

高二期末联考 数学试题

本试卷共 8 页,22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 非选择题的作答:用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 考试结束后,请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 \leq 0, x \in \mathbf{Z}\}$, $B = \left\{x \mid y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right\}$, 则 $A \cap B$ 真子集的个数为

A. 7 B. 8 C. 15 D. 16

2. 1748 年,瑞士数学家欧拉发现了复指数函数和三角函数的关系,并写出以下公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x (x \in \mathbf{R}, i \text{ 为虚数单位})$, 这个公式在复变论中占有非常重要的地位,被誉为“数学中的天桥”。根据此公式,化简 $(e^{\frac{\pi}{2}i})^{2024} + e^{\frac{\pi}{2}i}$ 的结果为

A. 2 B. 2i
C. 1+i D. 1-i

3. 已知 $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, 且 $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = m (m > 0)$, 则 $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) =$

A. $\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$ B. $-\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$ C. $\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}$ D. $-\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}$

4. 已知向量 a, b 满足 $|a+b| = |a-2b|$, $|b| = 1$, 则 $|a| \cos \langle a, b \rangle =$

A. -2 B. 2 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

5. “五一”假期期间,某旅游景区为加强游客的安全工作,决定增派甲、乙、丙、丁四位工作人员到 A、B、C 三个景点进行安全防护宣传,增派的每位工作人员必须到一个景点,且只能到一个景点做安全防护宣传,每个景点至少增派一位工作人员. 因工作需要,乙不能去 A 景点,甲和乙不能同去一个景点,则不同的安排方法数为

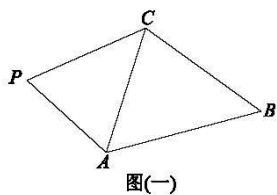
A. 20 B. 30 C. 42 D. 60

数学试题 第 1 页 (共 8 页)

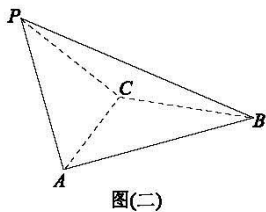
11. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别是 F_1, F_2 , 渐近线方程为 $3x \pm y = 0$, 点 $R(4, 6\sqrt{3})$ 在双曲线 E 上, 点 M 为双曲线右支上任一点, 则
- A. 双曲线的离心率为 $\sqrt{5}$
 - B. 右焦点 F_2 到渐近线的距离为 6
 - C. 过双曲线右焦点 F_2 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 当 $|AB| = 30$ 时, 直线 l 有 3 条
 - D. 若直线 MF_1 与双曲线 E 的另一个交点为 P , Q 为 MP 的中点, O 为原点, 则直线 OQ 与直线 PM 的斜率之积为 9
12. 乒乓球, 被称为中国的“国球”, 是一种世界流行的球类体育项目, 包括进攻、对抗和防守. 某乒乓球协会组织职工比赛, 比赛规则采用五局三胜制, 当参赛选手甲和乙两位中有一位赢得三局比赛时, 就由该选手晋级且比赛结束. 每局比赛皆须分出胜负, 且每局比赛的胜负相互独立. 假设甲在任一局赢球的概率为 $p (0 \leq p \leq 1)$, 有选手晋级所需要比赛局数的期望值记为 $f(p)$, 则
- A. 打满五局的概率为 $C_4^3 p^2 (1-p)^2$
 - B. $f(p)$ 的常数项为 3
 - C. 函数 $f(p)$ 在 $(\frac{1}{2}, 1]$ 上单调递增
 - D. $f(\frac{1}{2}) = \frac{33}{8}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 2023 年 3 月, 某市为创建文明城市, 随机从某小区抽取 10 位居民调查他们对自己目前生活状态的满意程度, 该指标数越接近 10 表示满意程度越高. 他们的满意度指标数分别是 8, 5, 6, 6, 9, 8, 9, 7, 10, 10, 则这组数据的 30% 分位数是_____.
14. 为加强学生对平面图形翻折到空间图形的认识, 某数学老师充分利用习题素材开展活动, 现有一个求外接球表面积的问题, 活动分为三个步骤, 第一步认识平面图形: 如图(一)所示的四边形 $PABC$ 中, $AB = BC = 2$, $PA = PC$, $\angle ABC = 60^\circ$, $PA \perp PC$. 第二步: 以 AC 为折痕将 $\triangle PAC$ 折起, 得到三棱锥 $P-ABC$, 如图(二). 第三步: 折成的二面角 $P-AC-B$ 的大小为 120° , 则活动结束后计算得到三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为_____.



图(一)



图(二)

数学试题 第 3 页 (共 8 页)

15. 已知函数 $f(x) = ax + e$ ($a > 0$), $g(x) = xe^x$, 若 $\forall x_2 \in (-\infty, 1]$, $\exists x_1 \in [-1, 2]$, 使 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x, & x \leq 0 \\ -\ln x, & x > 0 \end{cases}$, 若 $F(x) = f(f(x) - t)$ 有 5 个零点, 则实数 t 的取值范围是_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $b = 2\sqrt{3}$, $2a \sin C \cos B = a \sin A - b \sin B + \frac{\sqrt{3}}{2} b \sin C$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{9}{2}$.

(1) 求 A ;

(2) 以 C 为圆心, r 为半径的圆与边 AB 有两个交点, 求 r 的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)

在① $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2^{n+1} - 2$; ② $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = 2^{\frac{n^2+n}{2}}$ 两个条件中任选一个, 补充在下面的横线上并作答.

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若_____, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 当 $n \in \left[\frac{a_k}{2}, \frac{a_{k+1}}{2}\right)$, $k \in \mathbf{N}^*$ 时, 求区间 $\left[\frac{a_k}{2}, \frac{a_{k+1}}{2}\right)$ 上所有整数 n 的和

T 的表达式.

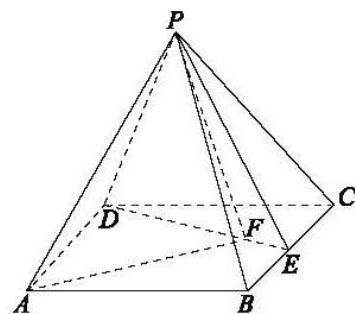
注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为菱形, $AB=2$, $\angle BAD=60^\circ$, $\triangle PBC$ 为正三角形. 点 E 为 BC 的中点, 点 F 在线段 DE 上运动.

(1) 求证: $BC \perp PF$;

(2) 若二面角 $A-BC-P$ 的大小为 60° , 当 $3\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{DF}$ 时, 求证: 直线 PB 与平面 PAF 所成的角小于 $\frac{\pi}{6}$.



20. (本小题满分 12 分)

某商场在“五一”期间开展有奖促销活动,规则如下:对一次性购买物品超过 2 000 元的参与者,该商场现有以下两种方案可供选择:

方案一:在一个放有大小相同的 3 个红球和 3 个白球的不透明的箱子中,参与者随机摸出一个球,若是红球,则放回箱子中;若是白球,则不放回,再向箱子中补充一个红球,这样反复进行 3 次,若最后箱子中红球的个数为 X ,则该参与者获得奖金 X 百元;

方案二:在一个放有大小相同的 3 个红球和 3 个白球的不透明的箱子中,参与者一次性摸出 3 个球,把白球换成红球再全部放回袋中,设袋中红球个数为 Y ,则该参与者获得奖金 Y 百元.

(1)若用方案一,求 X 的分布列与数学期望;

(2)若你是参与者,从期望的角度出发,你会选择哪种参考方案? 请说明理由.



21. (本小题满分 12 分)

已知抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 上一点 $M(m, 1)$ 到焦点的距离为 2.

(1)求抛物线 C 的方程;

(2)过点 $(-1, 0)$ 的直线交抛物线 C 于 A, B 两点,点 $Q(0, -2)$,连接 QA 交抛物线 C 于另一点 E ,连接 QB 交抛物线 C 于另一点 F ,且 $\triangle QAB$ 与 $\triangle QEF$ 的面积之比为 $1:3$,求直线 AB 的方程.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = ae^x - x^2 + 3 (a \in \mathbf{R})$.

(1) 若方程 $f(x) = 0$ 有 3 个零点, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若 $\varphi(x) = -x^2 + 2x + 4 - f(x)$ 有两个零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 求证:

$$0 < a < \frac{2\sqrt{e}}{e}, \text{ 且 } \sqrt{\frac{2x_2+1}{2x_1+1}} < \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 + x_1}.$$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 (网址: www.zizzs.com) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注**自主选拔在线**官方微信号: **zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线