高三理科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：集合，常用逻辑用语，函数，导数及其应用。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 命题"$\forall x>0, e^x\geqslant x+1$"的否定是

A. $\forall x>0, e^x<x+1$　　B. $\exists x\leqslant 0, e^x<x+1$

C. $\exists x>0, e^x<x+1$　　D. $\forall x\leqslant 0, e^x<x+1$

2. 已知集合$A=\{x|x^2+2x-3<0\}$，$B=\left\{x\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x\leqslant 2\right.\right\}$，则$A\cap B=$

A. $[-1,1)$　　B. $[-1,3)$　　C. $(-1,1)$　　D. $(-1,3)$

3. 若$a=0.5^{0.3}$，$b=\log_{0.5}3$，$c=\log_{0.3}0.2$，则

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$　　C. $b>a>c$　　D. $c>a>b$

4. 碳14的半衰期为5 730年. 在考古中，利用碳14的半衰期可以近似估计目标物所处的年代. 生物体内碳14含量y与死亡年数x的函数关系式是$y=A_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}$（其中$A_0$为生物体死亡时体内碳14含量）. 考古学家在对考古活动时挖掘到的某生物标本进行研究，发现该生物体内碳14的含量是原来的80%，由此可以推测到发掘出该生物标本时，该生物体在地下大约已经过了（参考数据：$\lg 2\approx 0.301$）

A. 1 847年　　B. 2 022年　　C. 2 895年　　D. 3 010年

5. "$a<2$"是"$f(x)=|x-a|$在$(1,+\infty)$上单调递增"的

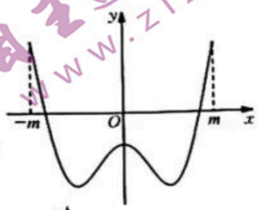
A. 充分不必要条件

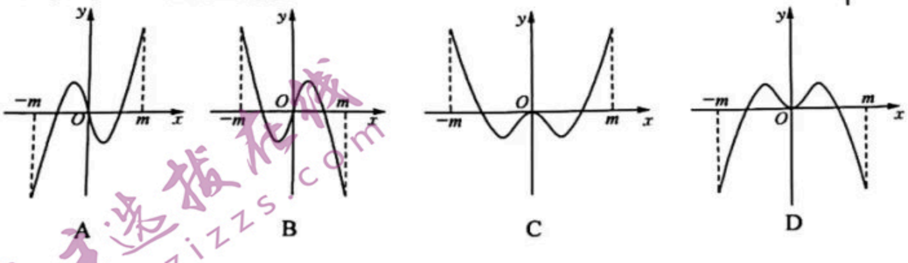
B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

6. 如图为函数$f(x)$（其定义域为$[-m,m]$）的图象，若$f(x)$的导函数为$f'(x)$，则$y=f'(x)$的图象可能是





L

7. 已知命题 p:若 $a+1>b$,则 $a>b$;命题 q: $\exists x_0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{1}{2}\sin x_0+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x_0=1$,则下列命题为真命题的是

A. $p\wedge q$　　B. $p\vee(\neg q)$　　C. $(\neg p)\wedge(\neg q)$　　D. $(\neg p)\wedge q$

8. 已知 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且 $f(1-x)=f(x)$,当 $x\in\left[-\frac{1}{2},0\right)$时,$f(x)=-\sqrt{-x}$,则 $f\left(\frac{13}{4}\right)=$

A. $-\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

9. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$的导函数为 $f'(x)$,若对任意的实数 x,不等式 $xf'(x)+f(x)<0$ 恒成立,且 $f(1)=3$,则不等式 $f(e^{-x})<3e^x$ 的解集为

A. $(-\infty,0)$　　B. $(-\infty,-1)$

C. $(\ln 3,+\infty)$　　D. $(1,+\infty)$

10. 已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$,$B=\{x\in\mathbf{N}|x^2+mx+1<0\}(m\in\mathbf{R})$. 若 $A\cap B=A\cup B$,则 m 的取值范围为

A. $\left(-\infty,-\frac{10}{3}\right)$　　B. $\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right)$　　C. $\left(-\frac{10}{3},-\frac{5}{2}\right)$　　D. $\left[-\frac{10}{3},-\frac{5}{2}\right)$

11. 德国著名数学家、解析数论的创始人狄利克雷(1805 年 2 月 13 日~1859 年 5 月 5 日),对函数论、三角级数论等都有重要贡献,主要著作有《数论讲义》《定积分》等. 狄利克雷函数就是以其名字命名的函数,其解析式为 $D(x)=\begin{cases}1, x\text{ 为有理数},\\0, x\text{ 为无理数},\end{cases}$ 则下列关于狄利克雷函数 $D(x)$的判断错误的是

A. 对任意有理数 t,$D(x+t)=D(x)$

B. 对任意实数 x,$D(D(x))=1$

C. $D(x)$既不是奇函数也不是偶函数

D. 存在实数 x,y,$D(x+y)=D(x)+D(y)$

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}, 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\2x+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}<x\leqslant 1,\end{cases}$ $g(x)=e^x-ax(a\in\mathbf{R})$,若存在 $x_1,x_2\in[0,1]$,使得 $f(x_1)=g(x_2)$成立,则 a 的取值范围是

A. $(-\infty,1]$　　B. $\left(-\infty,e-\frac{5}{4}\right]$

C. $(-\infty,e-2]$　　D. $(-\infty,e]$

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 曲线 $y=(x-1)e^x+x$ 在 $x=0$ 处的切线方程是________.

14. 若函数 $f(x)=g(x)\cdot\cos x$ 为奇函数,则 $g(x)=$________.(填写一个符合条件的解析式即可)

15. 对于两个均不等于 1 的正数 a 和 b,定义:$a*b=\begin{cases}\log_a b, a\leqslant b,\\\log_b a, a>b.\end{cases}$ 设 $m>1,n>1$,且 $mn=s$,则 $(m*s)^{-1}+(s*n)^{-1}$的值是________.

16. 已知函数 $f(x)=ax^2-2(a+1)x+2\ln x+a+2$,若 $\forall x\geqslant 1$,$f(x)\geqslant 0$ 恒成立,则 a 的取值范围为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

已知“$\forall x\in\mathbf{R}, x^2-4x-m>0$”为假命题.

(1)求实数 m 的取值的集合 A；

(2)在(1)的条件下，设集合 $B=\{m\mid -1<m-a\leqslant 1\}$，若 $x\in B$ 是 $x\in A$ 的充分不必要条件，求实数 a 的取值范围.

18.（本小题满分 12 分）

已知 $f(x)=\log_a x+\log_a(4-x)$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$，且 $f(2)=2$.

(1)求 a 的值及 $f(x)$ 的定义域；

(2)求 $f(x)$ 在 $\left[1,\frac{7}{2}\right]$ 上的值域.

19.（本小题满分 12 分）

从“①$\forall x\in\mathbf{R}, f(1+x)=f(1-x)$；②方程 $f(x)=0$ 有两个实数根 $x_1, x_2, x_1+x_2=2$；③$\forall x\in\mathbf{R}$, $f(x)\leqslant f(1)$”这三个条件中任意选择一个，补充到下面横线处，并解答.

已知函数 $f(x)$ 为二次函数，$f(-2)=-8, f(0)=0$，__________.

(1)求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2)若不等式 $f(x)+kx-1\leqslant 0$ 对任意实数 x 恒成立，求实数 k 的取值范围.

注：如果选择多个条件分别进行解答，按第一个解答进行计分.

L

20.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{x\ln x-x+a}{x^2}(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $a=0$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

(2)若 $f(x)$ 在区间 $(1,e^2)$ 上存在极值点，求实数 a 的取值范围.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{3^x-a}{3^x+a}(a\leqslant 0)$.

(1)讨论 $f(x)$ 的奇偶性；

(2)若 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，求实数 a 的取值范围.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{ax}(a\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq 0)$.

(1)若 $f(x)$ 存在零点，求 a 的取值范围；

(2)当 $a=2$ 时，若函数 $g(x)=f(x)-m$ 有两个零点 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，求证：$x_1+x_2>1$.

姓名____________座位号________________________

(在此卷上答题无效)

绝密★启用前

河南省九师联盟2022－2023学年高三9月质量检测理科数学试题

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名和座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题目1 命题“$\forall x>0$，$e^x\geqslant x+1$”的否定是 ( )

A. $\forall x>0$，$e^x<x+1$　　B. $\exists x\leqslant 0$，$e^x<x+1$

C. $\exists x>0$，$e^x<x+1$　　D. $\forall x\leqslant 0$，$e^x<x+1$

答案 C

解析 命题“$\forall x>0$，$e^x\geqslant x+1$”中含有全称量词，故该命题的否定需要将全称量词改为存在量词，且只否定结论，不否定条件，所以该命题的否定为“$\exists x>0$，$e^x<x+1$”.

故选：C.

题目2 已知集合$A=\{x|x^2+2x-3<0\}$，$B=\left\{x\middle|\left(\frac{1}{2}\right)^x\leqslant 2\right\}$，则$A\cap B=$ ( )

A. $[-1,1)$　　B. $[-1,3)$　　C. $(-1,1)$　　D. $(-1,3)$

答案 A

解析 由$x^2+2x-3<0$，得$-3<x<1$，所以$A=(-3,1)$；由$\left(\frac{1}{2}\right)^x\leqslant 2$，得$x\geqslant -1$，所以$B=[-1,+\infty)$，于是$A\cap B=[-1,1)$.

故选：A.

题目3 若$a=0.5^{0.3}$，$b=\log_{0.5}3$，$c=\log_{0.3}0.2$，则 ( )

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$　　C. $b>a>c$　　D. $c>a>b$

答案 D

解析 因为$0<a=0.5^{0.3}<0.5^0=1$，$b=\log_{0.5}3<0$，$c=\log_{0.3}0.2>\log_{0.3}0.3=1$，所以$b<a<c$.

故选：D.

题目4 碳14的半衰期为5730年.在考古中,利用碳14的半衰期可以近似估计目标物所处的年代.生物体内碳14含量y与死亡年数x的函数关系式是$y=A_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}$(其中$A_0$为生物体死亡时体内碳14含量).考古学家在对考古活动时挖掘到的某生物标本进行研究,发现该生物体内碳14的含量是原来的80%,由此可以推测到发掘出该生物标本时,该生物体在地下大约已经过了(参考数据:$\lg 2\approx 0.301$) ( )

A. 1847年 B. 2022年 C. 2895年 D. 3010年

答案 A

解析 由题意知$A_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}=0.8A_0$,所以$\frac{x}{5730}\lg\frac{1}{2}=\lg\frac{8}{10}$,

所以$x=5730\times\frac{1-3\lg 2}{\lg 2}$,所以$x\approx 5730\times\frac{1-0.903}{0.301}\approx 1847$.

故选:A.

题目5 “$a<2$”是“$f(x)=|x-a|$在$(1,+\infty)$上单调递增”的 ( )

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

答案 B

解析 解:因为$f(x)=|x-a|=\begin{cases}x-a, & x>a\\ a-x, & x\leqslant a\end{cases}$在$(a,+\infty)$单调递增,在$(-\infty,a)$单调递增,

且$f(x)=|x-a|$在$(1,+\infty)$上单调递增,

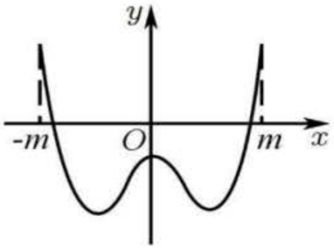
所以$a\leqslant 1$;

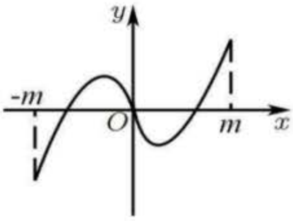
因为“$a<2$”是“$a\leqslant 1$”的必要不充分条件,

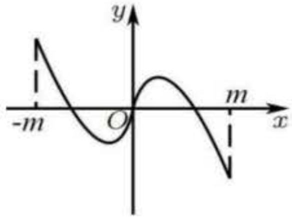
所以“$a<2$”是“$f(x)=|x-a|$在$(1,+\infty)$上单调递增”的必要不充分条件,

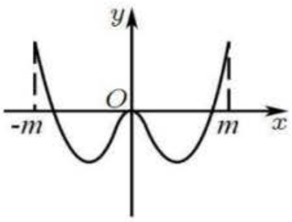
故选:B.

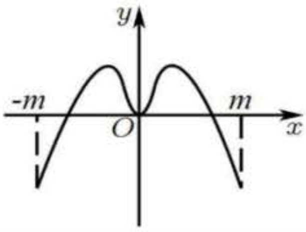
题目6 如图为函数 $f(x)$(其定义域为 $[-m,m]$) 的图象，若 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，则 $y=f'(x)$ 的图象可能是 ( )



A.


B.


C.


D.


答案 A

解析 解：由 $f(x)$ 图象知 $f(x)$ 在 $(-m,0)$ 上先减后增，故 $f'(x)$ 在 $(-m,0)$ 上函数值先负后正，

同理 $f'(x)$ 在 $(0,m)$ 上的符号是先负后正，四个选项中仅有选项 A 符合.

故选：A.

题目7 已知命题 p：若 $a+1>b$，则 $a>b$；命题 q：$\exists x_0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$\frac{1}{2}\sin x_0+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x_0=1$，则下列命题为真命题的是 ( )

A. $p\wedge q$　　B. $p\vee(\neg q)$　　C. $(\neg p)\wedge(\neg q)$　　D. $(\neg p)\wedge q$

答案 D

解析 对于命题 p，取 $a=0.1$，$b=1$，适合 $a+1>b$，但此时 $a<b$，所以命题 p 为假命题，则 $\neg p$ 为真命题；对于命题 q，$\frac{1}{2}\sin x_0+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x_0=\sin\left(x_0+\frac{\pi}{3}\right)$，由 $x_0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，得 $x_0+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$，所以当 $x_0+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $x_0=\frac{\pi}{6}$ 时，$\frac{1}{2}\sin x_0+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x_0=1$ 成立，所以命题 q 为真命题. 综上，D 选项为真命题.

故选：D.

题目8 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且 $f(1-x)=f(x)$，当 $x\in\left[-\frac{1}{2},0\right)$ 时，$f(x)=-\sqrt{-x}$，则 $f\left(\frac{13}{4}\right)=$ （　　）

A. $-\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

答案 C

解析 由 $f(x)$ 是奇函数及 $f(1-x)=f(x)$，得 $f(1+x)=-f(x)$，

所以 $f(x+2)=-f(1+x)=f(x)$，从而 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，

所以 $f\left(\frac{13}{4}\right)=f\left(\frac{13}{4}-2\right)=f\left(\frac{5}{4}\right)=f\left(1-\frac{5}{4}\right)=f\left(-\frac{1}{4}\right)=-\sqrt{-\left(-\frac{1}{4}\right)}=-\frac{1}{2}$.

故选：C.

题目9 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，若对任意的实数 x，不等式 $xf'(x)+f(x)<0$ 恒成立，且 $f(1)=3$，则不等式 $f(e^{-x})<3e^{x}$ 的解集为 （　　）

A. $(-\infty,0)$　　B. $(-\infty,-1)$　　C. $(\ln3,+\infty)$　　D. $(1,+\infty)$

答案 A

解析 设 $g(x)=xf(x)$，则 $g'(x)=xf'(x)+f(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 R 上单调递减；由 $f(e^{-x})<3e^{x}$，得 $e^{-x}f(e^{-x})<1\times f(1)$，即 $g(e^{-x})<g(1)$，所以 $e^{-x}>1$，解得 $x<0$.

故选：A.

题目10 已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\in N|x^2+mx+1<0\}$ $(m\in R)$. 若 $A\cap B=A\cup B$，则 m 的取值范围为 （　　）

A. $\left(-\infty,-\frac{10}{3}\right)$　　B. $\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right)$　　C. $\left(-\frac{10}{3},-\frac{5}{2}\right)$　　D. $\left[-\frac{10}{3},-\frac{5}{2}\right)$

答案 D

解析 解：由 $A\cap B=A\cup B$，得 $A=B$；

因为 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$，

所以 $B=\{x\in N|x^2+mx+1<0\}=\{1,2\}$，

令 $f(x)=x^2+mx+1$，结合二次函数图象性质及零点存在性定理，

得 $\begin{cases}f(0)=1>0\\f(1)<0\\f(2)<0\\f(3)>0\end{cases}$，

即 $\begin{cases}m+2<0\\2m+5<0\\10+3m\geqslant0\end{cases}$，解得 $-\frac{10}{3}\leqslant m<-\frac{5}{2}$，

所以实数 m 的取值范围为 $\left[-\frac{10}{3},-\frac{5}{2}\right)$.

故选：D.

题目 11 德国著名数学家、解析数论的创始人狄利克雷(1805年2月13日~1859年5月5日),对函数论、三角级数论等都有重要贡献,主要著作有《数论讲义》《定积分》等.狄利克雷函数就是以其名字命名的函数,其解析式为$D(x)=\begin{cases}1, x\text{为有理数},\\0, x\text{为无理数},\end{cases}$则下列关于狄利克雷函数$D(x)$的判断错误的是 ( )

A. 对任意有理数t,$D(x+t)=D(x)$　B. 对任意实数x,$D(D(x))=1$

C. $D(x)$既不是奇函数也不是偶函数　D. 存在实数x,y,$D(x+y)=D(x)+D(y)$

答案 C

解析 对于A,对任意有理数t,当x为有理数时,$x+t$为有理数,则$D(x+t)=1=D(x)$;当x为无理数时,$x+t$为无理数,则$D(x+t)=0=D(x)$,故A正确;

对于B,若x为有理数,则$D(D(x))=D(1)=1$;若x为无理数,则$D(D(x))=D(0)=1$,故B正确;

对于C,当x为有理数时,则$-x$为有理数,则$D(-x)=1=D(x)$;当x为无理数时,则$-x$为无理数,则$D(-x)=0=D(x)$,于是对任意实数x,都有$D(-x)=D(x)$,即狄利克雷函数为偶函数,故C错误;

对于D,取$x=\sqrt{2}$,$y=\sqrt{3}$,因为$\sqrt{2}+\sqrt{3}$为无理数,所以$D(\sqrt{2}+\sqrt{3})=0=D(\sqrt{2})+D(\sqrt{3})$,故D正确.

故选:C.

题目 12 已知函数$f(x)=\begin{cases}x^3-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}, 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\\2x+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}<x\leqslant 1\end{cases}$,$g(x)=e^x-ax(a\in R)$,若存在$x_1,x_2\in[0,1]$,使得$f(x_1)=g(x_2)$成立,则实数$a$的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,1]$　B. $(-\infty,e-2]$　C. $\left(-\infty,e-\frac{5}{4}\right]$　D. $(-\infty,e]$

答案 C

解析 ①当$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$时,$f(x)=x^3-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$,则$f'(x)=3x^2-\frac{3}{4}=3\left(x^2-\frac{1}{4}\right)\leqslant 0$在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上恒成立,

所以函数$f(x)$在区间$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上单调递减,则$f\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant f(x)\leqslant f(0)$,即$\frac{5}{4}\leqslant f(x)\leqslant\frac{3}{2}$,

②当$\frac{1}{2}<x\leqslant 1$时,$f(x)=2x+\frac{1}{2}$,函数在区间$\left(\frac{1}{2},1\right]$上单调递增,

所以$f\left(\frac{1}{2}\right)<f(x)\leqslant f(1)$,即$\frac{3}{2}<f(x)\leqslant\frac{5}{2}$,

综上,函数$f(x)$的值域为$\left[\frac{5}{4},\frac{5}{2}\right]$;

由题意,$f(x)$的值域与$g(x)=e^x-ax$的值域有交集,故分析$g(x)=e^x-ax$的值域.

又$g'(x)=e^x-a$,$x\in[0,1]$,

若$a\leqslant 0$时,则$g'(x)>0$,函数$g(x)$在$[0,1]$上单调递增,所以$g(0)\leqslant g(x)\leqslant g(1)$,即$g(x)\in[1,e-a]$,

此时若要满足题意,只需$[1,e-a]\cap\left[\frac{5}{4},\frac{5}{2}\right]\neq\varnothing$,当$a\leqslant 0$时恒成立;

当$a>0$时,令$g'(x)=e^x-a=0$,解得$x=\ln a$,$g(0)=1$,$g(1)=e-a$.

当$0<a\leqslant 1$时,$\ln a\leqslant 0$,故函数$g(x)$在$[0,1]$上单调递增,故$g(x)\in[1,e-a]$,所以

$[1,e-a]\cap\left[\frac{5}{4},\frac{5}{2}\right]\neq\varnothing$，所以 $\begin{cases}e-a\geqslant\frac{5}{4}\\0<a\leqslant1\end{cases}$，解得 $0<a\leqslant1$，

当 $1<a<e$ 时，$\ln a\in(0,1)$，故函数 $g(x)$ 在 $[0,\ln a]$ 上单调递减，在 $[\ln a,1]$ 上单调递增；因为 $g(0)=1$，$g(1)=e-a$，

故若值域满足与 $\left[\frac{5}{4},\frac{5}{2}\right]$ 有交集，则只能 $e-a\geqslant\frac{5}{4}$，解得 $a\leqslant e-\frac{5}{4}$，此时 $1<a\leqslant e-\frac{5}{4}$

当 $a\geqslant e$ 时，$\ln a\geqslant1$，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，所以 $g(1)\leqslant g(x)\leqslant g(0)$，$g(x)\in[e-a,1]$，此时 $[e-a,1]\cap\left[\frac{5}{4},\frac{5}{2}\right]=\varnothing$，不满足题意

综上，实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty,e-\frac{5}{4}\right]$

故选：C.

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

题目13 曲线 $y=(x-1)e^x+x$ 在 $x=0$ 处的切线方程是 ______.

答案 $x-y-1=0$

解析 $y'=xe^x+1$，当 $x=0$ 时，$y=-1$，$y'=1$，所以切点为 $(0,-1)$，切线斜率为1，所以切线方程为 $y-(-1)=x$，即 $x-y-1=0$.

故答案为：$x-y-1=0$.

题目14 若函数 $f(x)=g(x)\cdot\cos x$ 为奇函数，则 $g(x)=$ ______.(填写一个符合条件的解析式即可)

答案 x，x^3，$\sin x$（答案不唯一）.

解析 由 $f(x)=g(x)\cdot\cos x$ 为奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$，即 $g(-x)\cos(-x)=-g(x)\cdot\cos x$ 恒成立，

考虑到 $\cos x$ 的任意性，可得 $g(-x)=-g(x)$，则 $g(x)$ 为奇函数即可，

故答案为：x,x^3,$\sin x$（答案不唯一）.

题目15 对于两个均不等于1的正数 a 和 b，定义：$a*b=\begin{cases}\log_a b, a\leqslant b,\\\log_b a, a>b.\end{cases}$ 设 $m>1$，$n>1$，且 $mn=s$，则 $(m*s)^{-1}+(s*n)^{-1}$ 的值是 ______.

答案 1

解析 由 $m>1$，$n>1$ 及 $mn=s$，得 $s>m>1$，$s>n>1$，由新定义得 $(m*s)^{-1}+(s*n)^{-1}=\frac{1}{\log_m s}+\frac{1}{\log_n s}=\log_s m+\log_s n=\log_s(mn)=\log_s s=1$.

故答案为：1.

题目16 已知函数 $f(x)=ax^2-2(a+1)x+2\ln x+a+2$，若 $\forall x\geqslant1$，$f(x)\geqslant0$ 恒成立，则 a 的取值范围为 ______.

答案 $[1,+\infty)$

解析 $f'(x)=2ax-2(a+1)+\frac{2}{x}=\frac{2ax^2-2(a+1)x+2}{x}=\frac{2(x-1)(ax-1)}{x}$，

若 $a\leqslant0$ 时，则 $f'(x)\leqslant0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，从而 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)\leqslant f(1)=0$，不合题意；

若 $0<a<1$ 时，则当 $x\in\left(1,\frac{1}{a}\right)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $\left[1,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增，从而 $f\left(\frac{1}{a}\right)<f(1)=0$，不合题

意；
若 $a\geqslant 1$ 时，则 $ax-1\geqslant x-1\geqslant 0$，所以 $f'(x)\geqslant 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，$f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，于是 $f(x)\geqslant f(1)=0$，符合题意. 综上所述，a 的取值范围为 $[1,+\infty)$.
故答案为：$[1,+\infty)$.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或验算步骤.

题目17 已知"$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-4x-m>0$"为假命题.

(1) 求实数 m 的取值的集合 A；

(2) 在 (1) 的条件下，设集合 $B=\{m|-1<m-a\leqslant 1\}$，若 $x\in B$ 是 $x\in A$ 的充分不必要条件，求实数 a 的取值范围.

答案 (1)$A=\{m|m\geqslant -4\}$

(2)$[-3,+\infty)$

解析 (1)

法一：因为"$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-4x-m>0$"为假命题，所以"$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-4x-m\leqslant 0$"为真命题，即 $\exists x\in\mathbf{R}$，$m\geqslant x^2-4x$ 为真命题，等价于 $m\geqslant(x^2-4x)_{\min}$，又 $x^2-4x=(x-2)^2-4\geqslant -4$，所以 $m\geqslant -4$，即 $A=\{m|m\geqslant -4\}$.

法二：因为"$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-4x-m>0$"为假，所以"$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-4x-m\leqslant 0$"为真，即 $\Delta=16+4m\geqslant 0$，所以 $m\geqslant -4$，即 $A=\{m|m\geqslant -4\}$.

(2)

因为 $x\in B$ 是 $x\in A$ 的充分不必要条件，所以集合 B 为集合 A 的真子集，

又 $B=\{m|-1<m-a\leqslant 1\}$，所以 $B=\{m|a-1<m\leqslant a+1\}$，

所以 $a-1\geqslant -4$，解得 $a\geqslant -3$，故实数 a 的取值范围是 $[-3,+\infty)$.

题目18 已知 $f(x)=\log_a x+\log_a(4-x)$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$，且 $f(2)=2$.

(1) 求 a 的值及 $f(x)$ 的定义域；

(2) 求 $f(x)$ 在 $\left[1,\frac{7}{2}\right]$ 上的值域.

答案 (1)$a=2$，$(0,4)$

(2)$[\log_2 7-2,2]$

解析 (1)

由 $f(2)=2$ 得 $\log_a 2+\log_a(4-2)=2$，即 $2\log_a 2=2$，所以 $\log_a 2=1$，解得 $a=2$，

所以 $f(x)=\log_2 x+\log_2(4-x)$，

由 $\begin{cases}x>0\\4-x>0\end{cases}$，解得 $0<x<4$，故 $f(x)$ 的定义域为 $(0,4)$；

(2)

由 (1) 及条件知 $f(x)=\log_2 x+\log_2(4-x)=\log_2 x(4-x)=\log_2[-(x-2)^2+4]$，

设 $t(x)=-(x-2)^2+4$，$x\in\left[1,\frac{7}{2}\right]$，则当 $x=2$ 时，$t(x)_{\max}=4$，

当 $x=1$ 时，$t(x)=3$；当 $x=\frac{7}{2}$ 时，$t(x)=\frac{7}{4}$，

所以当 $x\in\left[1,\frac{7}{2}\right]$ 时，$t(x)_{\min}=\frac{7}{4}$，即 $t(x)\in\left[\frac{7}{4},4\right]$，

所以 $f(x)_{\max}=\log_2 4=2$，$f(x)_{\min}=\log_2\frac{7}{4}=\log_2 7-2$，

所以 $f(x)$ 在 $\left[1,\frac{7}{2}\right]$ 的值域为 $[\log_2 7-2,2]$.

题目19 从"①$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(1+x)=f(1-x)$；②方程 $f(x)=0$ 有两个实数根 x_1,x_2，$x_1+x_2=2$；③$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\leqslant f(1)$"这三个条件中任意选择一个，补充到下面横线处，并解答.

已知函数 $f(x)$ 为二次函数，$f(-2)=-8$，$f(0)=0$，______.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2) 若不等式 $f(x)+kx-1\leqslant 0$ 对任意实数 x 恒成立，求实数 k 的取值范围.

注：如果选择多个条件分别进行解答，按第一个解答进行计分.

答案 (1) $f(x)=-x^2+2x$

(2) $[-4,0]$

解析 (1)

设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，因为 $f(0)=0$，所以 $c=0$.

因为 $f(-2)=-8$，所以 $4a-2b=-8$.

若选择①：

$\because\forall x\in\mathbf{R}$，$f(1+x)=f(1-x)$，所以 $f(x)$ 的图象的对称轴方程为 $x=1$，即 $-\dfrac{b}{2a}=1$，

所以 $b=-2a$，

所以 $a=-1$，$b=2$，

故 $f(x)=-x^2+2x$.

若选择②：

因为方程 $f(x)=0$ 的两根为 x_1,x_2 且 $x_1+x_2=2$，所以 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=2$，即 $b=-2a$，

所以 $a=-1$，$b=2$，

所以 $f(x)=-x^2+2x$.

若选择③：

$\because\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\leqslant f(1)$，即 $f(x)_{max}=f(1)$，

所以 $f(x)$ 的图象的对称轴方程为 $x=1$ 且 $a<0$，所以 $-\dfrac{b}{2a}=1$，即 $b=-2a$，

所以 $a=-1<0$，$b=2$

所以 $f(x)=-x^2+2x$.

(2)

由 (1) 知 $f(x)=-x^2+2x$，所以 $f(x)+kx-1\leqslant 0$，

即 $-x^2+(2+k)x-1\leqslant 0$ 对一切实数 x 恒成立，

等价于 $x^2-(k+2)x+1\geqslant 0$ 对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

所以 $\Delta=(k+2)^2-4\leqslant 0$，解得 $-4\leqslant k\leqslant 0$，

故 k 的取值范围为 $[-4,0]$.

题目20 已知函数 $f(x)=\dfrac{x\ln x-x+a}{x^2}(a\in R)$.

(1) 当 $a=0$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $(1,e^2)$ 上存在极值点，求实数 a 的取值范围.

答案 (1) 单调递增区间为 $(0,e^2)$，单调递减区间为 $(e^2,+\infty)$.

(2) $\left(0,\dfrac{e}{2}\right)$.

解析 (1)

当 $a=0$ 时，$f(x)=\dfrac{\ln x-1}{x}$，故其定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f'(x)=\dfrac{2-\ln x}{x^2}$，

令 $f'(x)>0$，即 $\dfrac{2-\ln x}{x^2}>0$，解得 $0<x<e^2$，即 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,e^2)$；

令 $f'(x)<0$，即 $\frac{2-\ln x}{x^2}<0$，解得 $x>e^2$，即 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(e^2,+\infty)$.

(2)

因为 $f(x)=\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}(1<x<e^2)$，

所以 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^2}-\frac{2a}{x^3}=\frac{2x-x\ln x-2a}{x^3}$，

令 $g(x)=2x-x\ln x-2a$，则 $g'(x)=2-\ln x-1=1-\ln x$，

令 $g'(x)>0$，得 $0<x<e$；令 $g'(x)<0$，得 $x>e$；又 $x\in(1,e^2)$，

所以 $g(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调递增，在 (e,e^2) 上单调递减，

所以 $g(x)_{\max}=g(e)=e-2a$，$g(1)=2-2a$，$g(e^2)=-2a$.

若 $f(x)$ 在 $(1,e^2)$ 上存在极值点，则 $\begin{cases}e-2a>0\\2-2a<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}e-2a>0\\-2a<0\end{cases}$，解得 $1<a<\frac{e}{2}$ 或 $0<a<\frac{e}{2}$，

所以实数 a 的取值范围为 $\left(0,\frac{e}{2}\right)$.

题目21 已知函数 $f(x)=\frac{3^x-a}{3^x+a}(a\leqslant 0)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的奇偶性；

(2) 若 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，求实数 a 的取值范围.

答案 (1) 见解析

(2) $[-3,0)$

解析 (1)

由 $3^x+a\neq 0$，得 $3^x\neq -a$.

i. 当 $a=0$ 时，$3^x\neq 0$ 对任意实数 x 恒成立，故函数的定义域为 R，此时 $f(x)=1$，$f(-x)=1=f(x)$，此时函数 $f(x)$ 为偶函数；

ii. 当 $a<0$ 时，$-a>0$，所以 $3^x\neq -a$ 的解集为 $\{x|x\neq\log_3(-a)\}$，故 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq\log_3(-a)\}$；

①当 $\log_3(-a)\neq 0$，即 $a\neq -1$ 时，$f(x)$ 的定义域关于原点不对称，此时 $f(x)$ 为非奇非偶函数；

②当 $\log_3(-a)=0$，即 $a=-1$ 时，$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，此时 $f(x)=\frac{3^x+1}{3^x-1}$

$f(-x)=\frac{3^{-x}+1}{3^{-x}-1}=\frac{1+3^x}{1-3^x}=-\frac{3^x+1}{3^x-1}=-f(x)$，此时 $f(x)$ 为奇函数.

综上所述，当 $a=0$ 时，$f(x)$ 为偶函数；当 $a=-1$ 时，$f(x)$ 为奇函数；当 $a<0$ 且 $a\neq -1$ 时，$f(x)$ 为非奇非偶函数.

(2)

i. 当 $a=0$ 时，$f(x)=1$，在 $(1,+\infty)$ 上不单调，不合题意；

ii. 当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq\log_3(-a)\}$，且 $f(x)=1+\frac{-2a}{3^x+a}$，

因为 $a<0$，所以 $-2a>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\log_3(-a))$，$(\log_3(-a),+\infty)$ 上单调递减，

又 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $(1,+\infty)\subseteq(\log_3(-a),+\infty)$，

所以 $\log_3(-a)\leqslant 1$，即 $0<-a\leqslant 3$，所以 $-3\leqslant a<0$，

故实数 a 的取值范围为 $[-3,0)$.

题目22 已知函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{ax}(a\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq 0)$.

(1) 若 $f(x)$ 存在零点，求 a 的取值范围；

(2) 当 $a=2$ 时，若函数 $g(x)=f(x)-m$ 有两个零点 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，求证：$x_1+x_2>1$.

答案 (1) $(-\infty,0)\cup[\mathrm{e},+\infty)$

(2) 证明见解析

解析 (1)

$\because f(x)=\ln x+\frac{1}{ax}$ 存在零点 $\Leftrightarrow \ln x+\frac{1}{ax}=0$ 存在实根 $\Leftrightarrow -\frac{1}{a}=x\ln x$ 有实根，

令 $p(x)=x\ln x$，则 $p'(x)=1+\ln x$.

因为 $p'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$，$p'(x)>0\Leftrightarrow x>\frac{1}{\mathrm{e}}$，

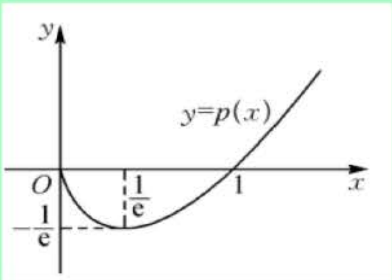
所以 $p(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},\infty\right)$ 上单调递增.

所以 $p(x)_{\min}=p\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\frac{1}{\mathrm{e}}$. 又 $x\to 0$ 时，$p(x)\to 0$；$x\to+\infty$ 时，$p(x)\to+\infty$，

由题意，$-\frac{1}{a}>0$，或 $-\frac{1}{\mathrm{e}}\leqslant -\frac{1}{a}<0$.

所以 $a<0$，或 $a\geqslant \mathrm{e}$.

所以 a 的取值范围是 $(-\infty,0)\cup[\mathrm{e},+\infty)$.



(2)

证明：“函数 $g(x)=f(x)-m$ 有两个零点 x_1,x_2”等价于“方程 $f(x)=m$ 有两个不同的实数根 x_1,x_2”.

当 $a=2$ 时，方程 $f(x)=m$，即为 $\ln x+\frac{1}{2x}=m$，

所以 $\ln x_1+\frac{1}{2x_1}=m$，且 $\ln x_2+\frac{1}{2x_2}=m$，

两式相减，得 $\ln\frac{x_1}{x_2}=\frac{1}{2x_2}-\frac{1}{2x_1}$，即 $\ln\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_1-x_2}{2x_2x_1}$，则 $x_1x_2=\frac{x_1-x_2}{2\ln\frac{x_1}{x_2}}$，

令 $t=\frac{x_1}{x_2}(0<t<1)$，有 $x_1=\frac{t-1}{2\ln t}$，$x_2=\frac{x_1}{t}=\frac{1-\frac{1}{t}}{2\ln t}$，

从而得 $x_1+x_2=\frac{t-\frac{1}{t}}{2\ln t}$.

令 $h(t)=t-\frac{1}{t}-2\ln t(0<t<1)$，则 $h'(t)=1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}=\left(1-\frac{1}{t}\right)^2>0$，

即函数 $h(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增.

$\forall t\in(0,1)$，$h(t)<h(1)=0$，即 $t-\frac{1}{t}<2\ln t$，

而 $\ln t<0$，因此 $\forall t\in(0,1)$，$\frac{t-\frac{1}{t}}{2\ln t}>1$ 恒成立，所以 $x_1+x_2>1$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。