高三考试数学试题(文科)

考生注意：

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分，共150分，考试时间120分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容：集合与常用逻辑用语、不等式、函数与导数、三角函数与解三角形、平面向量、复数、数列、立体几何、概率、统计、极坐标与参数方程。

第Ⅰ卷

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

B 1. 已知集合 $A=\{x|4x+5>-3\}$，$B=\{x|1-x>0\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x|1<x<2\}$　　B. $\{x|-2<x<1\}$　　C. $\{x|1<x<2\}$　　D. $\{x|x<1\}$

C 2. 某同学做立定投篮训练，共两场，第一场投篮20次的命中率为80%，第二场投篮30次的命中率为70%，则该同学这两场投篮的命中率为

A. 72%　　B. 74%　　C. 75%　　D. 76%

D 3. 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_2+a_8=10$，则 $S_9=$

A. 22　　B. 45　　C. 50　　D. 55

4. 在2008年北京奥运会女子射箭比赛中，中国选手张娟娟连续战胜了三名韩国选手，最终夺得了冠军，取得了历史性的突破(射箭比赛根据决赛总成绩的高低来决定胜负)．张娟娟和韩国选手在决赛中的射箭成绩如下：

甲	10	7	9	9	9	9	10	9	10	10	9	9
乙	9	10	10	8	8	10	9	8	9	10	8	10

A 则下列判断正确的是

A. 甲是中国选手，乙是韩国选手

B. 甲射击成绩的众数大于乙射击成绩的众数

C. 甲射击成绩的极差等于乙射击成绩的极差

D. 甲射击成绩的中位数大于乙射击成绩的中位数

5. 某民族学校有92%的学生喜欢民歌或民舞，62%的学生喜欢民歌，80%的学生喜欢民舞，则该学校既喜欢民歌又喜欢民舞的学生数占该校学生总数的比例是

A. 48%　　B. 50%　　C. 52%　　D. 60%

6. 已知 a 为函数 $f(x)=2\ln x+\frac{1}{2}x^2-3x$ 的极小值点，则 $a=$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. $\ln 2$

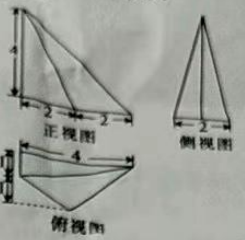
7. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-1)$，$\boldsymbol{b}=(m,1-m)$，$\boldsymbol{c}=(2m,2)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=$

A. -2　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 2

C 8. 设 $a=\log_{0.99}0.98$，$b=\pi^{-\frac{1}{2}}$，$c=\cos 91^{\circ}$，则

A. $b>a>c$　　B. $a>b>c$　　C. $b>c>a$　　D. $a>c>b$

A 9. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为

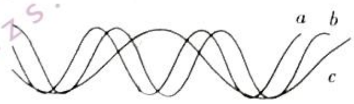


A. $\frac{17}{3}$　　B. 6　　C. $\frac{20}{3}$　　D. $\frac{22}{3}$

B 10. 在边长为 2 的正六边形内任取一点，则这个点到该正六边形中心的距离不超过 1 的概率为

A. $\frac{\sqrt{3}\pi}{1}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{18}$　　C. $\frac{\sqrt{3}\pi}{24}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{24}$

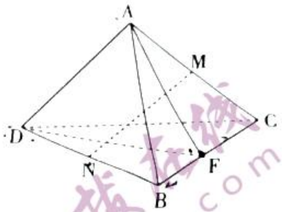
C 11. 个函数 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，$g(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{5})$，$h(x)=\sin x$ 在同一平面直角坐标系中的部分图象如图所示，则



A. a 为 $f(x)$，b 为 $g(x)$，c 为 $h(x)$　　B. a 为 $h(x)$，b 为 $f(x)$，c 为 $g(x)$

C. a 为 $g(x)$，b 为 $f(x)$，c 为 $h(x)$　　D. a 为 $h(x)$，b 为 $g(x)$，c 为 $f(x)$

B 12. 在立体几何探究课上，老师给每个小组分发了一个正四面体的实物模型，同学们在探究的过程中得到了一些有趣的结论. 已知直线 $AD//$ 平面 α，直线 $BC//$ 平面 α，F 是棱 BC 上一动点，现有下列三个结论：



①若 M,N 分别为棱 AC,BD 的中点，则直线 $MN//$ 平面 α；

②在棱 BC 上存在点 F，使 $AF\perp$ 平面 α；

③当 F 为棱 BC 的中点时，平面 $ADF\perp$ 平面 α.

其中所有正确结论的编号是

A. ③　　B. ①③　　C. ①②　　D. ②③

第Ⅱ卷

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知 $a,b\in\mathbf{R}$，i 是虚数单位，若 $(a+\mathrm{i})^2=b+6\mathrm{i}$，则 $a+b=$ ▲ 2.

14. 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-2\leq 0,\\x-2y-2\leq 0,\\2x-y+2\geq 0,\end{cases}$ 则目标函数 $z=y-3x$ 的最小值为 ▲ -6.

15. 已知底面边长为 1 的正四棱柱的各顶点在同一个球面上，若该球的表面积为 4π，则该正四棱柱的侧面积为 ▲ .

16. 悬链线是平面曲线，是柔性链条或缆索两端固定在两根支柱顶部，中间自然下垂所形成的外形，在工程中(如悬索桥、双曲拱桥、架空电缆)有广泛的应用. 当微积分尚未出现时，伽利略猜测这种形状是抛物线，直到1691年莱布尼兹和伯努利利用微积分推导出悬链线的方程 $y=\frac{c}{2}(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}})$，其中 c 为参数. 当 $c=1$ 时，我们可构造出双曲函数(双曲正弦函数 $\sin h(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 和双曲余弦函数 $\cos h(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$)，则函数 $y=\cos h(2x)+\sin h(x)$ 的最小值为___▲___.

三、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.(10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中，圆 C_1 的圆心为$(1,0)$，半径为 1，圆 C_2 与圆 C_1 关于 y 轴对称. 以原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(1)求圆 C_1 和 C_2 的极坐标方程；

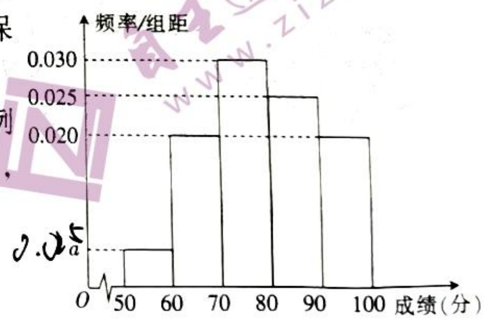
(2)设 M,N 分别是圆 C_1 和 C_2 上的两个动点，且满足$\angle MON=\frac{\pi}{2}$，求$\triangle OMN$ 面积的最大值.

18.(12 分)

某校近几年加大了对学生奥赛的培训力度，为了选择培训的对象，今年 5 月该校进行了一次化学竞赛. 现从参加竞赛的同学中，选取 100 名同学并将其成绩(百分制，均为整数)分成五组：第 1 组[50,60)，第 2 组[60,70)，第 3 组[70,80)，第 4 组[80,90)，第 5 组[90,100]. 得到如图所示的频率分布直方图，观察图形，回答下列问题：

(1)求 a 的值，并求这组数据的中位数(中位数结果保留两位小数)；

(2)已知分数在[50,60)之间的男生与女生的比例为 3 : 2，从分数在[50,60)的同学中随机抽取 2 人，求这 2 人均为男生的概率.



19.（12分）

某银行对某市最近7年住房贷款发放情况进行了统计调查，得到如下数据：

年份 x	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
贷款 y(亿元)	20	40	50	60	70	80	100

将上表进行处理（令 $t=x-2014$，$z=\frac{y-20}{10}$）后，得到如下数据：

t	1	2	3	4	5	6	7
z	0	2	3	4	5	6	8

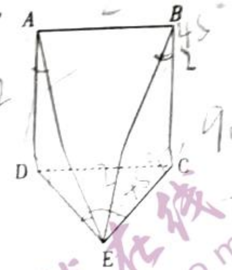
(1)试求 z 与 t 的线性回归方程 $\hat{z}=\hat{b}t+\hat{a}$.（$\hat{a}$，$\hat{b}$ 用分数表示）

(2)利用(1)中所求的线性回归方程估算2024年房贷发放数额.（结果精确到整数位）

参考公式：回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$ 中斜率和截距最小二乘估计公式分别为 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

20.（12分）

已知 $ABCD$ 是边长为2的正方形，平面 $ABCD\perp$ 平面 DEC，直线 AE，BE 与平面 DEC 所成的角都为 45°.

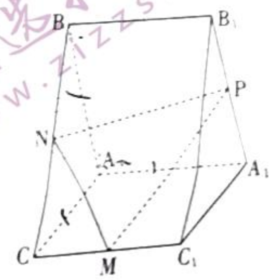


(1)证明：$AD\perp EC$.

(2)求四棱锥 $E-ABCD$ 的体积 V.

21.（12分）

如图，已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面垂直，$AA_1=AB=AC=1$，$AB\perp AC$，M，N 和 P 分别是 CC_1，BC 和 A_1B_1 的中点.



(1)证明：$PN\parallel$ 平面 ACC_1A_1.

(2)已知直线 A_1C_1 与平面 MPN 相交于点 H，求 $\frac{A_1H}{HC_1}$ 的值.

22.（12分）

设函数 $f(x)=e^x$，$g(x)=\ln x$.

(1)若 $f(x)\geq ax+1$，求 a 的值.

(2)证明：$f(x)+x\cdot g(x)>x(1+x)$.

高三数学考试参考答案（文科）

1. B 【解析】本题考查集合的交集，考查运算求解能力.

因为 $A=\{x|x>-2\}$，$B=\{x|x<1\}$，所以 $A\cap B=\{x|-2<x<1\}$.

2. D 【解析】本题考查双曲线，考查运算求解能力.

由题可知双曲线的焦点在 y 轴上，$c^2=a^2+b^2=4+3=7$，故焦点坐标为 $(0,\sqrt{7})$ 和 $(0,-\sqrt{7})$.

3. D 【解析】本题考查等差数列的性质，考查运算求解能力.

由题意得，$a_2+a_{10}=2a_6=10$，则 $a_6=5$，故 $S_{11}=11a_6=55$.

4. A 【解析】本题考查统计，考查数据分析的核心素养.

经计算，甲的总环数大于乙的总环数，因此甲为中国选手，乙为韩国选手，故 A 正确. 甲射击成绩的众数是 9，乙射击成绩的众数是 10，故 B 错误. 经计算，甲射击成绩的极差大于乙射击成绩的极差，故 C 错误. 甲射击成绩的中位数等于乙射击成绩的中位数，故 D 错误.

5. B 【解析】本题考查函数的极值点，考查运算求解能力.

$f'(x)=\frac{2}{x}+x-3=\frac{x^2-3x+2}{x}=\frac{(x-1)(x-2)}{x}$，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(2,+\infty)$ 上单调递增，在 $(1,2)$ 上单调递减，故 $a=2$.

6. C 【解析】本题考查平面向量的运算，考查运算求解能力.

由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，得 $m-1+m=0$，则 $m=\frac{1}{2}$，$\boldsymbol{b}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，$\boldsymbol{c}=(1,2)$，所以 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$.

7. B 【解析】本题考查指数、对数的大小，考查逻辑推理的核心素养.

因为 $a=\log_{0.99}0.98>\log_{0.99}0.99=1$，所以 $a>1$. 因为 $b=\pi^{-\frac{1}{3}}<\pi^0=1$，所以 $0<b<1$.

又 $c=\cos 9$[illegible]，所以 $a>b>c$.

8. A 【解析】本题考查几何概型，考查逻辑推理的核心素养.

当正六边形内的点落在以正六边形的中心为圆心，1 为半径的圆上或圆内时，该点到正六边形的中心的距离不大于 1. 因为 $S_{圆}=\pi\times1^2=\pi$，$S_{正六边形}=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2=6\sqrt{3}$，所以正六边形内的点到该正六边形中心的距离不超过 1 的概率 $P=\frac{S_{圆}}{S_{正六边形}}=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\pi}{18}$.

9. B 【解析】本题考查正四棱柱的外接球，考查空间想象能力.

设外接球的半径为 R，所以 $4\pi R^2=4\pi$，则 $R=1$，所以正四棱柱的高为 $\sqrt{2^2-1^2-1^2}=\sqrt{2}$，

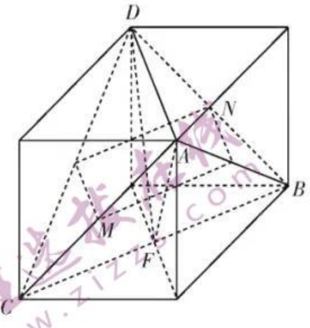
则该四棱柱的侧面积为 $4\sqrt{2}$.

10. A 【解析】本题考查抛物线的几何性质，考查数形结合的数学思想.

由题意得圆的方程为 $x^2+y^2=\frac{p^2}{4}$，联立 $\begin{cases}x^2+y^2=\frac{p^2}{4},\\ y^2=2px,\end{cases}$ 可得 $x^2+2px=\frac{p^2}{4}$，解得 $x=\frac{\sqrt{5}p}{2}-p$，所以 $|AF|=x+\frac{p}{2}=\frac{\sqrt{5}p}{2}-\frac{p}{2}=\sqrt{5}-1$，所以 $p=2$.

11. C 【解析】本题考查三角函数的图象，考查数学抽象以及逻辑推理的核心素养.

$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 的最小正周期分别为 π，π，2π，易知 c 为 $h(x)$. 当 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$h(x)=\sin x$ 取得最大值；当 $x=\frac{7\pi}{12}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 取得最小值；当 $x=\frac{2\pi}{5}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$g(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{5})$ 取得最小值. 结合图象可知，a 为 $g(x)$，b 为 $f(x)$，故选 C.



12. A 【解析】本题考查点、线、面的位置关系，考查空间想象能力.
可将正四面体放在正方体中研究，如图，可知③正确. 直线 MN∥平面 α 或直线 $MN\subset$平面 α，①错误. 正方体的上、下底面与平面 α 平行，因此，与平面 α 垂直的直线只能是与其四条侧棱平行或重合的直线. ②错误.

13. 11 【解析】本题考查复数的四则运算，考查逻辑推理的核心素养.
$(a+\mathrm{i})^2=a^2-1+2a\mathrm{i}=b+6\mathrm{i}$，则 $\begin{cases}2a=6,\\a^2-1=b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=3,\\b=8,\end{cases}$ 所以 $a+b=11$.

14. -6 【解析】本题考查线性规划，考查数形结合的数学思想.
画出可行域(图略)知，当 $l:z=y-3x$ 平移到过点 $(2,0)$ 时，z 取得最小值，且最小值为 -6.

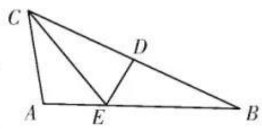
15. $\frac{7}{8}$ 【解析】本题考查函数的最值，考查运算求解能力.

$$y=\cos h(2x)+\sin h(x)=\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{(e^x-e^{-x})^2+(e^x-e^{-x})+2}{2}=\frac{(e^x-e^{-x}+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}{2}\geqslant\frac{7}{8}.$$

所以函数 $y=\cos h(2x)+\sin h(x)$ 的最小值为 $\frac{7}{8}$.

16. 5 【解析】本题考查数列的递推关系，考查逻辑推理的核心素养.
由题意，可得 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{11}{n(n+1)}=\frac{11}{n}-\frac{11}{n+1}$，$\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{11}{n+1}=\frac{1}{a_n}+\frac{11}{n}$.
令 $b_n=\frac{1}{a_n}+\frac{11}{n}$，则 $b_{n+1}=b_n$，即 $\{b_n\}$ 是常数列，所以 $b_n=\frac{1}{a_n}+\frac{11}{n}=b_1=\frac{1}{a_1}+11=2$，故 $a_n=\frac{n}{2n-11}$.
当 $0<n\leqslant5$ 时，$a_n<0$；当 $n\geqslant6$ 时，$a_n>0$. 故当 $n=5$ 时，S_n 取得最小值.

17. 解：(1) 由题意得 $10\times a+(0.020+0.030+0.025+0.020)\times10=1$，解得 $a=0.005$. ………………… 2分
设该组数据的中位数是 x，则 $10\times(0.005+0.020)+(x-70)\times0.030=0.5$， ………………… 4分
经计算，得 $x\approx78.33$，故该组数据的中位数约为 78.33. ………………… 6分
(2) 第1组人数为 $100\times10\times0.005=5$，则男生3人，女生2人. ………………… 7分
将男生记为 a,b,c，女生记为 A,B. 从这5人中随机抽取2人的情况有 $(a,b),(a,c),(a,A),(a,B),(b,c),(b,A),(b,B),(c,A),(c,B),(A,B)$，共10种；
被抽到的2人均为男生情况有 $(a,b),(a,c),(b,c)$，共3种. ………………… 10分
故被抽到的2人均为男生的概率 $P=\frac{3}{10}$. ………………… 12分
评分细则：
【1】第1问算出 a 的值得2分，求出中位数累积得6分；
【2】未说明情况，直接得出 $P=\frac{3}{10}$，扣3分.



18. 解：(1) 如图，连接 CE，则 $CE=EB=2$， ………………… 1分
在 $\triangle ACE$ 中，$\cos\angle CEA=\frac{CE^2+AE^2-AC^2}{2CE\cdot AE}=\frac{1+4-2}{2\times1\times2}=\frac{3}{4}$. ………………… 3分
因为 $\angle CEA=2\angle B$，所以 $\cos\angle CEA=1-2\sin^2B=\frac{3}{4}$. ………………… 5分
解得 $\sin B=\frac{\sqrt{2}}{4}$. ………………… 6分
(2) 由(1)可知 $\sin\angle CEA=\sqrt{1-(\frac{3}{4})^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$. ………………… 8分
则 $S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}\times1\times2\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{\sqrt{7}}{4}$. ………………… 10分
因为 $BE=2AE$，所以 $S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle ACE}=\frac{3\sqrt{7}}{4}$. ………………… 12分

评分细则：

【1】第 1 问也可以先求出角 A，得 2 分，利用余弦定理求出 BC，累积得 4 分，再利用正弦定理得出 $\sin B$，累积得 6 分；

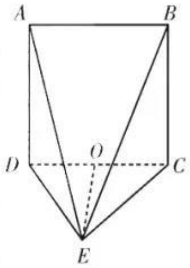
【2】第 2 问也可以根据第 1 问求出的 $\sin A$，求得 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=\frac{3\sqrt{7}}{4}$，正确即可得满分.

19. (1)证明：因为 $ABCD$ 是正方形，所以 $AD\perp CD$. …… 1 分

因为平面 $ABCD\perp$ 平面 DEC，平面 $ABCD\cap$ 平面 $DEC=DC$，

所以 $AD\perp$ 平面 DEC. …… 3 分

又 $EC\subset$ 平面 DEC，所以 $AD\perp EC$. …… 5 分



(2)解：因为 $AD/\!/BC$，所以 $BC\perp$ 平面 DEC，则 $\angle AED$ 和 $\angle BEC$ 分别是直线 AE，BE 与平面 DEC 所成的角，即 $\angle AED=\angle BEC=45^\circ$， …… 7 分

所以 $DE=EC=2$. …… 8 分

取 CD 的中点 O，连接 OE，所以 $OE\perp CD$.

因为平面 $ABCD\perp$ 平面 DEC，平面 $ABCD\cap$ 平面 $DEC=DC$，所以 $OE\perp$ 平面 $ABCD$，即 OE 为四棱锥 $E-ABCD$ 的高，且 $OE=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$. …… 10 分

所以四棱锥 $E-ABCD$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times2\times2\times\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. …… 12 分

评分细则：

【1】未证明 $OE\perp$ 平面 $ABCD$，直接求出四棱锥 $E-ABCD$ 的体积，扣 2 分；

【2】未证明 $AD\perp$ 平面 DEC 和 $BC\perp$ 平面 DEC，直接说明 $\angle AED$ 和 $\angle BEC$ 分别是直线 AE，BE 与平面 DEC 所成的角，扣 2 分；

【3】其他方法按步骤给分.

20. (1)解：由题意，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，[illegible] $\frac{1}{b^2}=1$. …… 2 分

解得 $a=2\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2}$. …… 4 分

因此椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$. …… 5 分

(2)证明：直线 l 的方程为 $x=my+\sqrt{2}$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 PA 的斜率为 k_1，直线 PB 的斜率为 k_2.

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1,\\ x=my+\sqrt{2},\end{cases}$ 消去 x，得 $(m^2+4)y^2+2\sqrt{2}my-6=0$.

易知 $\Delta=32m^2+96>0$，得 $y_1+y_2=\frac{-2\sqrt{2}m}{m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-6}{m^2+4}$. …… 8 分

$k_1k_2=\frac{y_1y_2}{(x_1-2\sqrt{2})(x_2-2\sqrt{2})}=\frac{y_1y_2}{(my_1-\sqrt{2})(my_2-\sqrt{2})}=\frac{y_1y_2}{m^2y_1y_2-\sqrt{2}m(y_1+y_2)+2}=-\frac{3}{4}$. …… 12 分

评分细则：

【1】其他方法参照评分标准按步骤给分.

21. (1)解：设 $F(x)=e^x-ax-1$，则 $F'(x)=e^x-a$.

当 $a\leqslant0$ 时，$F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，且 $F(0)=0$，当 $x<0$ 时，$F(x)<0$ 不符合题意，舍去. …… 2 分

当 $a>0$ 时，令 $F'(x)\geqslant0$，则 $x\geqslant\ln a$；令 $F'(x)<0$，则 $x<\ln a$. 故 $F(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增，故 $F(x)_{最小值}=F(\ln a)=e^{\ln a}-a\ln a-1=a-a\ln a-1$. …… 3 分

若 $F(x)\geqslant0$，则只需 $F(x)_{最小值}=a-a\ln a-1\geqslant0$，设 $h(a)=a-a\ln a-1$，则 $h'(a)=1-(\ln a+a\cdot\frac{1}{a})=-\ln a$，所以 $h(a)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，故 $h(a)\leqslant h(1)=1-0-1=0$. …… 5 分

因此，只有当 $a=1$ 时满足题意，即 $a=1$. …… 6 分

(2)证明：由(1)知，$\forall t\in\mathbf{R}$，$e^t\geqslant t+1$，当且仅当 $t=0$ 时，等号成立. …… 8 分

令 $t=x-\ln x$，代入可得 $e^{x-\ln x}\geqslant x-\ln x+1$，即 $\frac{e^x}{x}\geqslant x-\ln x+1$. …………………………………… 10 分

由(1)知，$e^x\geqslant x+1>x$，即 $x>\ln x$，故 $x-\ln x\neq 0$，因此 $\frac{e^x}{x}>x-\ln x+1$，即 $f(x)+x\cdot g(x)>x(1+x)$.
…………………………………………………………………………………… 12 分

评分细则：

【1】第 2 问另解：

要证 $f(x)+x\cdot g(x)>x(1+x)$，即证 $\frac{e^x}{x}+\ln x-x-1>0$. 设 $H(x)=\frac{e^x}{x}+\ln x-x-1$，

则 $H'(x)=\frac{e^x\cdot x-e^x}{x^2}-1+\frac{1}{x}=e^x\cdot\frac{x-1}{x^2}-\frac{x-1}{x}=\frac{x-1}{x}(\frac{e^x}{x}-1)$，…………………………… 8 分

由(1)知 $e^x\geqslant x+1>x$，故 $\frac{e^x}{x}-1>0$. …………………………………………………… 10 分

令 $H'(x)>0$，则 $x>1$；令 $H'(x)<0$，则 $0<x<1$. 故 $H(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.
当 $x=1$ 时，$H(x)$ 有极小值，即最小值，$H(1)=e-2>0$，故 $H(x)>0$，得证. ………………………… 12 分

【2】其他方法按步骤给分.

22. 解：(1)圆 C_1 的圆心为(1，0)，半径为 1，所以圆 C_1 的方程为 $(x-1)^2+y^2=1$. ………………………… 1 分

根据 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\\ x^2+y^2=\rho^2,\end{cases}$ 可得圆 C_1 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$，……………………………………… 3 分

因为圆 C_2 与圆 C_1 关于 y 轴对称，所以圆 C_2 的极坐标方程为 $\rho=-2\cos\theta$. …………………………… 5 分

(2)结合圆的对称性，设 $M(\rho_1,\theta)$，$N(\rho_2,\theta+\frac{\pi}{2})$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，…………………………………………… 6 分

故 $\triangle OMN$ 的面积为 $\frac{1}{2}|OM||ON|=\frac{\rho_1\rho_2}{2}=-\frac{1}{2}\times 2\cos\theta\times 2\cos(\theta+\frac{\pi}{2})=2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$，……… 8 分

当 $2\theta=\frac{\pi}{2}$，即 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，$\triangle OMN$ 的面积取得最大值 1. ………………………………………… 10 分

评分细则：

【1】第 1 问得到圆 C_1 的极坐标方程得 3 分，得到圆 C_2 的极坐标方程，累积得 5 分；

【2】第 2 问未说明 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，不扣分.

23. 解：(1)当 $a=1$ 时，$f(x)>1$ 化为 $|x+1|-2|x-1|-1>0$. …………………………………… 1 分
当 $x\leqslant -1$ 时，不等式化为 $x-4>0$，无解；………………………………………………… 2 分
当 $-1<x<1$ 时，不等式化为 $3x-2>0$，解得 $\frac{2}{3}<x<1$；……………………………………… 3 分
当 $x\geqslant 1$ 时，不等式化为 $-x+2>0$，解得 $1\leqslant x<2$. ……………………………………… 4 分
所以 $f(x)>1$ 的解集为 $\{x|\frac{2}{3}<x<2\}$. …………………………………………………… 5 分
(2)$f(x)+|x+a|=2|x+a|-2|x-1|\leqslant 2|a+1|$，…………………………………………… 7 分
由 $f(x)\leqslant 3a-|x+a|$，可得 $3a\geqslant 2|a+1|$，…………………………………………… 8 分
解得 $a\geqslant 2$，故 a 的取值范围为 $[2,+\infty)$. ………………………………………………… 10 分
评分细则：
【1】结果未写成集合或者区间形式，扣 1 分；
【2】其他方法参照评分标准按步骤给分.

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于中国拔尖人才培养的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户（官方网址：www.zizzs.com）、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承‘’专业、专注、有态度‘’的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+ 大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网 “年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的新高考拔尖人才培养服务平台。