB=\sqrt{13}$，D 为 CC_1 上一点，且 $CD:C_1D=4:9$.

(1)证明：平面 $AB_1D\perp$ 平面 ABB_1A_1；

(2)若直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $\frac{39}{2}$，求二面角 $A-B_1D-B$ 的余弦值.



20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的上、下焦点分别为 F_1，F_2，离心率为 $\frac{2}{3}$，过点 F_1 作直线 l（与 y 轴不重合）交椭圆 C 于 M，N 两点，$\triangle MNF_2$ 的周长为 12.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)若点 A 是椭圆 C 的上顶点，设直线 l，AM，AN 的斜率分别为 k，k_1，k_2，当 $k\neq 0$ 时，求证：$\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)$为定值.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=e^x-\sin x-\cos x-\frac{1}{2}ax^2(a\in\mathbf{R})$，$f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数.

(1)若曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(\frac{\pi}{4},f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ 处的切线与直线 $y=(e^{\frac{\pi}{4}}-\pi)x+1$ 平行，求实数 a 的值；

(2)若不等式 $f'(x)\geqslant\ln(1-x)$ 对任意的 $x\in(-\infty,1)$ 恒成立，求实数 a 的值.

(二)选考题：共 10 分. 请考生在 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（本小题满分 10 分）**选修 4－4：坐标系与参数方程**

在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=3-\frac{\sqrt{3}}{2}t,\\ y=\sqrt{3}-\frac{1}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$.

(1)求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程；

(2)若点 P 的极坐标为 $\left(2\sqrt{3},\frac{\pi}{6}\right)$，直线 l 与曲线 C 相交于 A,B 两点，求 $\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}$ 的值.

23.（本小题满分 10 分）**选修 4－5：不等式选讲**

已知函数 $f(x)=|x+4|+|x-2a|$.

(1)当 $a=2$ 时，求不等式 $f(x)\leqslant 13$ 的解集；

(2)若 $f(x)\geqslant a^2+5a$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

湘豫名校联考
2023年5月高三第三次模拟考试
数学(理科)参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	C	B	B	C	D	D	C	D	A	A	B

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. C 【命题意图】本题考查元素与集合的关系，考查数据分析的核心素养.

【解析】因为 $U=\{1,2,3,4,5\}$，$\complement_U A=\{2,4\}$，所以 $A=\{1,3,5\}$. 又 $\complement_U B=\{3,4\}$，所以 $B=\{1,2,5\}$. 所以 $3\in A$，$3\notin B$. 故选 C.

2. C 【命题意图】本题考查复数相等，考查数学运算的核心素养.

【解析】由 $i^3=a-bi(a,b\in\mathbf{R})$，得 $-i=a-bi$. 所以 $a=0$，$b=1$. 所以 $a+b=1$. 故选 C.

3. B 【命题意图】本题考查向量的投影，考查直观想象、数学运算的核心素养.

【解析】由题知，向量 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(-1,7)-(1,3)=(-2,4)$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2+12=10$. 又 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$. 所以向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{10}{2\sqrt{5}}=\sqrt{5}$. 故选 B.

4. B 【命题意图】本题考查排列组合、古典概型，考查逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】依题意，可得三个小区中恰有一个小区未分配到任何工作人员的概率为 $\frac{C_3^1\left(\frac{C_4^2C_2^2}{2}+C_4^1\cdot C_3^3\right)\cdot A_2^2}{3^4}=\frac{3\times(3+4)\times 2}{3^4}=\frac{14}{27}$. 故选 B.

5. C 【命题意图】本题考查双曲线的标准方程，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】设双曲线 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 或 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，因为 C_1 和 C_2 有相同的焦距，双曲线 C_2：$\frac{x^2}{7}-y^2=1$ 的焦距为 $4\sqrt{2}$，所以双曲线 C_1 的焦距 $2c=4\sqrt{2}$. 若 C_1 的焦点在 x 轴上，将点 $(3,1)$ 代入 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，得 $\frac{3^2}{a^2}-\frac{1^2}{b^2}=1$①. 又 $a^2+b^2=c^2=8$②，联立①②两式得 $a^2=6$，$b^2=2$. 所以双曲线 C_1 的标准方程为 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}=1$. 若 C_1 的焦点在 y 轴上，将点 $(3,1)$ 代入 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，得 $\frac{1^2}{a^2}-\frac{3^2}{b^2}=1$③. 又 $a^2+b^2=c^2=8$④，联立③④两式得 $a^2=9-\sqrt{73}$，$b^2=\sqrt{73}-1$，所以双曲线 C_1 的标准方程为 $\frac{y^2}{9-\sqrt{73}}-\frac{x^2}{\sqrt{73}-1}=1$. 综上所述，双曲线 C_1 的标准方程为 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}=1$ 或 $\frac{y^2}{9-\sqrt{73}}-\frac{x^2}{\sqrt{73}-1}=1$. 故选 C.

6. D 【命题意图】本题考查四个平均数的大小关系，基本不等式的性质，考查数学运算的核心素养.

【解析】方法一：$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$（当且仅当 $a=b$ 时取等号），A 正确；易知 $\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，则 $\frac{1}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，即 $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$（当且仅当 $a=b$ 时取等号），B 正确；由题得 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b+1}=\frac{1}{1-b}+\frac{1}{b+1}=\frac{2}{1-b^2}$，$1-b^2\in(0,1)$，故 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b+1}>2$，C 正确；易知 $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a+b}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$，即 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$（当且仅当 $a=b$ 时取等

号).D 错误.故选 D.

方法二(特殊情况):取 $a=b=\frac{1}{2}$,则 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$,故 D 错误.故选 D.

7. D 【命题意图】本题考查程序框图,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】执行程序框图,第一次循环:$1<5$,$M=1^2+1^2=2$,$b=2$,$a=0$,$n=2$;第二次循环:$2<5$,$M=0^2+2^2=4$,$b=1$,$a=2$,$n=3$;第三次循环:$3<5$,$M=2^2+1^2=5$,$b=3$,$a=3$,$n=4$;第四次循环:$4<5$,$M=3^2+3^2=18$,$b=4$,$a=16$,$n=5$;第五次循环:$5=5$,$M=16^2+4^2=272$,$b=17$,$a=270$,$n=6$,此时 $6>5$,退出循环,输出 $M=272$.故选 D.

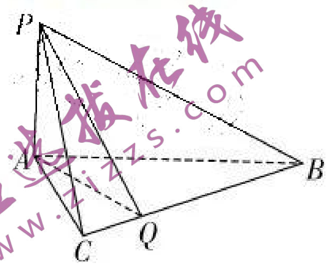
8. C 【命题意图】本题考查二项式定理,考查数学运算的核心素养.

【解析】$\left(\frac{1}{y}+x\right)(x+3y)^6=\frac{1}{y}(x+3y)^6+x(x+3y)^6$.$(x+3y)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^r x^{6-r}(3y)^r=C_6^r 3^r x^{6-r}y^r$.因为 $\frac{1}{y}(x+3y)^6$ 的展开式中没有 x^4y^3 项,$x(x+3y)^6$ 的展开式中 x^4y^3 项为 $x\times C_6^3 3^3 x^3y^3=540x^4y^3$,所以 $\left(\frac{1}{y}+x\right)(x+3y)^6$ 的展开式中 x^4y^3 的系数为 540.故选 C.

9. D 【命题意图】本题考查等差数列的基本运算,数列的前 n 项和,考查数学抽象、逻辑推理和数学运算的核心素养.

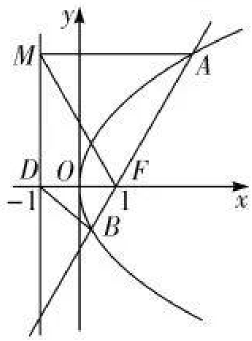
【解析】设等差数列的首项为 a_1,公差为 d,则由 $\begin{cases}a_1+a_8=2a_5-2,\\a_3+a_{11}=26,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a_1+a_1+7d=2(a_1+4d)-2,\\a_1+2d+a_1+10d=26,\end{cases}$ 化简得 $\begin{cases}7d=8d-2,\\2a_1+12d=26,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=1,\\d=2.\end{cases}$ 所以 $a_n=1+(n-1)\times2=2n-1$.设数列 $\{a_n\cdot\cos n\pi\}$ 的前 n 项和为 S_n,则 $S_{2\,022}=-a_1+a_2-a_3+a_4-\cdots-a_{2\,021}+a_{2\,022}=(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{2\,022}-a_{2\,021})=1\,011d=2\,022$.故选 D.

10. A 【命题意图】本题考查三棱锥的外接球的体积,考查直观想象、逻辑推理和数学运算的核心素养.



【解析】在 $\triangle PAQ$ 中,设 $AQ=x$,则 $PQ=\sqrt{x^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{x^2+2}$.所以 $\triangle PAQ$ 的周长为 $\sqrt{2}+x+\sqrt{x^2+2}\geqslant1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$.所以 $\sqrt{x^2+2}\geqslant1+\sqrt{3}-x$,不等式两边平方,得 $x^2+2\geqslant4+2\sqrt{3}-2(1+\sqrt{3})x+x^2$,解得 $x\geqslant1$,即 AQ 的最小值是 1.所以点 A 到边 BC 的距离为 1.当 AQ 取最小值时,因为在 Rt$\triangle ABQ$ 中,$AB=2$,所以 $\angle BAQ=60°$.又 $\angle BAC=60°$,所以 C,Q 两点重合,所以 $\angle ACB=90°$,即 $AC\perp BC$.又 $PA\perp$ 平面 ABC,$BC\subset$ 平面 ABC,所以 $PA\perp BC$.因为 $PA\cap AC=A$,所以 $BC\perp$ 平面 PAC.因为 $PC\subset$ 平面 PAC,所以 $BC\perp PC$.因为 PB 是 Rt$\triangle PAB$ 和 Rt$\triangle PCB$ 的公共斜边,所以 PB 为三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的直径,设外接球的半径为 R,则 $R=\frac{1}{2}PB=\frac{1}{2}\sqrt{PA^2+AB^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{2})^2+2^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,所以三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3=\sqrt{6}\pi$.故选 A.

11. A 【命题意图】本题考查直线与抛物线的位置关系,考查直观想象、数学抽象和逻辑推理的核心素养.



【解析】如图,不妨设点 A 在 x 轴上方,由抛物线的定义可知 $|AF|=|AM|$,因为 $\angle FMD=30°$,所以 $\angle AMF=90°-30°=60°$,所以 $\triangle AMF$ 是正三角形.由 $y^2=4x$ 可知 $F(1,0)$,$D(-1,0)$,设 $A(x_A,y_A)$,$B(x_B,y_B)$,因为 $\angle FMD=30°$,$|DF|=2$,所以 $|DM|=2\sqrt{3}$,$|MF|=|AM|=4$,所以 $x_A=4-1=3$,所以点 A 的坐标为 $(3,2\sqrt{3})$,所

以直线 AB 的方程为 $\frac{y-2\sqrt{3}}{0-2\sqrt{3}}=\frac{x-3}{1-3}$，整理得 $y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$．由 $\begin{cases}y=\sqrt{3}x-\sqrt{3},\\ y^2=4x,\end{cases}$ 得 $3x^2-10x+3=0$，解得 $x_A=3$，$x_B=\frac{1}{3}$．将 $x_B=\frac{1}{3}$ 代入直线 AB 的方程，得 $y_B=\sqrt{3}\times\frac{1}{3}-\sqrt{3}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$．所以点 B 的坐标为 $\left(\frac{1}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$．所以 $S_{四边形AMDB}=S_{四边形AMDF}+S_{\triangle BDF}=\frac{1}{2}\times(2+4)\times2\sqrt{3}+\frac{1}{2}\times2\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{20\sqrt{3}}{3}$．故选 A．

12．B 【命题意图】本题考查通过构造函数，利用导数比较大小，考查数学抽象和逻辑推理的核心素养．

【解析】$a=\frac{1}{1+e^2}=1-\frac{1}{\frac{1}{e^2}+1}$，$b=\frac{1}{e}=\sqrt{\frac{1}{e^2}}$，$c=\ln\frac{1+e^2}{e^2}=\ln\left(\frac{1}{e^2}+1\right)$．令 $f(x)=x-\ln(x+1)$，$0<x<1$，则 $f'(x)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增．所以 $f(x)>f(0)=0$，即 $x>\ln(x+1)$．令 $g(x)=\ln(x+1)-1+\frac{1}{x+1}$，$0<x<1$，则 $g'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增．所以 $g(x)>g(0)=0$，即 $\ln(x+1)>1-\frac{1}{x+1}$．又当 $0<x<1$ 时，$\sqrt{x}>x$，所以当 $0<x<1$ 时，$\sqrt{x}>x>\ln(x+1)>1-\frac{1}{x+1}$．所以当 $x=\frac{1}{e^2}$ 时，$\sqrt{\frac{1}{e^2}}>\frac{1}{e^2}>\ln\left(\frac{1}{e^2}+1\right)>1-\frac{1}{\frac{1}{e^2}+1}$，即 $b>c>a$．故选 B．

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13．$14x-y-8=0$ 【命题意图】本题考查导数的几何意义，考查逻辑推理和数学运算的核心素养．

【解析】由题得 $f'(x)=6x^2+8x$，所以曲线 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率为 $f'(1)=14$．又 $f(1)=6$，所以曲线 $f(x)=2x^3+4x^2$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-6=14\times(x-1)$，即 $14x-y-8=0$．

14．3（答案不唯一，答对即可得分） 【命题意图】本题考查直线与圆的位置关系，考查逻辑推理、直观想象、数学运算的核心素养．

【解析】因为圆心 $C(a,1)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{|a-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|a-1|}{\sqrt{2}}$，所以 $r=\sqrt{d^2+\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{|a-1|}{\sqrt{2}}\right)^2+(\sqrt{2})^2}$，即 $r^2=\frac{|a-1|^2}{2}+2$．由题意，得 $\frac{|a-1|^2}{2}$ 必为整数，且 $0<\frac{|a-1|}{\sqrt{2}}<r$，所以可取 $a=-1$ 或 $a=3$，此时 $r=2$．因此 a 的值可以取 3．

15．7 或 8（只答一个不得分） 【命题意图】本题考查等比数列的基本运算，考查逻辑推理和数学运算的核心素养．

【解析】由题可知 $a_4\neq0$，因为 $8a_7=a_4$，所以 $q^3=\frac{a_7}{a_4}=\frac{1}{8}$，解得 $q=\frac{1}{2}$．又 $S_6=252$，所以 $\frac{a_1\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right]}{1-\frac{1}{2}}=252$，解得 $a_1=128$．所以 $a_n=128\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$．令 $a_n=128\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\leqslant1$，得 $n\geqslant8$．又 $a_8=128\times\left(\frac{1}{2}\right)^7=1$，所以当 $n=7$ 或 8 时，$a_1a_2\cdots a_n$ 最大．

16．15π 【命题意图】本题考查正弦函数的图象与性质，考查逻辑推理、直观想象、数学运算的核心素养．

【解析】由题图知 $A=\sqrt{2}$．由 $f\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)=f(x)$ 知，函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{3\pi}{8}$ 对称．则由图象可知 $\frac{3\pi}{8}-\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{K}{2}T(K\in\mathbf{N}^*)$，解得 $T=\frac{\pi}{K}(K\in\mathbf{N}^*)$．又 $\frac{\pi}{8}<\frac{T}{4}$，所以 $T>\frac{\pi}{2}$．所以 $K=1$，最小正周期 $T=\pi$．所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$．所以 $f(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\varphi)$．因为函数 $f(x)$ 的图象经过点 $\left(-\frac{\pi}{8},-\sqrt{2}\right)$，所以 $f\left(-\frac{\pi}{8}\right)=$

$\sqrt{2}\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=-\sqrt{2}$，解得 $\varphi=-\frac{\pi}{4}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$. 又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$，所以 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$. 设方程 $f(x)=1$ 在 $(0,\lambda)$ 上的 8 个根从小到大依次为 $x_1,x_2,\cdots,x_8$. 令 $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，则 $x=\frac{3\pi}{8}$. 根据 $f(x)$ 的图象的对称性，可得 $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3\pi}{8}$. 由 $f(x)$ 的周期性可得 $\frac{x_3+x_4}{2}=\frac{3\pi}{8}+T=\frac{11\pi}{8}$，$\frac{x_5+x_6}{2}=\frac{3\pi}{8}+2T=\frac{19\pi}{8}$，$\frac{x_7+x_8}{2}=\frac{3\pi}{8}+3T=\frac{27\pi}{8}$，所以 $\sum_{i=1}^{8}x_i=2\times\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{11\pi}{8}+\frac{19\pi}{8}+\frac{27\pi}{8}\right)=15\pi$.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17.【命题意图】本题考查解三角形，三角形的面积与周长，考查逻辑推理和数学运算的核心素养.

【解析】(1)因为 $\sqrt{3}a\sin C+c\cos A=a+b$，所以由正弦定理得 $\sqrt{3}\sin A\sin C+\sin C\cos A=\sin A+\sin B$. ……………… 1 分

因为 $B=\pi-A-C$，所以 $\sin B=\sin(\pi-A-C)=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

所以 $\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin A\cos C+\sin A$. ……………… 3 分

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $\sin A\neq0$，所以 $\sqrt{3}\sin C=\cos C+1$，即 $\sqrt{3}\sin C-\cos C=1$. ……………… 4 分

所以 $2\sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)=1$，即 $\sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$. ……………… 5 分

又 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$. ……………… 6 分

(2)因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$，所以 $\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{3}$.

由(1)知 $C=\frac{\pi}{3}$，所以 $ab=4$ ①. ……………… 8 分

由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

又 $c=2$，所以 $a^2+b^2=8$ ②. ……………… 10 分

由①②解得 $a=b=2$. ……………… 11 分

故 $\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=6$. ……………… 12 分

18.【命题意图】本题考查独立性检验思想、离散型随机变量的分布列与数学期望，考查逻辑推理、数学运算、数据分析的核心素养.

【解析】(1)因为套餐价格在[898,1 498]内的频率为 $(0.001\ 00+0.000\ 50+0.000\ 25)\times200=0.35$，

所以选择“尊享套餐”的客户有 $0.35\times200=70$(名). ……………… 2 分

完善 2×2 列联表如下：来源：高三答案公众号

	选择“尊享套餐”	选择“普通套餐”	合计
年龄不低于 45 岁	50	70	120
年龄低于 45 岁	20	60	80
合计	70	130	200

K^2 的观测值 $k=\frac{200\times(50\times60-70\times20)^2}{120\times80\times70\times130}\approx5.861<6.635$. ……………… 4 分

所以没有 99% 的把握认为是否选择“尊享套餐”与年龄有关. ……………… 5 分

(2)由题设，年龄低于45岁的所有客户中，估计选择“普通套餐”的概率为$\frac{60}{80}=\frac{3}{4}$，…………………… 6分

易知$\xi\sim B\left(3,\frac{3}{4}\right)$．…………………………………………………………………………………… 7分

所以$P(\xi=0)=C_3^0\times\left(\frac{3}{4}\right)^0\times\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$，$P(\xi=1)=C_3^1\times\left(\frac{3}{4}\right)^1\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{9}{64}$，

$P(\xi=2)=C_3^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^1=\frac{27}{64}$，$P(\xi=3)=C_3^3\times\left(\frac{3}{4}\right)^3\times\left(\frac{1}{4}\right)^0=\frac{27}{64}$，…………………… 9分

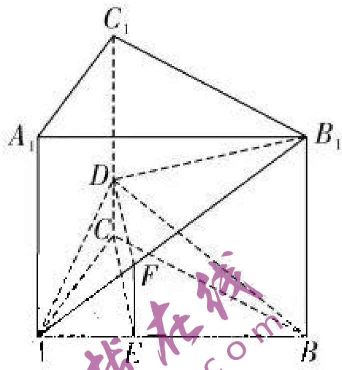
所以ξ的分布列为来源：高三答案公众号

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

…………………………………………………………………………………………………… 10分

所以$E(\xi)=3\times\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$．…………………………………………………………………………… 12分

19.【命题意图】本题考查面面垂直的证明、三棱柱的体积、二面角等，考查直观想象、逻辑推理和数学运算的核心素养．



【解析】(1)方法一(几何法)：如图，作$CE\perp AB$于点E，$EF\parallel BB_1$交AB_1于点F，连接DF．

因为$AC=2$，$BC=3$，$AB=\sqrt{13}$，

所以$AC^2+BC^2=2^2+3^2=(\sqrt{13})^2=AB^2$．

所以$AC\perp BC$．…………………………………………………………………… 1分

所以$CE=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{2\times3}{\sqrt{13}}=\frac{6\sqrt{13}}{13}$．

由勾股定理得$AE=\sqrt{AC^2-CE^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{6\sqrt{13}}{13}\right)^2}=\frac{4\sqrt{13}}{13}$，

所以$\frac{EF}{BB_1}=\frac{AE}{AB}=\frac{\frac{4\sqrt{13}}{13}}{\sqrt{13}}=\frac{4}{13}=\frac{CD}{CC_1}$，所以$EF=CD$．…………………………………… 3分

又$EF\parallel BB_1$，$CD\parallel BB_1$，所以$EF\parallel CD$．

所以四边形$EFDC$是平行四边形，所以$DF\parallel CE$．…………………………………………………… 4分

因为平面$ABC\perp$平面ABB_1A_1，平面$ABC\cap$平面$ABB_1A_1=AB$，$CE\perp AB$，

所以$CE\perp$平面ABB_1A_1．…………………………………………………………………………… 5分

所以$DF\perp$平面ABB_1A_1．

又$DF\subset$平面AB_1D，所以平面$AB_1D\perp$平面ABB_1A_1．…………………………………………… 6分

方法二(向量法)：因为$AC=2$，$BC=3$，$AB=\sqrt{13}$，

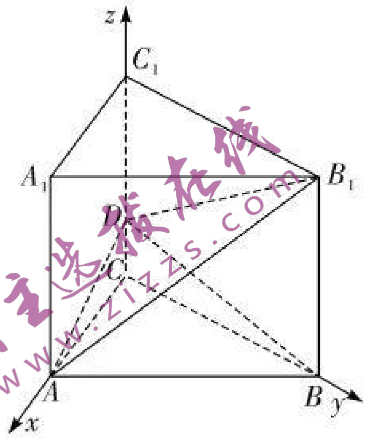
所以$AC^2+BC^2=2^2+3^2=(\sqrt{13})^2=AB^2$．

所以$AC\perp BC$．…………………………………………………………………………………………… 1分

由题知$CC_1\perp$平面ABC，又$AC\subset$平面ABC，$BC\subset$平面ABC，所以$CC_1\perp AC$，$CC_1\perp BC$．

以点C为原点，以CA，CB，CC_1所在直线分别为x轴、y轴、z轴建立如图所示的空间直角坐标系，

设$CC_1=a(a>0)$，则$A(2,0,0)$，$A_1(2,0,a)$，$B_1(0,3,a)$，$D\left(0,0,\frac{4a}{13}\right)$．



所以 $\overrightarrow{AB_1}=(-2,3,a)$，$\overrightarrow{AD}=\left(-2,0,\frac{4a}{13}\right)$，$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,a)$． ……… 2 分

设平面 AB_1D 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB_1}=-2x+3y+az=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=-2x+\frac{4az}{13}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{2az}{13},\\ y=-\frac{3az}{13}.\end{cases}$

令 $z=13$，得平面 AB_1D 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(2a,-3a,13)$． ……… 3 分

设平面 ABB_1A_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x',y',z')$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=-2x'+3y'+az'=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AA_1}=az'=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}y'=\frac{2}{3}x',\\ z'=0.\end{cases}$

令 $x'=3$，得平面 ABB_1A_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(3,2,0)$． ……………………………… 4 分

因为 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=6a-6a+0=0$，

所以 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$． ……………………………… 5 分

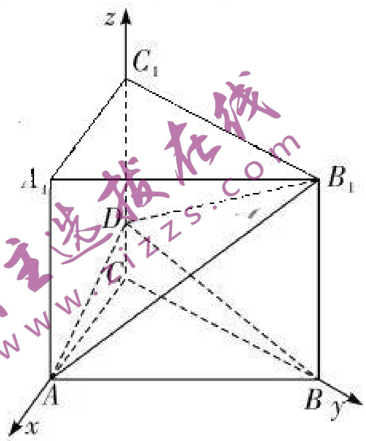
所以平面 $AB_1D\perp$ 平面 ABB_1A_1． ……………………………… 6 分

(2)因为直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $\frac{39}{2}$，所以 $\frac{1}{2}\times2\times3\times CC_1=\frac{39}{2}$，解得 $CC_1=\frac{13}{2}$．

所以 $CD=2$，$C_1D=\frac{9}{2}$． ……………………………… 7 分

由题知 $CC_1\perp$ 平面 ABC，又 $AC\subset$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，所以 $CC_1\perp AC$，$CC_1\perp BC$．

以点 C 为原点，以 CA、CB、CC_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(2,0,0)$，$B_1\left(0,3,\frac{13}{2}\right)$，$D(0,0,2)$．

所以 $\overrightarrow{AB_1}=\left(-2,3,\frac{13}{2}\right)$，$\overrightarrow{AD}=(-2,0,2)$． ……………………… 8 分

设平面 AB_1D 的法向量为 $\boldsymbol{u}=(x_1,y_1,z_1)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{u}\cdot\overrightarrow{AB_1}=-2x_1+3y_1+\frac{13}{2}z_1=0,\\ \boldsymbol{u}\cdot\overrightarrow{AD}=-2x_1+2z_1=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}y_1=-\frac{3}{2}z_1,\\ x_1=z_1.\end{cases}$

令 $z_1=2$，得平面 AB_1D 的一个法向量为 $\boldsymbol{u}=(2,-3,2)$． ……………… 9 分

易知平面 BB_1D 的一个法向量为 $\boldsymbol{v}=(1,0,0)$， ……………… 10 分

设二面角 $A-B_1D-B$ 的大小为 θ，则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}=\frac{(2,-3,2)\cdot(1,0,0)}{\sqrt{17}\times1}=$

$\frac{2\sqrt{17}}{17}$．

易知 θ 为锐角，

所以二面角 $A-B_1D-B$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{17}}{17}$． ……………………………… 12 分

20.【命题意图】本题考查椭圆的标准方程、直线与椭圆的位置关系、三角形的周长等，考查直观想象和数学运算的核心素养．

【解析】(1)依题意，$\triangle MNF_2$ 的周长为 $|MF_2|+|MN|+|NF_2|=|MF_1|+|MF_2|+|NF_1|+|NF_2|=4a=12$，

解得 $a=3$． ……………………………… 1 分

设椭圆 C 的半焦距为 c，

因为椭圆 C 的离心率为 $\frac{2}{3}$，

所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$，即 $\frac{c}{3}=\frac{2}{3}$，解得 $c=2$. ………………………………………… 2 分

因为 $a^2=b^2+c^2$，

所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$. ………………………………………… 3 分

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{5}=1$. ………………………………………… 4 分

(2)由(1)知，$F_1(0,2)$，$A(0,3)$. 易知直线 l 的方程为 $y=kx+2(k\neq0)$. ………………………… 5 分

由 $\begin{cases} y=kx+2, \\ \frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{5}=1, \end{cases}$ 消去 y 得 $(5k^2+9)x^2+20kx-25=0$，$\Delta>0$. ………………………… 6 分

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{20k}{5k^2+9}$，$x_1x_2=-\frac{25}{5k^2+9}$. ………………………… 7 分

所以 $k_1=\frac{y_1-3}{x_1}=\frac{kx_1+2-3}{x_1}=\frac{kx_1-1}{x_1}$，$k_2=\frac{y_2-3}{x_2}=\frac{kx_2+2-3}{x_2}=\frac{kx_2-1}{x_2}$. ………………………… 8 分

所以 $k_1+k_2=k-\frac{1}{x_1}+k-\frac{1}{x_2}=2k-\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{6}{5}k$.

$k_1\cdot k_2=\left(k-\frac{1}{x_1}\right)\cdot\left(k-\frac{1}{x_2}\right)=k^2-k\times\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_2}=-\frac{9}{25}$.

所以 $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\frac{k_1+k_2}{k_1\cdot k_2}=-\frac{10}{3}k$. ………………………………………… 11 分

所以 $\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)=-\frac{10}{3}$，为定值. ………………………………………… 12 分

21.**【命题意图】**本题考查导数的几何意义，考查利用导数解决不等式恒成立问题，考查逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】(1)由 $f(x)=e^x-\sin x-\cos x-\frac{1}{2}ax^2$，得 $f'(x)=e^x-\cos x+\sin x-ax$. ………………………… 1 分

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(\frac{\pi}{4},f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ 处的切线的斜率为 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{\frac{\pi}{4}}-\frac{\pi}{4}a$. ………………………… 2 分

所以 $e^{\frac{\pi}{4}}-\frac{\pi}{4}a=e^{\frac{\pi}{4}}-\pi$，解得 $a=4$. ………………………………………… 4 分

(2)由(1)知，$f'(x)=e^x-\cos x+\sin x-ax$，

所以不等式 $f'(x)\geqslant\ln(1-x)$，即 $e^x-\cos x+\sin x-ax-\ln(1-x)\geqslant0$ 对任意 $x\in(-\infty,1)$ 恒成立.

………………………………………………………………………… 5 分

令 $g(x)=e^x+\sin x-\cos x-ax-\ln(1-x)(x<1)$，

则 $g'(x)=e^x+\cos x+\sin x-a+\frac{1}{1-x}$. ………………………………………… 6 分

因为 $g(x)\geqslant0$，$g(0)=0$，

所以 $\forall x\in(-\infty,1)$，$g(x)\geqslant g(0)$，即 $g(0)$ 为 $g(x)$ 的最小值，$x=0$ 为 $g(x)$ 的一个极小值点.

所以 $g'(0)=e^0+\cos 0+\sin 0-a+\frac{1}{1-0}=0$，解得 $a=3$. ………………………………………… 7 分

当 $a=3$ 时，$g(x)=e^x+\sin x-\cos x-3x-\ln(1-x)(x<1)$，

所以 $g'(x)=e^x+\cos x+\sin x-3+\frac{1}{1-x}=e^x+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-3+\frac{1}{1-x}$. ………………………… 8 分

令 $\varphi(x)=e^x+\frac{1}{1-x}-3, h(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，易知 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增.

① 当 $0\leqslant x<1$ 时，$[\varphi(x)]_{\min}=\varphi(0)=-1, [h(x)]_{\min}=h(0)=1$，

所以 $g'(x)\geqslant g'(0)=0$（当且仅当 $x=0$ 时等号成立），所以 $g(x)$ 在 $[0,1)$ 上单调递增.

…………………………………………………………………………………… 9 分

② 当 $x<0$ 时，若 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x<0$，则 $\varphi(x)<\varphi(0), h(x)<h(0)$，

所以 $g'(x)<g'(0)=0$；

若 $x<-\frac{\pi}{2}$，则 $\varphi(x)<\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}+\frac{2}{\pi+2}-3, h(x)\leqslant\sqrt{2}$，

所以 $g'(x)<e^{-\frac{\pi}{2}}+\sqrt{2}-3+\frac{2}{\pi+2}<\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-3+\frac{2}{\pi+2}<0$.

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减. …………………………………………………… 11 分

综上所述，$g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $[0,1)$ 上单调递增.

所以当 $a=3$ 时，$g(x)\geqslant g(0)=0$. …………………………………………………… 12 分

(二)选考题:共 10 分. 请考生在 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.【命题意图】本题考查极坐标与参数方程，考查直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】(1) 因为直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=3-\frac{\sqrt{3}}{2}t,\\ y=\sqrt{3}-\frac{1}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），

所以消去参数 t 可得直线 l 的普通方程为 $x-\sqrt{3}y=0$. ………………………………… 2 分

因为曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$，即 $\rho=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$.

所以 $\rho^2=\sqrt{3}\rho\sin\theta+\rho\cos\theta$.

由 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\end{cases}$ 得 $x^2+y^2-x-\sqrt{3}y=0$.

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-x-\sqrt{3}y=0$. ……………………………………… 4 分

(2) 因为点 P 的极坐标为 $\left(2\sqrt{3},\frac{\pi}{6}\right)$，

所以点 P 的直角坐标为 $(3,\sqrt{3})$.

易得点 P 在直线 l 上，

将直线 l 的参数方程 $\begin{cases}x=3-\frac{\sqrt{3}}{2}t,\\ y=\sqrt{3}-\frac{1}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）代入 $x^2+y^2-x-\sqrt{3}y=0$， …………………… 6 分

化简得 $t^2-3\sqrt{3}t+6=0, \Delta>0$，

设 A,B 两点所对应的参数分别为 t_1,t_2，则 $t_1+t_2=3\sqrt{3}, t_1t_2=6$， ………………………… 8 分

所以 $t_1>0, t_2>0$.

所以 $\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{1}{|t_1|}+\frac{1}{|t_2|}=\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{t_1+t_2}{t_1t_2}=\frac{3\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ………………………… 10 分

23.【命题意图】本题考查绝对值不等式的求解，绝对值不等式恒成立问题，考查逻辑推理和数学运算的核心素养.

【解析】(1)当 $a=2$ 时，$f(x)=|x+4|+|x-4|$，…… 1 分

不等式 $f(x)\leqslant 13$，即为 $|x+4|+|x-4|\leqslant 13$.

则 $\begin{cases}x\leqslant -4,\\ -(x+4)-(x-4)\leqslant 13,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-4<x<4,\\ (x+4)-(x-4)\leqslant 13,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geqslant 4,\\ (x+4)+(x-4)\leqslant 13.\end{cases}$ …… 3 分

解得 $-\frac{13}{2}\leqslant x\leqslant -4$ 或 $-4<x<4$ 或 $4\leqslant x\leqslant \frac{13}{2}$. …… 4 分

故不等式 $f(x)\leqslant 13$ 的解集为 $\left[-\frac{13}{2},\frac{13}{2}\right]$. …… 5 分

(2) $f(x)=|x+4|+|x-2a|\geqslant |x+4-(x-2a)|=|2a+4|$（当且仅当 $(x+4)(x-2a)\leqslant 0$ 时等号成立）

…… 6 分

因为 $f(x)\geqslant a^2+5a$ 恒成立，所以 $|2a+4|\geqslant a^2+5a$. …… 7 分

所以 $2a+4\geqslant a^2+5a$①或 $2a+4\leqslant -(a^2+5a)$②. …… 8 分

由①解得 $-4\leqslant a\leqslant 1$，由②解得 $\frac{-7-\sqrt{33}}{2}\leqslant a\leqslant \frac{-7+\sqrt{33}}{2}$. …… 9 分

综上所述，$\frac{-7-\sqrt{33}}{2}\leqslant a\leqslant 1$，故实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{-7-\sqrt{33}}{2},1\right]$. ……