实验中学得分三数学答案。23年5月

一．单选题

1.

【答案】A

【分析】利用定义写出命题的否定即可.

【详解】命题$\forall x\in R, x-|x|\geq 0$的否定是$\exists x\in R, x-|x|<0$

故选：A

2.

【答案】B

【分析】求解分式不等式化简集合A，根据对数函数的性质化简集合B，再由数轴法得出$(\complement_R A)\cap B$.

【详解】因为$\dfrac{2x-5}{x-7}\leq 0$，所以$(2x-5)(x-7)\leq 0$且$x\neq 7$，解得$\dfrac{5}{2}\leq x<7$，

所以$A=\left\{x\left|\dfrac{2x-5}{x-7}\leq 0\right.\right\}=\left\{x\left|\dfrac{5}{2}\leq x<7\right.\right\}$，所以$\complement_R A=\left\{x\left|x<\dfrac{5}{2}或x\geq 7\right.\right\}$.

又因为$\lg(x-1)\leq 1$，所以$\begin{cases}x-1>0\\x-1\leq 10\end{cases}$，解得$1<x\leq 11$，

所以$B=\{x|\lg(x-1)\leq 1\}=\{x|1<x\leq 11\}$，

所以$(\complement_R A)\cap B=\left\{x\left|1<x<\dfrac{5}{2}或7\leq x\leq 11\right.\right\}$.

故选：B.

3.

【答案】B

【分析】求出基本事件总数， 再求出和为奇数事件所包含的基本事件个数，根据古典概型求解.

【详解】不超过17的质数有：2，3，5，7，11，13，17，共7个，

随机选取两个不同的数，基本事件总数$n=C_7^2=21$，

其和为奇数包含的基本事件有：$(2,3),(2,5),(2,7),(2,11),(2,13),(2,17)$，共6个，

所以$P=\dfrac{6}{21}=\dfrac{2}{7}$.

故选：B

4.

【答案】D

【分析】先求出 $\sin\theta,\cos\theta$ 的值，再对四个选项一一验证即可得解.

【详解】$\theta\in(0,\pi)$，由 $\begin{cases}\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{5}\\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1\end{cases}$，解得 $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，

$\theta\in(0,\pi)$ 且 $\sin\theta>\cos\theta>0$，有 $\theta\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$，A 选项正确；

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\dfrac{4}{3}$，B 选项正确；

$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{24}{25}$，C 选项正确；

$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=-\dfrac{7}{25}$，D 选项错误.

故选：D

5.

【答案】B.

【详解】圆 C：$(x-3)^2+(y-4)^2=1$ 的圆心 C（3，4），半径 $r=1$，

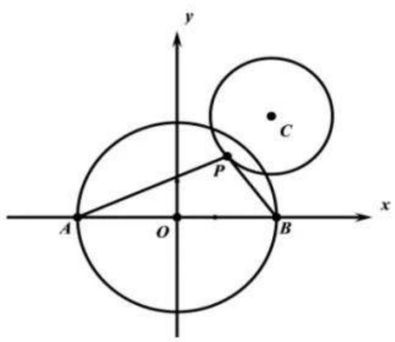
∵圆 C 上至少存在一点 P，使得 $\angle APB>90^\circ$，

∴圆 C：$(x-3)^2+(y-4)^2=1$ 与圆 O：$x^2+y^2=a^2$ 位置关系为相交,内切或内含,如图所示,则

$|OC|<r+R$，

∴ a+1>5∴ a>4.

故选:B.



【点睛】本题考查参数取值范围问题,通过数形结合转化为圆与圆的位置关系,考查学生分析问题的能力,属于中档题,解题时要认真审题,注意圆的性质的合理运用.

6.

答案：D

解析：$xf'(x)+f(x)=\frac{1}{x}=(\ln x+c)'=[xf(x)]'$

$f(x)=\frac{\ln x}{x}+c, f(1)=0, c=0$

$f(x)>0, 2^x-3>1, x>2$

7.

【答案】A

【详解】设双曲线 C 的焦距为 2c，由 $PF_1\perp PF_2$ 可得 $\tan\angle PF_1F_2=\frac{1}{3}$,

所以 $\tan\angle POF_2=\frac{2\times\frac{1}{3}}{1-(\frac{1}{3})^2}=\frac{3}{4}$，即$\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$

所以 $e=\sqrt{1+\frac{9}{16}}=\frac{5}{4}$.

故选:A.

8.

答案：C

解析：设 $f(x)=\ln x-2mx-n$，$f'(x)=\frac{1}{x}-2m$,由题 m>0

$f(x)_{\max}=f(\frac{1}{2m})\le 0$ 则 $n\ge -1-\ln 2m$，$\frac{n}{m}\ge(\frac{-1-\ln 2m}{m})_{\min}$

令$g(m)=\frac{-1-\ln 2m}{m}$ 求$g'(m)$可知 $g(m)_{\min}=g(\frac{1}{2})$

二．多选题

9.

【答案】BC

【详解】

(1)由题意，知$a\cap b=O$，可得$O\in a$，$O\in b$，因为$\alpha\cap\beta=a$，可得$O\in\beta$，
又由$\alpha\cap\gamma=b$，可得$O\in\gamma$，所以O为β与γ的公共点.
又$\beta\cap\gamma=c$，所以$O\in c$，所以a,b,c三线共点.
(2)由题意，因为$a//b,b\not\subset\beta,\alpha\subset\beta$，所以$b//\beta$，
因为$c\subset\beta,\gamma\cap\beta=c,b\subset\gamma$，所以$b//c$，同理可证$a//c$.
所以$a//b//c$.

10.

【答案】BCD

【分析】由特殊值否定选项 A，利用复数模的性质证得选项 BD，可证选项 C.

【详解】对于 A：当$z_1=1,z_2=\mathrm{i}$时，满足$|z_1|=|z_2|$，此时$z_1^2=1$，$z_2^2=-1$，$z_1^2\neq z_2^2$，A 选项错误；

对于 B：若$z_1z_2=0$，则$|z_1z_2|=|z_1||z_2|=0$，所以$|z_1|=0$或$|z_2|=0$至少有一个成立，即$z_1=0$或$z_2=0$，B 选项正确；

对于 C，由$z_1z_2=z_1z_3$，则$z_1(z_2-z_3)=0$，$\because z_1\neq 0$，$\therefore z_2=z_3$，C 选项正确；

对于 D，若$\overline{z_2}=z_3$，则$|z_2|=|z_3|$，由复数模的性质可得，$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$，$|z_1z_3|=|z_1||z_3|$，所以$|z_1z_2|=|z_1z_3|$，D 选项正确.

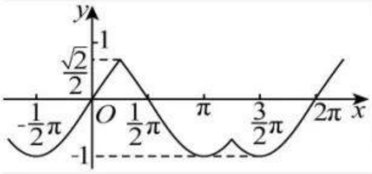
故选：BCD

11.

【答案】BD

【分析】先对$f(x)$化简，然后作出$f(x)$的图像如图所示，利用函数的图像逐个分析判断即可

【详解】因为$f(x)=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)-\frac{1}{2}|\sin x-\cos x|=\begin{cases}\cos x, & \sin x\geq\cos x\\ \sin x, & \sin x<\cos x\end{cases}$，作出函数$f(x)$的图象，如图所示：



所以，$f(x)$ 的值域为 $\left[-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$，A 错误；

函数 $f(x)$ 的最小正周期是 2π，C 错误；

当且仅当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in Z)$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值，B 正确；

D 正确.

故选：BD.

12.
答案：AC

解析：$e^{a-c}+e^{\ln b+c+1}\le a-c+c+\ln b+3$，由于 $e^t\ge t+1$ 当且仅当 t=0 取等，则 $a-c=0,\ln b+c+1=0$ 故 $\ln b=-1-c,b>0$，$b=e^{-1-c}$ 代入选项即可

三．填空题

13.

【答案】17.5/$\frac{35}{2}$

【分析】根据第三四分位数的计算方法计算即可.

【详解】由题意，数据的总体的第三四分位数即第 75 百分位数，又样本数据有 8 个，

所以第三四分位数为 $\frac{15+20}{2}=17.5$.

故答案为：17.5.

14.

【答案】$2\sqrt{2}$.

【详解】

设 P 点坐标为 P（x，y），则 Q（-1，y），又由 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CQ}=0$，知-4x+y²=0，所以 $y^2=4x$，所以 P 点是抛物线 $y^2=4x$ 上的点；

设 $P\left(\frac{y_0^2}{4},y_0\right)$，则 $|PC|=\sqrt{(\frac{y_0^2}{4}-3)^2+y_0^2}=\sqrt{\frac{1}{16}(y_0^2-4)^2+8}$，

所以当 $y_0^2=4$ 时，$|PC|$ 取最小值，

此时 $|PC|_{min}=\sqrt{8}$.

15.

【答案】6

【分析】取线段 PF_2 的中点 N，根据 $\overrightarrow{MF_1}+2\overrightarrow{MF_2}+2\overrightarrow{MP}=\vec{0}$ 可得 $\overrightarrow{MF_1}=-4\overrightarrow{MN}$，由 M 是 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆的圆心，所以 MF_1,MP 分别为 $\angle PF_1F_2,\angle FP_1F_2$ 的角平分线，根据角平分线性质及 $\overrightarrow{MF_1}=-4\overrightarrow{MN}$ 可得 $\triangle PF_1F_2$ 中三边的比例关系，再根据椭圆的定义即可得离心率，再根据 $b=\sqrt{5}$，即可得 a,c，根据椭圆的对称性可知 $|F_1B|=|F_2A|$，即可得 $|F_1A|+|F_1B|$ 的值.

【详解】解：设内切圆半径为 r，取线段 PF_2 的中点 N，

因为 $\overrightarrow{MF_1}+2\overrightarrow{MF_2}+2\overrightarrow{MP}=\vec{0}$，即 $\overrightarrow{MF_1}=-2\left(\overrightarrow{MF_2}+\overrightarrow{MP}\right)$，

所以 $\overrightarrow{MF_1}=-4\overrightarrow{MN}$，则 M,F_1,N 三点共线，

因为 M 是 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆的圆心，

所以 MF_1,MP 分别为 $\angle PF_1F_2,\angle FP_1F_2$ 的角平分线，

所以 $\dfrac{|PF_1|}{|PN|}=\dfrac{|F_1F_2|}{|F_2N|}=\dfrac{|F_1M|}{|MN|}=4$，即 $|PF_1|=|F_1F_2|=2|PF_2|$，

故 $e=\dfrac{|F_1F_2|}{|PF_1|+|PF_2|}=\dfrac{2|PF_2|}{2|PF_2|+|PF_2|}=\dfrac{2}{3}=\dfrac{c}{a}$.

又有 $b=\sqrt{5}$，所以 $a=3,c=2$，由椭圆对称性有 $|F_1B|=|F_2A|$，

所以 $|F_1A|+|F_1B|=|F_1A|+|F_2A|=2a=6$.

故答案为：6

16.

【答案】$\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{40\pi}{3}$.

【详解】

由二面角的平面角的定义，$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{BD}$的夹角就是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角，

由$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$，知，$(\overrightarrow{CD})^2=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})^2$，即 $11=4+4+9+0+0+2\cdot\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}$，

化简得$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=3$，即 $2\cdot 3\cos<\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}>=3$，

所以 $\cos<\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}>=\frac{1}{2}$，即二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$.

三棱锥 ABCD 的外接球可以补形为直三棱柱的外接球，不难算出表面积为 $\frac{40\pi}{3}$.

三、解答题

17. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 S_n，已知 $a_1=1$，$a_2=3$，当 $n\geq 2$ 时，$S_{n+1}+S_{n-1}=2S_n+n+1$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n；

(2)设 $b_n=(-1)^n\cdot a_n$，求 $\{b_n\}$ 的前 $2m(m\in\mathbf{N}^*)$ 项和 T_{2m}.

【答案】(1) $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

(2) $T_{2m}=m(m+1)$

【详解】（1）解：当 $n\geq 2$ 时，由 $S_{n+1}+S_{n-1}=2S_n+n+1$ 可得 $S_{n+1}-S_n=S_n-S_{n-1}+n+1$，

即 $a_{n+1}=a_n+n+1$，因为 $a_1=1$，$a_2=3$，所以 $n=1$ 时也满足 $a_{n+1}=a_n+n+1$，

当 $n\geq 2$ 时，$a_n-a_{n-1}=n$，……………………2 分

所以，$a_n=a_1+(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，……………4 分

当 $n=1$ 时，$a_1=1$，也满足上式，所以 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$……………6 分（没有验证首项扣 1 分）

（2）解：$b_n=(-1)^n\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}$，…………7 分

对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，$b_{2n-1}+b_{2n}=-\dfrac{2n(2n-1)}{2}+\dfrac{2n(2n+1)}{2}=2n$，……………8 分

所以，$T_{2m}=(b_1+b_2)+(b_3+b_4)+\cdots+(b_{2m-1}+b_{2m})=2(1+2+\cdots+m)=2\times\dfrac{m(m+1)}{2}=m(m+1)$.

……………10 分

18. 在 ABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，已知 $b-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2b}=2a\cos B\cos C$，其中，$C\neq\dfrac{\pi}{2}$.

(1)求角 B 的大小；

(2)若 $b^2+3c^2=12-5ac$，求 ABC 面积的最大值.

【详解】(1) 方法一：由 $b-c\cos A=2a\cos B\cos C$ 根据正弦定理边化角得：

$\sin B-\sin C\cos A=2\sin A\cos B\cos C$， ....2 分

即 $\sin(A+C)-\sin C\cos A=2\sin A\cos B\cos C$,

所以 $\sin A\cos C=2\sin A\cos B\cos C$， ....4 分

因为 $C\neq\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos C\neq 0$，

又 $\sin A>0$，所以 $\cos B=\frac{1}{2}$，

又 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$. ....6 分

方法二：由 $b-c\cos A=2a\cos B\cos C$ 根据余弦定理：

得 $b-c\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=2a\cos B\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$， ....2 分

即 $\dfrac{b^2-c^2+a^2}{2b}=2\cos B\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}$， ....4 分

因为 $C\neq\frac{\pi}{2}$，所以 $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}\neq 0$，

所以 $\cos B=\frac{1}{2}$，又 $0<B<\pi$，得 $B=\frac{\pi}{3}$. ....6 分

(2) 方法一：由 (1) 及余弦定理知 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $a^2+c^2-b^2=ac$， ....7 分

因为 $b^2+3c^2=12-5ac$，

所以 $a^2+c^2-(12-3c^2-5ac)=ac$，化简得 $a^2+4ac+4c^2=12$， ....8 分

因为 $a>0,c>0$，

所以 $a^2+4c^2=12\quad 4ac\geq 2\cdot a\cdot 2c$， ....9 分

所以 $ac\leq\frac{3}{2}$，当且仅当 $a=2c=\sqrt{3}$，即 $a=\sqrt{3},c=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时取等号， ....10 分

所以 ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac\leq\frac{3\sqrt{3}}{8}$，

所以 ABC 面积的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$. ....12 分（没有取等条件扣 1 分）

方法二：由（1）及余弦定理知 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$，

所以 $a^2+c^2-b^2=ac$. ....7 分

因为 $b^2+3c^2=12-5ac$，

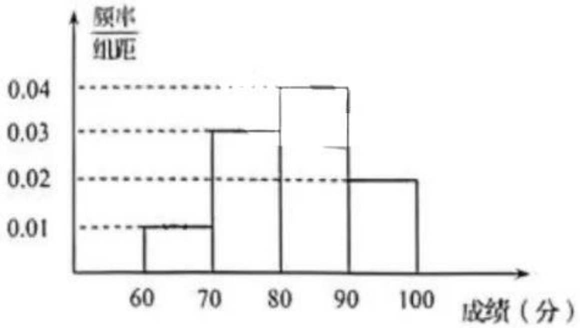
所以 $a^2+c^2-(12-3c^2-5ac)=ac$，化简得 $a^2+4ac+4c^2=12$，即 $(a+2c)^2=12$， ......8 分

所以 ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac=\frac{\sqrt{3}}{8}a\cdot 2c\le\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{a+2c}{2}\right)^2=\frac{3\sqrt{3}}{8}$， ....10 分

当且仅当 $a=2c=\sqrt{3}$，即 $a=\sqrt{3},c=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时取等号，

所以 ABC 面积的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$， ....12 分（没有取等条件扣 1 分）

19．某学校为了解学生对航天知识的知晓情况，在全校学生中开展了航天知识测试（满分 100 分），随机抽取了 100 名学生的测试成绩，按照 $[60,70),[70,80),[80,90),[90,100]$ 分组，得到如下所示的样本频率分布直方图：



(1)根据频率分布直方图，估计该校学生测试成绩的平均数；

(2)从测试成绩在 $[90,100]$ 的同学中再次选拔进入复赛的选手，一共有 6 道题，从中随机挑选出 4 道题进行测试，至少答对 3 道题者才可以进入复赛．现有甲、乙两人参加选拔，在这 6 道题中甲能答对 4 道，乙能答对 3 道，且甲、乙两人各题是否答对相互独立．记甲、乙两人中进入复赛的人数为 ζ，求 ζ 的分布列及期望．

【详解】(1) $65\times0.1+75\times0.3+85\times0.4+95\times0.2=82$ ……………2 分

(2) 由题意可知，从 6 道题中选 4 题共有 $C_6^4=15$，

因为甲能答对 6 道题中的 4 道题，故甲能进复赛的情况共有 $C_4^3C_2^1+C_4^4=9$，

所以甲能进复赛的概率为 $\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$，则甲不能进复赛的概率为 $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$； ……………4 分

因为乙能答对 6 道题中的 3 道题，故乙能进复赛的情况共有 $C_3^3C_3^1=3$，

所以乙能进复赛的概率为 $\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$，则乙不能进复赛的概率为 $1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$； ……………6 分

依题可得，ξ 的可能取值为 $0,1,2$， ……………7 分

所以 $P(\xi=0)=\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{25}$， $P(\xi=1)=\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{14}{25}$，

$P(\xi=2)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{25}$， ……………10 分

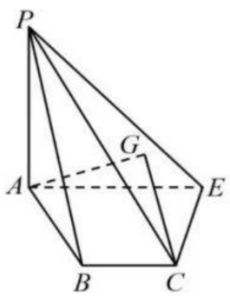
则分布列为:

ξ	0	1	2
P	$\frac{8}{25}$	$\frac{14}{25}$	$\frac{3}{25}$

……………11 分

则 $E(\xi)=0\times\frac{8}{25}+1\times\frac{14}{25}+2\times\frac{3}{25}=\frac{4}{5}$. ……………12 分

20.如图，已知四棱锥 $P-ABCE$ 中，$AB=1$，$BC=2$，$BE=2\sqrt{2}$，$PA\perp$平面 $ABCE$，平面 $PAB\perp$平面 PBC.



(1)证明：AB ⊥BC；

(2)若 $PA=2\sqrt{2}$，且 $AC=AE$，G 为ΔPCE 的重心．求直线 CG 与平面 PBC 所成角的正弦值．

【详解】(1) 过A作 $AD\perp PB$ 于 D，

$\because$ 平面 $PAB\perp$ 平面 PBC，

平面 $PAB\cap$ 平面 $PBC=PB$，

因为 $AD\subset$ 平面 PAB，

$\therefore AD\perp$ 平面 PBC，...............2 分

又 $BC\subset$ 平面 PBC，

$\therefore AD\perp BC$，...............3 分

又 $\because PA\perp$ 平面 $ABCE$， $BC\subset$ 平面 $ABCE$，

$\therefore PA\perp BC$...............4 分

$PA,AD\subset$ 平面 PAD， $PA\cap AD=A$，

$\therefore BC\perp$ 平面 PAD，...............5 分

又 $\because AB\subset$ 平面 PAD， $\therefore BC\perp AB$...............6 分

(2) 以 B 为坐标原点，BC、BA 分别为 x、y 轴，过 B 平行于 PA 的直线为 Z 轴建立空间直角坐标系，

$\therefore B(0,0,0)$，A $(0,1,0)$，C$(2,0,0)$， $P(0,1,2\sqrt{2})$

又设 $E(x,y,0)$， $\because BE=2\sqrt{2}$， $\therefore x^2+y^2=8$①

$\therefore AC=AE$， $\therefore x^2+(y-1)^2=5$②

由①②得 x=2,， $y=2$， $\therefore$E(2,2,0)...............8 分

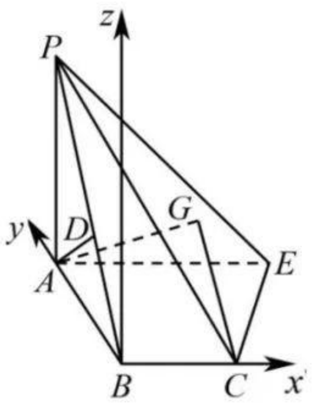
又 $P(0,1,2\sqrt{2})$，故 $G\left(\frac{4}{3},1,\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$， $\overrightarrow{CG}=\left(-\frac{2}{3},-1,\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

设平面 PBC 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$ 则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BP}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\end{cases}$，

令 z=1,， $\therefore \vec{n}=(0,-2\sqrt{2},1)$...............10 分

设直线 CG 与平面 PBC 所成角为 θ .

则 $\sin\theta=\dfrac{|\overrightarrow{CG}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{CG}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{4\sqrt{42}}{63}$． ……………12 分



21.已知椭圆 E：$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过 $A(-1,0)$，$B\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{8}{5}\right)$ 两点，M，N 是椭圆 E 上异于 B 的两动点，且 $\angle MAB=\angle NAB$，直线 AM，AN 的斜率均存在.并分别记为 k_1，k_2.

(1)求证：k_1k_2 为常数；

(2)求 AMN 面积的最大值.

（1）∵椭圆过 A 和 B，∴ $\begin{cases}a^2=1\\ \dfrac{64}{25a^2}+\dfrac{9}{25b^2}=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a^2=4\\ b^2=1\end{cases}$， ……………2 分

∴椭圆 E 的方程为：$\dfrac{y^2}{4}+x^2=1$． ……………3 分

由 $\angle MAB=\angle NAB$ 知 AM 与 AN 关于直线 $AB: y=x+1$ 对称.

在 AM 上任取一点 $P_0(x_0,y_0)$，设 P_0 关于直线 AB 对称的点为 $P_0'(m,n)$，

则 $\begin{cases}\dfrac{y_0-n}{x_0-m}=-1\\ \dfrac{y_0+n}{2}=\dfrac{x_0+m}{2}+1\end{cases}$，解得 $P_0'(y_0-1,x_0+1)$，

从而 $k_1=k_{AP_0}=\dfrac{y_0-1}{x_0}, k_2=k_{AP_0'}=\dfrac{(x_0+1)-1}{y_0-1}=\dfrac{x_0}{y_0-1}$，

于是 $k_1k_2=1$． ……………5 分

（2）设点 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，AM：$x=t_1y-1$．$t_1\neq1,t_2\neq1$

由 $\begin{cases}x=t_1y+1,\\ \dfrac{y^2}{4}+x^2=1\end{cases}$，得 $(4t_1^2+1)y^2-8t_1y=0$，∴ $y_1=\dfrac{8t_1}{4t_1^2+1}$，

从而 $x_1=t_1y_1-1=\dfrac{4t_1^2-1}{4t_1^2+1}$.

同理 $y_2=\dfrac{8t_2}{4t_2^2+1}$， $x_2=\dfrac{4t_2^2-1}{4t_2^2+1}$. ....7 分

由(1)有 $k_1k_2=1$， $t_1t_2=\dfrac{1}{k_1k_2}=1$,故 $y_2=\dfrac{8t_1}{4+t_1^2}$， $x_2=\dfrac{4-t_1^2}{4+t_1^2}$，

又 $k_{MN}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\dfrac{3t_1}{t_1^2+1}$，

$MN: y-y_1=k_{MN}(x-x_1)$，

∴

$$y-\frac{8t_1}{4t_1^2+1}=-\frac{3t_1}{t_1^2+1}\left(x-\frac{4t_1^2-1}{4t_1^2+1}\right)$$

令 y=0,得 $x=\dfrac{5}{3}$. 由此可知，直线 MN 过定点 $\left(\dfrac{5}{3},0\right)$. ....9 分

$S_{\Delta AMN}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{8}{3}\times|y_1-y_2|$

$$=\frac{32\left|t_1-\frac{1}{t_1}\right|}{4t_1^2+\frac{4}{t_1^2}+17}$$

令 $t=\left|t_1-\dfrac{1}{t_1}\right|,t>0$，

则 $S_{AMN}=\dfrac{32t}{4t^2+25}=\dfrac{32}{4t+\frac{25}{t}}\le\dfrac{32}{2\sqrt{4t\cdot\frac{25}{t}}}=\dfrac{8}{5}$. ....11 分

当且仅当 $4t=\dfrac{25}{t}$，即 $\left|t_1-\dfrac{1}{t_1}\right|=\dfrac{5}{2}$ 时取等号，

所以 AMN 面积的最大值为 $\dfrac{8}{5}$ ....12 分（没有取等条件扣 1 分）

方法二：

$$S_{\Delta AMN}=\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}\times|y_1-y_2|=\frac{4}{3}\times\left|\frac{8t_1}{4t_1^2+1}-\frac{8t_2}{4t_2^2+1}\right|=\frac{32|t_1-t_2|}{16t_1^2t_2^2+4t_1^2+4t_2^2+1}=\frac{32|t_1-t_2|}{4(t_1-t_2)^2+25}=$$

又 $t_1\ne1,t_2\ne1$ $|t_1-t_2|\ne0$

所以 $S_{\Delta AMN}=\dfrac{32}{4|t_1-t_2|+\frac{25}{|t_1-t_2|}}\le\dfrac{32}{2\sqrt{4|t_1-t_2|\times\frac{25}{|t_1-t_2|}}}=\dfrac{8}{5}$， ....11 分

当且仅当 $4|t_1-t_2|=\dfrac{25}{|t_1-t_2|}$ 取等号，所以 AMN 面积的最大值为 $\dfrac{8}{5}$. ....12 分（没有取等条件扣 1 分）

已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-ax$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2 当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)\ge 0$，求实数 a 的取值范围

(3)求证：$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\leqslant\frac{\ln(n+1)+\ln(n+2)-\ln 2}{\ln 3}$.

【详解】(1) 依题意，$x\in(-1,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{1+x}-a=\frac{-ax-a+1}{1+x}$； ....1 分

当 $a\le 0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\frac{1}{a}-1>-1$，故当 $x\in\left(-1,\frac{1}{a}-1\right)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in\left(\frac{1}{a}-1,+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$，故函数 $f(x)$ 在 $\left(-1,\frac{1}{a}-1\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{a}-1,+\infty\right)$ 上单调递减；

综上所述，当 $a\le 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增；当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left(-1,\frac{1}{a}-1\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{a}-1,+\infty\right)$ 上单调递减； ....3 分

(2) 依题意，$f(0)=0$，由 (1) 知，当 $a\le 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增；符合题意， ....4 分

$a>0$ 时，当 $\frac{1}{a}-1<2$，即 $a>\frac{1}{3}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}-1\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{a}-1,2\right)$ 上单调递减，

$\begin{cases}f(0)=0\\ f(2)=\ln(1+2)-2a\ge 0\end{cases}$，解得 $a\le\frac{\ln 3}{2}$，所以 $\frac{1}{3}<a\le\frac{\ln 3}{2}$

当 $\frac{1}{a}-1\ge 2$，即 $a\le\frac{1}{3}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递增，，$f(x)\ge 0$ 成立，

综上，实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{\ln 3}{2}\right]$ ....6 分

(3) 要证 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\leqslant\frac{\ln(n+1)+\ln(n+2)-\ln 2}{\ln 3}$，

即证 $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right)\cdot\ln 3\le\ln\frac{(n+1)(n+2)}{2}$，

由 (2) 可知，$a=\frac{\ln 3}{2}$ 时，$0\le x\le 2$ 时，$\ln(x+1)\ge\frac{\ln 3}{2}x$ 恒成立，

故当 $n\in\mathrm{N}^*$ 时，$0<\frac{2}{n}\le 2$，则 $\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\ge\frac{\ln 3}{n}$，

即 $\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)=\ln(n+2)-\ln n\ge\frac{\ln 3}{n}$，　　……………8 分

所以 $\ln(n+2)-\ln n+\ln(n+1)-\ln(n-1)+\dots+\ln 4-\ln 2+\ln 3-\ln 1$

$\ge\ln 3\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\dots+\frac{1}{2}+1\right)$，　　……………10 分

整理得：$\ln(n+2)+\ln(n+1)-\ln 2-\ln 1\ge\ln 3\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\dots+\frac{1}{2}+1\right)$，

即 $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right)\cdot\ln 3\le\ln\frac{(n+1)(n+2)}{2}$，$n\in N^{*}$，

即 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\le\frac{\ln(n+1)+\ln(n+2)-\ln 2}{\ln 3}$.　　……………12 分