2022 届高三暑假数学学科体验（时间：120 分钟　满分：150 分 ）

一、单项选择题（ 每题 5 分，共 40 分）

1．若直线 $x-2y+5=0$ 与直线 $2x+my-6=0$ 互相垂直，则实数 m 等于(　　)

A．-1　B．1　C.$\frac{1}{2}$　D．$-\frac{1}{2}$

2．圆 $x^2+y^2=4$ 与圆 $x^2+y^2+2y-6=0$ 的公共弦长为（　　）

A．1　　B．2　　C．$\sqrt{3}$　　D．$2\sqrt{3}$

3、设 $\{a_n\}$ 是等比数列，且 $a_1+a_2+a_3=1$，$a_2+a_3+a_4=2$，则 $a_6+a_7+a_8=$（　　）

A. 12　　B. 24　　C. 30　　D. 32

4．已知直线 $x-2y+m=0(m>0)$ 与直线 $x+ny-3=0$ 互相平行，且两者之间的距离是 $\sqrt{5}$，

则 $m+n$ 等于(　　　)

A．-1　B．0　C．1　D．2

5．　等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_3=2$，$S_6=18$，则 $\frac{S_{10}}{S_5}$ 等于(　　　)

A．-3　B．5　C．-31　D．33

6．　已知 F_1，F_2 是椭圆 C 的两个焦点，P 是 C 上的一点，若 $PF_1\perp PF_2$，且 $\angle PF_2F_1=60°$，

则椭圆 C 的离心率为（　　）

A．$1-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$2-\sqrt{3}$　　C．$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　　D．$\sqrt{3}-1$

7．椭圆 M：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右焦点分别为 F_1，F_2，P 为椭圆 M 上任一点，且 $|PF_1|\cdot|PF_2|$ 最大值取值范围为 $[2c^2，3c^2]$（其中 $c^2=a^2+b^2$），则椭圆 M 的离心率的取值范围是（　　　）

A．$[\frac{\sqrt{3}}{3}，\frac{\sqrt{2}}{2}]$　B．$[\frac{\sqrt{2}}{2}，1)$　　C．$[\frac{\sqrt{3}}{3}，1]$　　D．$[\frac{1}{3}，\frac{1}{2}]$

8．历史上数列的发展，折射出许多有价值的数学思想方法，对时代的进步起了重要的作用，比如意大利数学家列昂纳多·斐波那契以兔子繁殖为例，引入“兔子数列”：即 1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233，⋯. 即 $F(1)=F(2)=1$，$F(n)=F(n-1)+F(n-2)$，($n\geq 3$，$n\in N^*$). 此数列在现代物理及化学等领域有着广泛的应用，若此数列被 4 整除后的余数构成一个新的数列 $\{b_n\}$，则 $b_{2020}=$（　　　）

A．3　B．2　C．1　D．0

二、多项选择题（ 每题 5 分，共 20 分，错选 0 分，部分选对 2 分）

9、若 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $S_n=2a_n+1,(n\in N^*)$，则下列说法正确的是（　　）

A．$a_5=-16$　B．$S_5=-63$　C．数列 $\{a_n\}$ 是等比数列　D．数列 $\{S_n+1\}$ 是等比数列

10．已知直线 $ax+by+1=0$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切，则 $3a+2b$ 的值可以为（　　）

A．$3\sqrt{2}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{10}$　　D．$\sqrt{13}$

11．设F_1，F_2为椭圆C：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$的左、右焦点，$M$为$C$上一点且在第一象限，若$\triangle MF_1F_2$为等腰三角形，则下列结论正确的是（　　）

A．$MF_1=2$　B．$MF_2=2$　C．点M的横坐标为$\frac{8}{3}$　D．$S_{\triangle MF_1F_2}=\sqrt{35}$

12．已知点A是直线$l:x+y-\sqrt{2}=0$上一定点，点P、Q是圆$x^2+y^2=1$上的动点，若$\angle PAQ$的最大值为90°，则点A的坐标可以是（　　）

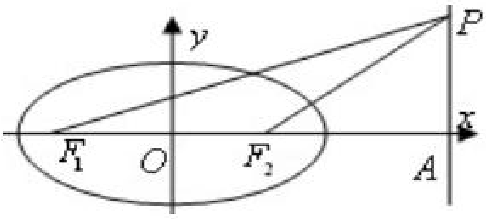
A．$\left(0,\sqrt{2}\right)$　B．$\left(1,\sqrt{2}-1\right)$　C．$\left(\sqrt{2},0\right)$　D．$\left(\sqrt{2}-1,1\right)$

三、填空题（每题5分，共20分）

13．在等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_4+a_8=16$，则该数列前11项的和S_{11}等于________

14．设点$A(2,-3)$，$B(-3,-2)$，直线m过$P(1,1)$且与线段AB相交，则直线m的斜率k的取值范围是________

15．设F_1，F_2是椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的左，右焦点，$P$为直线$x=\frac{3a}{2}$上一点，$\triangle F_2PF_1$是底角为$30^\circ$的等腰三角形，则$E$的离心率为________



16．设椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F$，椭圆$C$上的两点$A$，$B$关于原点对称，且满足$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=0$，$|FB|\le|FA|\le2|FB|$，则椭圆$C$的离心率的取值范围是________

四、解答题（本大题共6小题，17题10分，其他题12分，共70分．请写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17（10分）、设等比数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_2=4$，$a_3-a_1=8$．

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）记S_n为数列$\{\log_3 a_n\}$的前n项和．若$S_m+S_{m+1}=S_{m+3}$，求m．

18．(12分)已知点$A(5,1)$关于x轴的对称点为$B(x_1,y_1)$，关于原点的对称点为$C(x_2,y_2)$．

(1)求$\triangle ABC$中过AB，BC边上中点的直线方程；　(2)求$\triangle ABC$的面积．

19（12分）、已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=3n^2+8n$，$\{b_n\}$是等差数列，且$a_n=b_n+b_{n+1}$．

（Ⅰ）求数列$\{b_n\}$的通项公式；

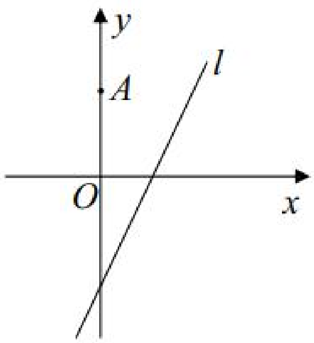
（Ⅱ）令$c_n=\frac{(a_n+1)^{n+1}}{(b_n+2)^n}$．求数列$\{c_n\}$的前$n$项和$T_n$．

20（12 分）. 设 F_1, F_2 分别是椭圆 E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，过点 F_1 的直线交椭圆 E 于 A,B 两点，$|AF_1|=3|BF_1|$

（Ⅰ）若 $|AB|=4$，ΔABF_2 的周长为 16，求 $|AF_2|$；

（Ⅱ）若 $\cos\angle AF_2B=\dfrac{3}{5}$，求椭圆 E 的离心率.

21（ 12 分）.如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(0,3)$，直线 $l: y=2x-4$。设圆 C 的半径为 1，圆心在 l 上。



（1）若圆心 C 也在直线 $y=x-1$ 上，过点 A 作圆 C 的切线，求切线的方程；

（2）若圆 C 上存在点 M，使 $|MA|=2|MO|$，求圆心 C 的横坐标 a 的取值范围。

22. （12 分）已知椭圆 C 的中心在坐标原点，焦点在 x 轴，长轴长为 $2\sqrt{3}$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

1）求椭圆 C 的方程

2）经过椭圆的左焦点 F_1 做直线 l，且直线 l 交椭圆 C 于 P，Q 两点，问 x 轴上是否存在一点 M，使得 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$ 为常数，若存在，求出 M 坐标及该常数，若不存在，说明理由

2022 届高三暑假数学学科体验 答案

一、单项选择题（ 每题 5 分，共 40 分）

1．答案 B 解析 由两直线垂直，得$\frac{1}{2}\times\left(-\frac{2}{m}\right)=-1$，解得 $m=1$.

2．答案 D 解析 求出圆心到直线的距离，然后用圆心，弦的端点，弦的中点构成的直角三角形求解

3、D 解析设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，则$a_1+a_2+a_3=a_1\left(1+q+q^2\right)=1$，

$a_2+a_3+a_4=a_1q+a_1q^2+a_1q^3=a_1q\left(1+q+q^2\right)=q=2$，

因此，$a_6+a_7+a_8=a_1q^5+a_1q^6+a_1q^7=a_1q^5\left(1+q+q^2\right)=q^5=32$.故选：D.

4． 答案 B 解析由题意知，所给两条直线平行，$\therefore n=-2$.由两平行间的距离公式，

得 $d=\frac{|m+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|m+3|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，解得 $m=2$ 或 $m=-8$(舍去)，$\therefore m+n=0$.

5．D 解析 设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，则由已知得 $q\neq1$.

$\because S_3=2$，$S_6=18$，$\therefore\frac{1-q^3}{1-q^6}=\frac{2}{18}$，得 $q^3=8$，$\therefore q=2$. $\therefore\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{1-q^{10}}{1-q^5}=1+q^5=33$

6．D【解析】由题设知$\angle F_1PF_2=90^\circ$，$\angle PF_2F_1=60^\circ$，$|F_1F_2|=2c$，

所以$|PF_2|=c$，$|PF_1|=\sqrt{3}c$，由椭圆的定义得$|PF_1|+|PF_2|=2a$，

即$\sqrt{3}c+c=2a$，所以$(\sqrt{3}+1)c=2a$，故椭圆 C 的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$

7．答案 A 解：可知$|PF_1|\bullet|PF_2|\le\left(\frac{|PF_1|+|PF_2|}{2}\right)^2=a^2$，$\therefore|PF_1|\bullet|PF_2|$的最大值为 a^2，

$\therefore$由题意知 $2c^2\le a^2\le3c^2$，$\therefore\sqrt{2}c\le a\le\sqrt{3}c$，$\therefore\frac{\sqrt{3}}{3}\le e\le\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8．A【解析】记“兔子数列”为$\{a_n\}$，则数列$\{a_n\}$每个数被 4 整除后的余数构成一个新的数列$\{b_n\}$

为$1,1,2,3,1,0,1,1,2,3,1,0,\cdots$，可得数列$\{b_n\}$构成一周期为 6 的数列，$\therefore b_{2020}=b_4=3$.

二、多项选择题（ 每题 5 分，共 20 分，错选 0 分，部分选对 2 分）

9、 【答案】AC【详解】因为S_n为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，且$S_n=2a_n+1,(n\in N^*)$，

所以$S_1=2a_1+1$，因此$a_1=-1$，当$n\ge2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}$，即$a_n=2a_{n-1}$，

所以数列$\{a_n\}$是以-1为首项，以 2 为公比的等比数列，故 C 正确；

因此 $a_5=-1\times 2^4=-16$，故 A 正确；

又 $S_n=2a_n+1=-2^n+1$，所以 $S_5=-2^5+1=-31$，故 B 错误；

因为 $S_1+1=0$，所以数列 $\{S_n+1\}$ 不是等比数列，故 D 错误.

10．答案 BCD 解 因为直线 $ax+by+1=0$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切，

所以圆心到直线的距离等于半径，即 $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$，则 $a^2+b^2=1$，

不妨令 $\begin{cases}a=\cos\theta\\b=\sin\theta\end{cases}$，$\theta\in[0,2\pi]$，

则 $3a+2b=3\cos\theta+2\sin\theta=\sqrt{13}\sin(\theta+\varphi)$，其中 $\tan\varphi=\frac{3}{2}$，

所以 $3a+2b=3\cos\theta+2\sin\theta=\sqrt{13}\sin(\theta+\varphi)\in\left[-\sqrt{13},\sqrt{13}\right]$，因为 $3\sqrt{2}>\sqrt{13}$，故 A 取不到；

$2\sqrt{2}$，$\sqrt{10}$，$\sqrt{13}$ 都在 $\left[-\sqrt{13},\sqrt{13}\right]$ 范围内，所以 BCD 都有可能取到.故选：BCD.

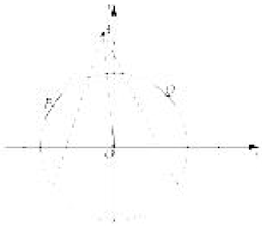
11.【答案】BCD 解析 “” 因为椭圆 C：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$，所以 $a=4,b=\sqrt{7},c=3$，因为 M 为 C 上一点且在第一象限，且 $\triangle MF_1F_2$ 为等腰三角形，所以 $MF_1>MF_2, MF_1=F_1F_2=2c=6$，且 $MF_2=2$，

在 $\triangle MF_1F_2$ 中，由余弦定理得：$\cos\angle MF_1F_2=\frac{MF_1^2+F_1F_2^2-MF_2^2}{2MF_1\cdot F_1F_2}=\frac{6^2+6^2-2^2}{2\times6\times6}=\frac{17}{18}$，

所以 $x_M=MF_1\cdot\cos\angle MF_1F_2-c=6\times\frac{17}{18}-3=\frac{8}{3}$，所以 $\sin\angle MF_1F_2=\sqrt{1-\left(\frac{17}{18}\right)^2}=\frac{\sqrt{35}}{18}$，

所以 $S_{\triangle MF_1F}=\frac{1}{2}\times MF_1\times F_1F_2\times\sin\angle MF_1F=\frac{1}{2}\times6\times6\times\frac{\sqrt{35}}{18}=\sqrt{35}$，

12．答案 AC 解析 如右图所示：



原点到直线l的距离为$d=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1^2+1^2}}=1$，则直线$l$与圆$x^2+y^2=1$相切，

由图可知，当AP、AQ均为圆$x^2+y^2=1$的切线时，$\angle PAQ$取得最大值，

连接OP、OQ，由于$\angle PAQ$的最大值为90°，且$\angle APO=\angle AQO=90^\circ$，$|OP|=|OQ|=1$，则四边形$APOQ$为正方形，所以$|OA|=\sqrt{2}|OP|=\sqrt{2}$，

由两点间的距离公式得$|OA|=\sqrt{t^2+\left(\sqrt{2}-t\right)^2}=\sqrt{2}$，

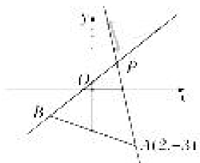
整理得$2t^2-2\sqrt{2}t=0$，解得$t=0$或$\sqrt{2}$，因此，点A的坐标为$\left(0,\sqrt{2}\right)$或$\left(\sqrt{2},0\right)$.

三、填空题（每题5分，共20分）

13. 答案 88 解析 $S_{11}=\dfrac{11(a_1+a_{11})}{2}=\dfrac{11(a_4+a_8)}{2}=\dfrac{11\times16}{2}=88$.

14. 答案 $k\geqslant\dfrac{3}{4}$或$k\leqslant-4$ 解析 建立如图所示的直角坐标系.

由图可得$k\geqslant k_{PB}$或$k\leqslant k_{PA}$. $\because k_{PB}=\dfrac{3}{4}$，$k_{PA}=-4$，$\therefore k\geqslant\dfrac{3}{4}$或$k\leqslant-4$.



15. 答案：$\dfrac{3}{4}$ 解：由题意，知$\angle F_2F_1P=\angle F_2PF_1=30^\circ$，$\therefore\angle PF_2x=60^\circ$.

$\therefore|PF_2|=2\times\left(\dfrac{3}{2}a-c\right)=3a-2c$. $\because|F_1F_2|=2c$，$|F_1F_2|=|PF_2|$，

$\therefore 3a-2c=2c$，$\therefore e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{4}$.

16. 【答案】$\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right]$

解：设椭圆左焦点为F'，由椭圆的对称性可知，四边形$AFBF'$为平行四边形，

又$\overline{FA}\cdot\overline{FB}=0$，即$FA\perp FB$，故平行四边形$AFBF'$为矩形，所以$|AB|=|FF'|=2c$.

设$|AF'|=n$，$|AF|=m$，则在$Rt\triangle F'AF$中，$m+n=2a$ ①，$m^2+n^2=4c^2$ ②，联立①②得$mn=2b^2$ ③.

②÷③得$\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{m}=\dfrac{2c^2}{b^2}$，令$\dfrac{m}{n}=t$，得$t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{2c^2}{b^2}$.

又由 $|FB|\le|FA|\le2|FB|$ 得 $\frac{m}{n}=t\in[1,2]$，所以 $t+\frac{1}{t}=\frac{2c^2}{b^2}\in\left[2,\frac{5}{2}\right]$.

故椭圆 C 的离心率的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{5}}{3}\right]$.

四、解答题（本大题共 6 小题，17 题 10 分，其他题 12 分，共 70 分.

请写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17、【详解】(1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，根据题意，有 $\begin{cases}a_1+a_1q=4\\a_1q^2-a_1=8\end{cases}$， 2 分

解得 $\begin{cases}a_1=1\\q=3\end{cases}$， 所以 $a_n=3^{n-1}$； 5 分

(2) 令 $b_n=\log_3 a_n=\log_3 3^{n-1}=n-1$， 6 分

所以 $S_n=\frac{n(0+n-1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$， 7 分

根据 $S_m+S_{m+1}=S_{m+3}$，可得 $\frac{m(m-1)}{2}+\frac{m(m+1)}{2}=\frac{(m+2)(m+3)}{2}$， 8 分

整理得 $m^2-5m-6=0$，因为 $m>0$，所以 $m=6$， 10 分

18 解 (1)∵点 $A(5,1)$ 关于 x 轴的对称点为 $B(x_1, y_1)$，∴$B(5, -1)$，

又∵点 $A(5,1)$ 关于原点的对称点为 $C(x_2, y_2)$， ∴$C(-5, -1)$，

∴AB 的中点坐标是 $(5,0)$，BC 的中点坐标是 $(0, -1)$. -------4 分

过 $(5,0)$，$(0, -1)$ 的直线方程是 $\frac{y-0}{-1-0}=\frac{x-5}{0-5}$，整理得 $x-5y-5=0$.--------6 分

(2) 易知 $|AB|=|-1-1|=2$，$|BC|=|-5-5|=10$，$AB\perp BC$，-------9 分

∴△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}|AB|\cdot|BC|=\frac{1}{2}\times2\times10=10$.----------------12 分

19、解：(1) 因为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=3n^2+8n$，所以 $a_1=11$，----1 分

当 $n\ge2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=3n^2+8n-3(n-1)^2-8(n-1)=6n+5$，---- 2 分

又 $a_n=6n+5$ 对 $n=1$ 也成立，所以 $a_n=6n+5$， ---- ---- 3 分

又因为 $\{b_n\}$ 是等差数列，设公差为 d，则 $a_n=b_n+b_{n+1}=2b_n+d$.

当 $n=1$ 时，$2b_1=11-d$；当 $n=2$ 时，$2b_2=17-d$，解得 $d=3$，---- 5 分

所以数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=\frac{a_n-d}{2}=3n+1$---- 6 分

（Ⅱ）由 $c_n=\dfrac{(a_n+1)^{n+1}}{(b_n+2)^n}=\dfrac{(6n+6)^{n+1}}{(3n+3)^n}=(3n+3)\cdot 2^{n+1}$， ---- 7 分

于是 $T_n=6\cdot 2^2+9\cdot 2^3+12\cdot 2^4+\cdots+(3n+3)\cdot 2^{n+1}$，

两边同乘以 2，得 $2T_n=6\cdot 2^3+9\cdot 2^4+\cdots+(3n)\cdot 2^{n+1}+(3n+3)\cdot 2^{n+2}$，

两式相减，得 $-T_n=6\cdot 2^2+3\cdot 2^3+3\cdot 2^4+\cdots+3\cdot 2^{n+1}-(3n+3)\cdot 2^{n+2}$ --- 10 分

$=3\cdot 2^2+\dfrac{3\cdot 2^2(1-2^n)}{1-2}-(3n+3)\cdot 2^{n+2}$

$T_n=-12+3\cdot 2^2(1-2^n)+(3n+3)\cdot 2^{n+2}=3n\cdot 2^{n+2}$． ---- 12 分

20.【解析】：（Ⅰ）由 $|AF_1|=3|F_1B|$, $|AB|=4$ 得 $|AF_1|=3$, $|F_1B|=1$。

因为 ΔABF_2 的周长为 16，所以由椭圆定义可得 $4a=16$, $|AF_1|+|AF_2|=2a=8$ -----4 分

故 $|AF_2|=2a-|AF_1|=8-3=5$。 -------------6 分

（Ⅱ）设 $|F_1B|=k$，则 $k>0$ 且 $|AF_1|=3k$, $|AB|=4k$，由椭圆定义可

$|AF_2|=2a-3k$, $|BF_2|=2a-k$

在 ΔABF_2 中，由余弦定理可得 $|AB|^2=|AF_2|^2+|BF_2|^2-2|AF_2|\cdot|BF_2|\cdot\cos\angle AF_2B$

即 $(4k)^2=(2a-3k)^2+(2a-k)^2-\dfrac{6}{5}(2a-3k)\cdot(2a-k)$ -------8 分

化简可得 $(a+k)\cdot(a-3k)=0$，而 $a+k>0$，故 $a=3k$ 于是有

$|AF_2|=3k=|AF_1|$, $|BF_2|=5k$，

因此 $|BF_2|^2=|AF_2|^2+|AB|^2$，可得 $AF_1\perp AF_2$

故 ΔAF_1F_2 为等腰直角三角形，从而 $c=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，所以椭圆的离心 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ---12 分

21.解：（1）由题设点 $C(a,2a-4)$，又 C 也在直线 $y=x-1$ 上，

$\therefore 2a-4=a-1 \therefore a=3 \therefore \odot C:(x-3)^2+(y-2)^2=1$， -------2 分

由题，过 A 点切线方程可设为 $y=kx+3$，即 $kx-y+3=0$，

则 $\dfrac{|3k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得：$k=0,-\dfrac{3}{4}$，$\therefore$ 所求切线为 $y=3$ 或 $y=-\dfrac{3}{4}x+3$ -------4 分

（2）设点 $C(a,2a-4)$，$M(x_0,y_0)$，$\because MA=2MO$，$A(0,3)$，$O(0,0)$，

$\therefore x_0^2+(y_0-3)^2=4(x_0^2+y_0^2)$，即 $x_0^2+y_0^2=3-2y_0$，又点 M 在圆 C 上，

$\therefore (x_0-a)^2+(y_0-2a+4)^2=1$，两式相减得

$ax_0+(2a-3)y_0-(\frac{5a^2}{2}-8a+9)=0$，

由题以上两式有公共点，$\therefore \frac{|a^2+(2a-3)(2a-4)-(\frac{5a^2}{2}-8a+9)|}{\sqrt{a^2+(2a-3)^2}}\le 1$ --------8 分

整理得：$|\frac{5a^2}{2}-6a+3|\le\sqrt{5a^2-12a+9}$，即 $(5a^2-12a+6)^2\le 4(5a^2-12a+9)$，

令 $t=5a^2-12a+6$，则 $t^2\le 4(t+3)$，解得：$-2\le t\le 6$，$\therefore -2\le 5a^2-12a+6\le 6$，

解得：$0\le a\le\frac{12}{5}$．-------12 分

22. 解：（I）设椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$．

由题意，得 $\begin{cases}2a=2\sqrt{3}\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\sqrt{3}\\ c=1\end{cases}$，所以 $b^2=2$．所求的椭圆方程为 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$．----4 分

（II）由（I）知 $F_1(-1,0)$．假设在 x 轴上存在一点 $M(t,0)$，使得 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$ 恒为常数．

①当直线 l 与 x 轴不垂直时，设其方程为 $y=k(x+1)$，$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$．

由 $\begin{cases}y=k(x+1)\\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$，得 $(2+3k^2)x^2+6k^2x+(3k^2-6)=0$．

所以 $x_1+x_2=-\frac{6k^2}{2+3k^2}$，$x_1x_2=\frac{3k^2-6}{2+3k^2}$．……………7 分

$$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=(x_1-t)(x_2-t)+y_1y_2=(x_1-t)(x_2-t)+k^2(x_1+1)(x_2+1)$$

$$=(k^2+1)x_1x_2+(k^2-t)(x_1+x_2)+k^2+t^2$$

$$=\frac{(k^2+1)(3k^2-6)}{2+3k^2}-\frac{(k^2-t)\cdot 6k^2}{2+3k^2}+k^2+t^2=\frac{(6t-1)k^2-6}{2+3k^2}+t^2$$

$$=\frac{(2t-\frac{1}{3})(2+3k^2)-(4t+\frac{16}{3})}{2+3k^2}+t^2=t^2+2t-\frac{1}{3}-\frac{4t+\frac{16}{3}}{2+3k^2}.$$

因为$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$是与$k$无关的常数，从而有$4t+\frac{16}{3}=0$，即$t=-\frac{4}{3}$.

此时$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=-\frac{11}{9}$.　　……………10 分

②当直线l与x轴垂直时，此时点P、Q的坐标分别为$\left(-1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$、$\left(-1,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，

当$t=-\frac{4}{3}$时，亦有$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=-\frac{11}{9}$.

综上，在x轴上存在定点$M(-\frac{4}{3},0)$，使得$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$恒为常数，且这个常数为$-\frac{11}{9}$

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 ″ 专业、专注、有态度 ″ 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。