文科数学参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	A	B	B	C	D	C	D	D	D	A

【解析】

1．$B=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$，设 $A\cap B=\{-1,\ 0,\ 1\}$，故选 C.

2．$z=\dfrac{1}{1-3\mathrm{i}}=\dfrac{1}{10}+\dfrac{3}{10}\mathrm{i}$，$\therefore \bar{z}=\dfrac{1}{10}-\dfrac{3}{10}\mathrm{i}$，故选 D.

3．$\because \log_{0.5}0.2>\log_{0.5}0.5=1$，$\therefore a>1$，又 $c=\dfrac{1}{2}=0.5^1<0.5^{0.2}<0.5^0=1$，$\therefore 1>b>c$，$\therefore a>b>c$，

故选 A.

4．该几何体是一个 4 个面都是直角三角形的三棱锥，如图 1 所示，

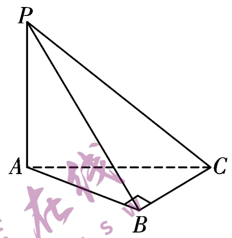

图 1

$\therefore S_{表面积}=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2+\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 2+\dfrac{1}{2}\times$

$2\sqrt{2}\times 2+\dfrac{1}{2}\times 2\times 2=4+4\sqrt{2}$，故选 B.

5．不超过 15 的素数有 2，3，5，7，11，13，共 6 个，从中取出 2 个不同的数有 15 种，其中取出的两个数之差的绝对值为 2 的有 (3，5)，(5，7)，(11，13)，共 3 种，所以所求的概率是 $\dfrac{3}{15}=\dfrac{1}{5}$，故选 B.

6．$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 60^\circ=2\times 1\times\dfrac{1}{2}=1$，$\therefore(\vec{a}-2\vec{b})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2=-1$，$\because|\vec{a}-2\vec{b}|=$

$\sqrt{\vec{a}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2}=\sqrt{4-4+4}=2$，$\therefore\cos\langle\vec{a}-2\vec{b},\ \vec{b}\rangle=\dfrac{(\vec{a}-2\vec{b})\cdot\vec{b}}{|\vec{a}-2\vec{b}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{-1}{2\times 1}=-\dfrac{1}{2}$，$\therefore$ $\vec{a}-2\vec{b}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角是 120°，故选 C.

7．$a_1+a_3+a_5=a_1(1+q^2+q^4)=1+q^2+q^4=7$，$\therefore q^2=2$ 或 -3，$\therefore a_3a_5a_7=a_1q^2a_1q^4a_1q^6=a_1^3\cdot q^{12}$

$=(q^2)^6=64$，故选 D.

8．选项 A：$f(-\pi+x)=f(x)$, 故 A 正确；选项 B：$f\left(\frac{7}{12}\pi\right)=\sin\frac{3}{2}\pi=-1$，故 B 正确；选项 C：$\because x\in\left(0,\ \frac{\pi}{6}\right)$, $\therefore 2x+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}\right)$, $y=\sin x$在$\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}\right)$上不单调，故 C 错误；选项 D：$y=\sin 2x$ 向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位得到 $y=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，故 D 正确，故选 C.

9．$\because BF$ 垂直于 x 轴，$\therefore B\left(c,\ \frac{b^2}{a}\right)$，$\because A(-a,\ 0)$，$\therefore k_{AB}=\frac{\frac{b^2}{a}-0}{c+a}=2$，$\therefore \frac{b^2}{a}=2(c+a)$，$\therefore b^2=2a(c+a)$，$\therefore c^2-a^2=2ac+2a^2$，$\therefore c^2-2ac-3a^2=0$，$\therefore e^2-2e-3=0$，$\therefore e=3$ 或 -1(舍)，故选 D.

10．易知 Rt$\triangle ABC$ 的外接圆直径为 AC，所以半径长为 $\frac{5}{2}$，设外接球半径为 R，则 $R^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{17}{2}$，$\therefore S_1=4\pi R^2=34\pi$，设 Rt$\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r，则 $\frac{1}{2}\times(3+4+5)\bullet r=\frac{1}{2}\times 3\times 4$，$\therefore r=1$，$\because 2r=2<3$，故该直三棱柱内半径最大的球的半径为 r，$\therefore S_2=4\pi r^2=4\pi$，$\therefore \frac{S_1}{S_2}=\frac{34\pi}{4\pi}=\frac{17}{2}$，故选 D.

11．设直线 $y=\frac{3}{2}(x-1)$，由 $\begin{cases} y=\frac{3}{2}(x-1), \\ y^2=2px, \end{cases}$ 得 $3y^2-4py-6p=0$，设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则 $y_1+y_2=\frac{4p}{3}$①，$y_1y_2=-2p$②，又 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，$\therefore y_1=-3y_2$③，由①②③得 $p=\frac{3}{2}$，故选 D.

12．$f(x)=\frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}+\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x+\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$，设 $g(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$，则 $f(x)=\frac{1}{2}+g(x)$，$\therefore a=f(\ln 2)=\frac{1}{2}+g(\ln 2)$，$b=f(\ln\frac{1}{2})=f(-\ln 2)=\frac{1}{2}+g(-\ln 2)$，又 $g(-x)=-g(x)$，$\therefore g(x)$ 为奇函数，$\therefore g(\ln 2)+g(-\ln 2)=0$，$\therefore a+b=1+g(\ln 2)+g(-\ln 2)=1$，故选 A.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	$[-1,\ 2]$	4	193	②④

【解析】

13．作出可行域如图 2 中阴影部分所示，其中 $A(1,\ 2),\ B(1,\ -1),\ C(3,\ 0)$，$z=\dfrac{y}{x}=\dfrac{y-0}{x-0}$ 可看作可行域内的点 $(x,\ y)$ 与原点的连线的斜率，由图可知 $z\in[-1,\ 2]$．

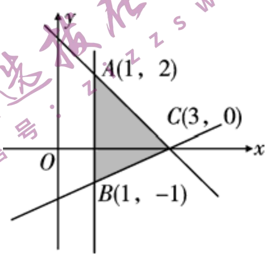

图 2

14．$2^a+\dfrac{1}{4^b}=2^a+2^{-2b}\geqslant 2\sqrt{2^{a-2b}}=4$，当且仅当 $\begin{cases}a=-2b,\\ a-2b=2,\end{cases}$ 即 $a=1,\ b=-\dfrac{1}{2}$ 时取“＝”，故 $2^a+\dfrac{1}{4^b}$ 的最小值为 4．

15．$a_1+a_2=a_1(1+q)=6,\ a_1-a_3=a_1(1-q^2)=-6,\ \therefore a_1=2,\ q=2$，所以 $\{a_n\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列，$\therefore a_n=2^n$，当 $m=1$ 时，$b_1=0$；当 $2^n\leqslant m<2^{n+1}$ 时，$b_m=n,\ \therefore S_{50}=b_1+(b_2+b_3)+(b_4+b_5+b_6+b_7)+(b_8+b_9+\cdots+b_{15})+(b_{16}+b_{17}+\cdots+b_{31})+(b_{32}+b_{33}+\cdots+b_{50})=$
$0+1\times2+2\times2^2+3\times2^3+4\times2^4+5\times(50-31)=193$．

16．①当 $m=n>0$ 时，曲线 C 可化为 $x^2+y^2=\dfrac{1}{n}$，它表示半径为 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 的圆，故①错误；②当 $m>n>0$ 时，曲线 C 可化为 $\dfrac{x^2}{\frac{1}{m}}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{n}}=1$，又 $0<\dfrac{1}{m}<\dfrac{1}{n}$，所以曲线 C 表示焦点在 y 轴上椭圆，其离心率为 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}}{\frac{1}{n}}}=\sqrt{\dfrac{m-n}{m}}$，故②正确；③当 $m=0,\ n>0$ 时，曲线 C 可化为 $y^2=\dfrac{1}{n}$，即 $y=\pm\sqrt{\dfrac{1}{n}}$，它表示两条与 x 轴平行的直线，故③错误；④当 $mn<0$ 时，曲线 C 是双曲线，令 $mx^2+ny^2=0$，则渐近线为 $y=\pm\sqrt{-\dfrac{m}{n}}x$，故④正确．

三、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 12 分）

解：（1）$\because c\sin A=a\cos\left(C-\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\therefore \sin C\sin A=\sin A\cos\left(C-\dfrac{\pi}{6}\right)$，

$\because \sin A\neq 0$，$\therefore \sin C=\cos\left(C-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\dfrac{1}{2}\sin C$，

$\therefore \sin C=\sqrt{3}\cos C$，$\therefore \tan C=\sqrt{3}$，

$\because 0<C<\pi$，$\therefore C=\dfrac{\pi}{3}$. ……………………………………………（6 分）

（2）$c\cdot\cos B+b\cdot\cos C=c\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+b\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=a$，$\therefore a=1$，

$\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，

$\therefore b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}=\dfrac{\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)}{\sin A}=\dfrac{\dfrac{1}{2}\sin A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A}{\sin A}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2\tan A}$，

$\because \triangle ABC$ 为锐角三角形，$\therefore \dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore \tan A>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore 0<\dfrac{1}{\tan A}<\sqrt{3}$，$\therefore 0<\dfrac{\sqrt{3}}{2\tan A}<\dfrac{3}{2}$，

$\therefore b\in\left(\dfrac{1}{2},\ 2\right)$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{4}b\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{8},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. ……………………………………（12 分）

（其他解法酌情给分）

18.（本小题满分 12 分）

（1）证明：如图 3，取 AD 的中点 O，连接 OB，OP，BD，

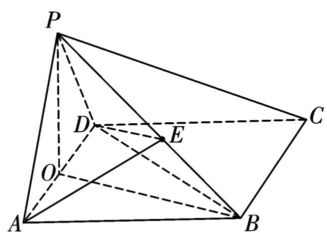

图 3

$\because PA=PD$，$\therefore OP\perp AD$，

$\because BD=AB$，$\therefore OB\perp AD$，

又 $OP\cap OB=O$，则 $AD\perp$ 平面 POB，

$\because PB\subset$ 平面 POB，$\therefore AD\perp PB$. ……………………………………………（6 分）

（2）解：$\because$ 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$， 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$，$PO \perp AD$，

$\therefore PO \perp$ 平面 $ABCD$，

$\because E$ 是 PB 的中点，

$\therefore V_{P-ADE} = V_{B-ADE} = \frac{1}{2}V_{P-ABD} = \frac{1}{4}V_{P-ABCD}$

$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 \times \sqrt{3}$

$= \frac{1}{2}$. ……………………………………………………………（12 分）

19．（本小题满分 12 分）

解：（1）2×2 列联表如下：

	学习成绩优秀	学习成绩不优秀	合计
在校期间使用手机	20	80	100
在校期间不使用手机	40	10	50
合　计	60	90	150

K^2 的观测值 $k = \frac{150\times(20\times10-40\times80)^2}{100\times50\times60\times90} = 50 > 10.828$，

所以有 99.9% 的把握认为“在校期间使用手机和学习成绩有关”.

……………………………………………………（6 分）

（2）从学习成绩优秀的学生中按在校期间是否使用手机分层抽样选出 6 人，

其中在校期间使用手机的学生有 $20\times\frac{6}{60}=2$ 人，

在校期间不使用手机的学生有 $40\times\frac{6}{60}=4$ 人.

记这 6 个学生分别为 Y_1，Y_2，N_1，N_2，N_3，N_4，

从这 6 人中选出 2 人的所有可能情况：Y_1Y_2，Y_1N_1，Y_1N_2，Y_1N_3，Y_1N_4，Y_2N_1，Y_2N_2，Y_2N_3，Y_2N_4，N_1N_2，N_1N_3，N_1N_4，N_2N_3，N_2N_4，N_3N_4，共 15 种，其中至少有一人在校使用手机的情况有 9 种，

故至少有一人在校使用手机的概率 $P=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$. ……………………………………（12 分）

20．（本小题满分 12 分）

解：（1）由题意得 $\begin{cases}\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1,\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ a^2-b^2=c^2,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}a^2=8,\\ b^2=2,\\ c^2=6,\end{cases}$

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$． ……………………………………………（4 分）

（2）由题可知 l 的斜率一定存在，故设 l： $y=k(x+4)$,

由 $\begin{cases}y=k(x+4)\ ,\\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2+32k^2x+64k^2-8=0$,

由 $\Delta>0$ 得，$-\dfrac{1}{2}<k<\dfrac{1}{2}$,

设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则

$x_1+x_2=\dfrac{-32k^2}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{64k^2-8}{4k^2+1}$,

又点 $P(-2,\ -1)$，$\therefore k_{PA}=\dfrac{y_1+1}{x_1+2}$，$k_{PB}=\dfrac{y_2+1}{x_2+2}$,

$\therefore k_{PA}+k_{PB}=\dfrac{y_1+1}{x_1+2}+\dfrac{y_2+1}{x_2+2}$

$=\dfrac{k(x_1+4)+1}{x_1+2}+\dfrac{k(x_2+4)+1}{x_2+2}$

$=k+\dfrac{2k+1}{x_1+2}+\left(k+\dfrac{2k+1}{x_2+2}\right)$

$=2k+(2k+1)\left(\dfrac{1}{x_1+2}+\dfrac{1}{x_2+2}\right)$

$=2k+(2k+1)\bullet\dfrac{x_1+x_2+4}{(x_1+2)(x_2+2)}$

$=2k+(2k+1)\bullet\dfrac{x_1+x_2+4}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}$

$$=2k+(2k+1)\cdot\frac{\dfrac{-16k^2+4}{4k^2+1}}{\dfrac{16k^2-4}{4k^2+1}}$$

$=2k+(2k+1)\cdot(-1)$

$=-1$.

$\therefore$直线 PA 与 PB 的斜率之和为定值 -1. ……………………………………………(12 分)

21.（本小题满分 12 分）

解：（1） $f'(x)=ae^x-1+x$,

$\because f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线与 x 轴平行，

$\therefore f'(0)=a-1=0$, $\therefore a=1$,

$\therefore f(x)=e^x-x+\dfrac{1}{2}x^2$,

$\therefore f'(x)=e^x-1+x$,

又 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，且 $f'(0)=0$,

$\therefore$存在唯一的 $x=0$ 使得 $f'(0)=0$,

令 $f'(x)>0$，得 $x>0$；

令 $f'(x)<0$，得 $x<0$,

$\therefore f(x)$在$(-\infty，0)$上单调递减，在$(0，+\infty)$上单调递增. ……………………………（6 分）

（2） $F(x)=e^x-x+\dfrac{1}{2}x^2-\left(\dfrac{1}{2}x^2+m\right)=e^x-x-m$,

令 $F(x)=0$，则 $m=e^x-x$,

令 $g(x)=e^x-x$，则 $y=g(x)$ 的图象与 $y=m$ 有两个交点，

$\because g'(x)=e^x-1$, 令 $g'(x)=0$, 得 $x=0$,

令 $g'(x)>0$，得 $x>0$;

令 $g'(x)<0$，得 $x<0$,

$\therefore g(x)$ 在$(-\infty，0)$上单调递减，在$(0，+\infty)$上单调递增，

$\therefore g(x)_{\min}=g(0)=1$,

又 $x\to-\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$；$x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，

$\because y=g(x)$ 的图象与 $y=m$ 有两个交点，

$\therefore m\in(1,\ +\infty)$. ……………………………………………………………（12 分）

（其他解法酌情给分）

22．（本小题满分 10 分）【选修 4−4：坐标系与参数方程】

解：（1）直线 l 可化为 $x+y-2=0$，

设 l 的倾斜角为 α，则 $\tan\alpha=-1$，$\therefore\alpha=135°$,

$\because\rho=2\cos\theta,\ \therefore\rho^2=2\rho\cos\theta,\ \therefore x^2+y^2=2x$,

故曲线 C 的直角坐标方程为 $(x-1)^2+y^2=1$. ……………………………………（5 分）

（2）曲线 C 表示圆心为 $C(1,\ 0)$，半径 $r=1$ 的圆，

$\because$ 圆心 $C(1,\ 0)$ 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|1+0-2|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$，

又点 P 到 l 的最大距离为 $d+r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1$，

$\therefore S_{\triangle PAB}=\dfrac{1}{2}\bullet|AB|\bullet h\leqslant\dfrac{1}{2}\bullet\sqrt{2}\bullet\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1\right)=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$. ……………………（10 分）

23．（本小题满分 10 分）【选修 4−5：不等式选讲】

解：（1）$f(x)=\begin{cases}-3x-2, & x<-1,\\ x+2, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 3x+2, & x>0,\end{cases}$ 如图 4 所示，

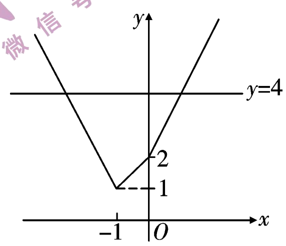

图 4

当 $f(x)=4$ 时，$x=-2$ 或 $x=\dfrac{2}{3}$，

由图可知不等式 $f(x)<4$ 的解集为 $\left\{x\left|-2<x<\dfrac{2}{3}\right.\right\}$. ……………………………（5 分）

（2）由图可知当 $x=-1$ 时，$f(x)_{\min}=1$，

$\therefore 2a^2-a\leqslant 1,\ \therefore 2a^2-a-1\leqslant 0,\ \therefore-\dfrac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1$，

$\therefore a\in\left[-\dfrac{1}{2},\ 1\right]$. ………………………………………………………………（10 分）