本试卷共 4 页，22 小题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：1.答卷前，考生务必用黑色笔迹的钢笔或签字笔将自己的姓名和考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。将条形码横贴在答题卡右上角"条形码粘贴处"。

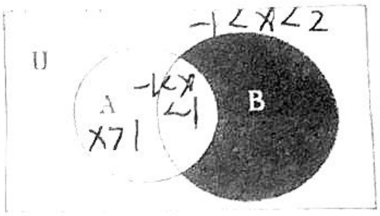
2.选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上。

3.非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。

4.考生必须保持答题卡的整洁，考试结束后，将试题与答题卡一并交回。

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集$U=R$，集合$A=\{x|y=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\}$，$B=\{x|x^2-x-2<0\}$，它们的关系如图(Venn 图)所示，则阴影部分表示的集合为(　　)

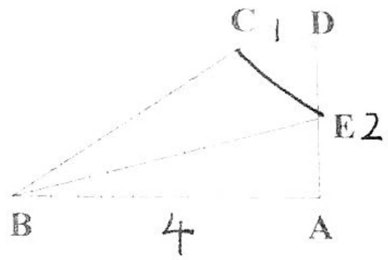


A. $\{x|-1\leq x<2\}$　　B. $\{x|-1<x<2\}$
C. $\{x|1\leq x<2\}$　　D. $\{x|1<x<2\}$

2. 若$z(1+2i)=1-i^3$，则$z=$(　)

A. $\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$　　B. $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$　　C. $\frac{3}{5}-\frac{1}{5}i$　　D. $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$

3. 如图，在直角梯形 ABCD 中，AB//CD，AB $\perp$ AD，AB $=$ 2AD $=$ 4CD，点 E 为 AD 的中点，设$\overrightarrow{BE}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BC}$，则$x+y=$(　　)



A. $\frac{9}{8}$　　B. $\frac{5}{8}$

C. $\frac{5}{4}$　　D. $\frac{3}{2}$

4. 若$\sin(\frac{\pi}{8}-\alpha)=\frac{1}{4}$，则$\cos(\frac{3\pi}{4}+2\alpha)=$(　　)

A. $-\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{8}$　　C. $-\frac{7}{8}$　　D. $\frac{7}{8}$

5. 若数列$\{a_n\}$满足$a_1=-3, a_{n+1}=\frac{1+a_n}{1-a_n}$，则$a_{2022}$的值为(　　)

A. 2　　B. -3　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{3}$

6. 水果采摘后，如果不进行保鲜处理，其新鲜度会逐渐流失，某水果产地的技术人员采用一种新的保鲜技术后发现水果在采摘后的时间t(单位：小时)与失去的新鲜度y满足函数关系式

$y=\begin{cases}\frac{1}{1000}t^2, 0\le t<10\\ \frac{1}{20}\cdot 2^{\frac{20+t}{30}}, 10\le t\le 100\end{cases}$，为了保障水果在销售时的新鲜度不低于85%，从水果采摘到上市销售的时间间隔不能超过（　　）(参考数据：$\log_2 3\approx 1.6$)

A. 20 小时　　B. 25 小时　　C. 28 小时　　D. 35 小时

7. 已知函数$f(x)=e^{|x|}-\cos x$，则$f\left(\frac{6}{5}\right),f(0),f\left(-\frac{1}{3}\right)$的大小关系为（　　）

A. $f(0)<f\left(\frac{6}{5}\right)<f\left(-\frac{1}{3}\right)$　　B. $f(0)<f\left(-\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{6}{5}\right)$

C. $f\left(\frac{6}{5}\right)<f\left(-\frac{1}{3}\right)<f(0)$　　D. $f\left(-\frac{1}{3}\right)<f(0)<f\left(\frac{6}{5}\right)$

8. 甲、乙、丙、丁四名交通志愿者申请在国庆期间到A，B，C三个路口协助交警值勤，他们申请值勤路口的意向如下表：

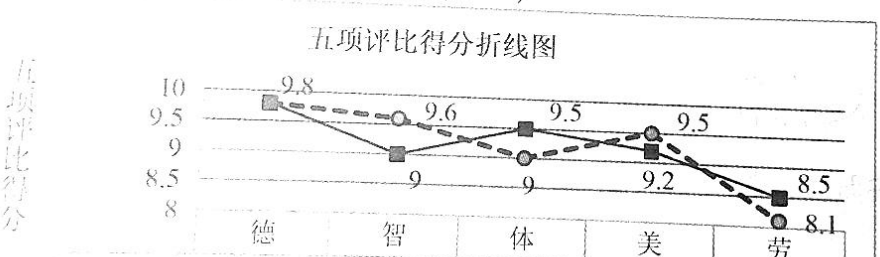
交通路口	A	B	C
志愿者	甲、乙、丙、丁	甲、乙、丙	丙、丁

这4名志愿者的申请被批准，且值勤安排也符合他们的意向，若要求A，B，C三个路口都要有志愿者值勤，则不同的安排方法数有（　　）

A. 14 种　　B. 11 种　　C. 8 种　　D. 5 种

二、多选题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 为了贯彻"双减"政策，实现德、智、体、美、劳全面发展的育人目标，某校制订了一套五育并举的量化评价标准，如图是该校甲、乙两个班在评比时的得分（各项满分10分，得分越高，成绩越好）折线图，则下列说法正确的是（　　）



	德	智	体	美	劳
甲班	9.8	9.6	9	9.5	8.1
乙班	9.8	9	9.5	9.2	8.5

A. 甲班五项评比得分的极差为1.7

B. 甲班五项评比得分的平均数小于乙班五项评比得分的平均数

C. 甲班五项评比得分的中位数大于乙班五项评比得分的中位数

D. 甲班五项评比得分的方差小于乙班五项评比得分的方差

10. 已知函数$f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$，则下列说法正确的是（　　）

A. 若函数$f(x)$的最小正周期为π，则其图象关于直线$x=\frac{\pi}{8}$对称

B. 若函数$f(x)$的最小正周期为π，则其图象关于点$\left(\frac{\pi}{8},0\right)$对称

C. 若函数$f(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{8}\right)$上单调递增，则$\omega$的最大值为2

D. 若函数$f(x)$在$[0,2\pi]$有且仅有5个零点，则ω的取值范围是$\frac{19}{8}\le\omega<\frac{23}{8}$

11. 已知双曲线C的方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$，A，B两点分别是双曲线C的左，右顶点，点P是双曲线C上任意一点(与A，B两点不重合)，记直线PA，PB的斜率分别为k_1，k_2，则(　　)

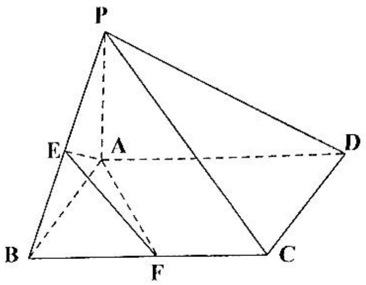
A. 双曲线C的焦点到渐近线的距离为4

B. 若双曲线C的实半轴长，虚半轴长同时增加相同的长度$m(m>0)$，则离心率变大

C. $k_1\cdot k_2$为定值

D. 存在实数t使得直线$y=\frac{5}{3}x+t$与双曲线左，右两支各有一个交点

12. 四棱锥$P-ABCD$的顶点都在球心为O的球面上，且$PA\perp$平面$ABCD$,底面$ABCD$为矩形,$PA=AB=2,AD=4$设E、F分别是PB，BC的中点，则(　　)



A. 平面AEF//平面PCD

B. 四棱锥$P-ABCD$外接球的半径为$\sqrt{6}$

C. P，B，C三点到平面AEF的距离相等

D. 平面AEF截球O所得的截面面积为$\frac{14}{3}\pi$

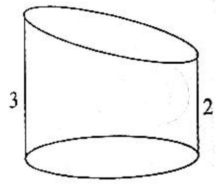
三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分

13. 一条光线从点P(1,1)射出，被x轴反射后经过圆$x^2+y^2-4y+3=0$的圆心C，则入射光线所在的直线方程为______。

14. 函数$f(x)=e^x+\sin x$的图象在点$(0,f(0))$处的切线方程为______。

15. 已知随机变量$X\sim N(80,\sigma^2)$，若$P(X>100)=a$，$P(60<X<100)=b$，则$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$的最小值为______。

16. 如图，一个底面半径为2的圆柱被一平面所截得的截面图形为椭圆截得的几何体的最短母线长和最长母线长分别为2和3，则该几何体的体积为______，截面椭圆的离心率为______。（本小题第1空作答正确得2分，第2空作答正确得3分）



四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

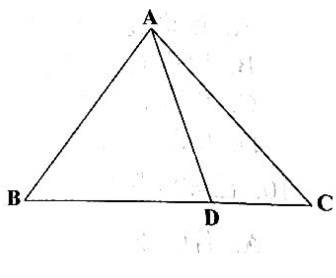
17.（10分）

在各项都为正数的等比数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=4$，其前n项的积为T_n，且$T_5=4^{10}$，S_n是数列$\{b_n\}$的前n项和，且$S_n=\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n$。

（1）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；（2）求数列$\{a_{b_n}\}$的前n项和R_n。

18.（12分）

如图，在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c,已知$a=6$，$b=5$，$\cos A=\frac{1}{8}$，点D为边BC上的点，且BD=2DC。



(1)求$\triangle ABC$的面积；

(2) 求线段AD的长。

19.（12分）

2020年9月，中国在第75届联合国大会上承诺，将采取更加有力的政策和措施，力争于2030年之前使二氧化碳的排放达到峰值，努力争取2060年之前实现碳中和（简称“双碳目标”），此举展现了我国应对气候变化的坚定决心，预示着中国经济结构和经济社会运转方式将产生深刻变革，极大促进我国产业链的清洁化和绿色化．新能源汽车、电动汽车是重要

的战略新兴产业，对于实现“双碳目标”具有重要的作用.为了解某一地区纯电动汽车销售情况，一机构根据统计数据，用最小二乘法得到电动汽车销量 y（单位：万台）关于 x（年份）的线性回归方程为$\hat{y}=4.7x-9459.2$，且销量 y 的方差为$s_y^2=\frac{254}{5}$,年份 x 的方差为 $s_x^2=2$。

（1）求 y 与 x 的相关系数 r，并据此判断电动汽车销量 y 与年份 x 的相关性强弱；

（2）该机构还调查了该地区 90 位购车车主的性别与购车种类情况，得到的数据如下表：

	购买非电动车	购买电动车	总计
男性	39	6	45
女性	30	15	45
总计	69	21	90

请判断有多大的把握认为购买电动汽车与性别有关；

（3）在购买电动汽车的车主中按照性别进行分层抽样抽取 7 人，再从这 7 人中随机抽取 3 人,记这 3 人中，男性的人数为 X，求 X 的分布列和数学期望。

①参考数据：$\sqrt{5\times127}=\sqrt{635}\approx25$，

②参考公式：(i)线性回归方程：$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，其中 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$，

(ii)相关系数:$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$，若$r>0.9$，则可判断 y 与 x 线性相关较强。

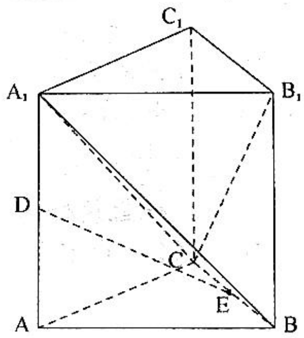
(iii)$k^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$。

附表：

$P(K^2\geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

20.（12 分）

如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$中，$AC\perp BC$，$AC=BC=2$，点 D，E 分别边 AA_1，BC 的中点，直线 DE 与底面 ABC 所成的正弦角值为$\frac{\sqrt{14}}{7}$。



（1）求证：$DE//$平面A_1B_1C；

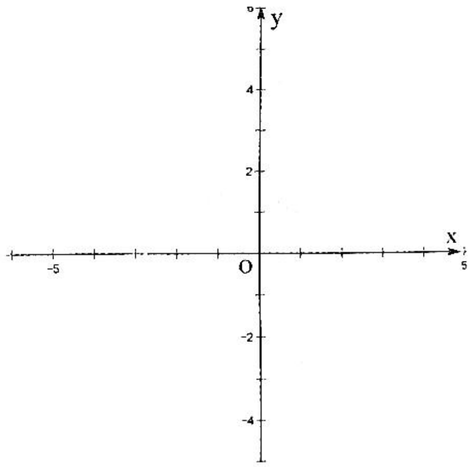
（2）求二面角$B-A_1C-B_1$的余弦值。

21.（12 分）

已知圆$(x+1)^2+y^2=16$的圆心为 A，点 P 是圆 A 上的动点，点B是抛物线$y^2=4x$的焦点，点 G 在线段 AP 上，且满足|GP|=|GB|.

（1）求点 G 的轨迹 E 的方程；

（2）不过原点的直线 l 与(1)中轨迹 E 交于 M,N 两点，若线段 MN 的中点 Q 在抛物线$y^2=4x$上，求直线 l 的斜率 k 的取值范围.



22.（12 分）

已知函数$f(x)=a\ln x-x(a\in R)$。

（1）求函数$y=f(x)$的单调区间；

（2）若函数$y=f(x)$在其定义域内有两个不同的零点，求实数 a 的取值范围；

（3）若$0<x_1<x_2$，且$\frac{x_1}{\ln x_1}=\frac{x_2}{\ln x_2}=a$，证明：$\frac{x_1}{\ln x_1}<2x_2-x_1$。

广东省普通高中高三年级联合质量测评

数学参考答案及评分细则

一、单项选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	A	C	C	C	B	B

二、多项选择题

题号	9	10	11	12
答案	AC	ACD	AC	BCD

三、填空题

13. $3x-y-2=0$；

14. $2x-y+1=0$；

15. 9；

16. 10π，$\frac{\sqrt{17}}{17}$；

详细解答：

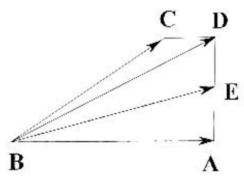
1.【答案】C

【解析】$\because A=\{x|y=\frac{x}{\sqrt{1-x}}\}=\{x|1-x>0\}=\{x|x<1\}$，$B=\{x|x^2-x-2<0\}=\{x|-1<x<2\}$，

$\therefore \complement_U A=\{x|x\ge 1\}$，$(\complement_U A)\cap B=\{x|1\le x<2\}$，故选 C.

2.【答案】D

【解析】$\because \bar{z}=\frac{1+i}{1+2i}=\frac{(1+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{3-i}{5}=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}i$，$\therefore z=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$，故选 D.



3.【答案】A

【解析】连接 BD，因为 E 为 AD 的中点，所以$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$，

因为$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$，所以$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA})=\frac{5}{8}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，因为$\overrightarrow{BE}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BC}$，

$\therefore x=\frac{5}{8}$，$y=\frac{1}{2}$，所以$x+y=\frac{5}{8}+\frac{1}{2}=\frac{9}{8}$. 故选 A.

4.【答案】C

【解析】$\because 2\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)=\frac{\pi}{4}-2\alpha$. $\therefore 2\alpha=\frac{\pi}{4}-2\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)$，$\therefore \frac{3\pi}{4}+2\alpha=\pi-2\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)$，

$\therefore \cos\left(\frac{3\pi}{4}+2\alpha\right)=-\cos 2\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)-1=2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2-1=-\frac{7}{8}$.故选 C.

5.【答案】C

【解析】$\because a_1=-3, a_{n+1}=\frac{1+a_n}{1-a_n}$，$\therefore a_2=\frac{1+a_1}{1-a_1}=-\frac{1}{2}$，

同理可得：$a_3=\frac{1}{3}$，$a_4=2$，$a_5=-3$，………，可得

$a_{n+4}=a_n$，则$a_{2022}=a_{505\times4+2}=a_2=-\frac{1}{2}$. 故选 C.

6.【答案】C

【解析】 由题意可知当$t<10$时，失去的新鲜度小于百分之十，没有超过百分之十五，

当$t\geq 10$时，则有$\frac{1}{20}\cdot 2^{\frac{20+t}{30}}\leq 15\%$即$2^{\frac{20+t}{30}}\leq 3$，

$\therefore \frac{20+t}{30}\leq \log_2 3\approx 1.6$，$\therefore t\leq 48-20=28$ 故选：C.

7.【答案】B

【解析】函数$f(-x)=e^{|-x|}-\cos(-x)=e^{|x|}-\cos x=f(x)$，$\therefore f(x)$为偶函数，$\therefore f\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(-\frac{1}{3}\right)$，

当 x>0 时，$f(x)=e^x-\cos x$ $\therefore f'(x)=e^x+\sin x$，

$\therefore x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)=e^x+\sin x>0$，$\therefore$函数在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上递增，

$\therefore f(0)<f\left(\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{6}{5}\right)$，即$f(0)<f\left(-\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{6}{5}\right)$，

故选B.

8。【答案】B

【解析】 甲乙选相同路口，有 3 种选法：

A（甲乙）B（丙）C（丁）；

A（丙）B（甲乙）C（丁）；

A（丁）B（甲乙）C（丙）；

甲丙选相同路口，有 2 种选法：

A（甲丙）B（乙）C（丁）；

A（乙）B（甲丙）C（丁）；

甲丁选相同路口，有 1 种选法：

A（甲丁）B（乙）C（丙）；

乙丙选相同路口，有 2 种选法：

A（乙丙）B（甲）C（丁）；

A（甲）B（乙丙）C（丁）；

乙丁选相同路口，有 1 种选法：

A（乙丁）B（甲）C（丙）；

丙丁选相同路口，有 2 种选法：

A（甲）B（乙）C（丙丁）；

A（乙）B（甲）C（丙丁）。

所以一共有 $3+2+1+2+1+2=11$ 种选法．故选 B.

9.【答案】AC

【解析】对于 A，甲班五项得分的极差为 $9.8-8.1=1.7$，选项 A 正确；

对于 B，计算甲班五项得分的平均数为，

$\overline{x}_{甲}=\dfrac{9.8+9.6+9+9.5+8.1}{5}=9.2$

乙班五项得分的平均数为

$\overline{x}_{乙}=\dfrac{9.8+9+9.5+9.2+8.5}{5}=9.2$，

所以甲班五项得分的平均数等于乙班五项得分的平均数，选项 B 错误；

对于 C，甲班五项得分的中位数是 9.5，乙班五项得分的中位数是 9.2，

所以甲班五项得分的中位数大于乙班五项得分的中位数，选项 C 正确；

对于 D，计算甲班五项得分的方差为$s^2_{甲}=\frac{1}{5}\times[0.6^2+0.4^2+0.2^2+0.3^2+1.1^2]=0.372$，

乙班五项得分的方差为

$s^2_{乙}=\dfrac{1}{5}\times[0.6^2+0.2^2+0.3^2+0^2+0.7^2]=0.196$

所以甲班五项得分的方差大于乙班五项得分的方差，选项 D 错误.

故选 AC.

10.【答案】ACD

【解析】对于 A，$\because f(x)$的最小正周期为π，$\therefore \omega=2$，$\therefore f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\sin\left(2.\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{2}=\sqrt{2}$、故 A 正确；对于 B，$\because f(x)$的最小正周期为$\pi$，$\therefore \omega=2$，$\therefore f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\sin\left(2.\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{2}=\sqrt{2}\neq 0$，故 B 错误；对于 C，$\because 0<x<\frac{\pi}{8}$ $\therefore \frac{\pi}{4}<\omega x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{8}\omega+\frac{\pi}{4}$，又函数$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{8}\right)$上单调递增，$\therefore \frac{\pi}{8}\omega+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}$，$\therefore$ $\omega\le 2$，故 C 正确；对于 D，$\because x\in[0,2\pi]$ $\therefore \omega x+\frac{\pi}{4}\in$ $\left[\frac{\pi}{4},2\pi\omega+\frac{\pi}{4}\right]$又$f(x)$在$[0,2\pi]$有且仅有 5 个零点，则 $5\pi\le 2\pi\omega+\frac{\pi}{4}<6\pi$，$\therefore \frac{19}{8}\le\omega<\frac{23}{8}$，故 D 正确.

故选 ACD

11. 【答案】AC

【解析】对于 A，∵双曲线 C 的一个焦点$F(5,0)$，渐近线方程化为 $4x\pm 3y=0$，

∴焦点 F 到渐近线的距离为$d=\frac{|4\times 5|}{\sqrt{16+9}}=4$，故 A 正确；

对于 B，双曲线 C 的离心率 $e=\frac{5}{3}$，若 C 的实半轴长，虚半轴长同时增加相同的长度$m(m>0)$，则离心率$e'=\frac{c+m}{a+m}=\frac{5+m}{3+m}$，又$e'-e=\frac{5+m}{3+m}-\frac{5}{3}=\frac{3(5+m)-5(3+m)}{3(3+m)}=\frac{-2m}{3(3+m)}<0$，所以$e'<e$，即离心率变小，故 B 错误；

对于 C，$A(-3,0),B(3,0),P(x,y)$，

$\because k_1=\frac{y}{x+3},k_2=\frac{y}{x-3}$，

$\therefore k_1\cdot k_2=\frac{y}{x+3}\cdot\frac{y}{x-3}=\frac{y^2}{x^2-9}$，

又点 P 在双曲线上，

$\therefore \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$，

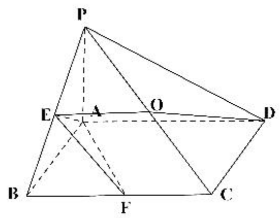
$\therefore y^2=16\left(\frac{x^2}{9}-1\right)=\frac{16(x^2-9)}{9}$，

$\therefore k_1\cdot k_2=\frac{16(x^2-9)}{9}\cdot\frac{y^2}{x^2-9}=\frac{16}{9}$(定值)，故 C 正确；

对于 D，双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{4}{3}x$，$\frac{5}{3}>\frac{4}{3}$，作图可知直线 $y=\frac{5}{3}x+t$ 若与双曲线 C 有两个交点，这两个交点必在双曲线的同一支上，故 D 错误；

故选 AC

12.【答案】BCD



【解析】对于 A，取线段 PC 的中点 O，则 EO∥AD，EO=$\frac{1}{2}$AD，在梯形 ADOE 中，AE 与 OD 不平行，若平面 AEF∥平面 PCD，由于平面 AEOD∩平面 AEF=AE，平面 AEOD∩平面 PCD=OD，则 AE∥OD，这与 AE 与 OD 不平行相矛盾，故 A 错误；

对于 B，由题意可将该四棱锥补形为一个长方体，易知球心 O 为长方体的对角线的中点，即为 PC 的中点，故球 O 的直径 $2R=PC=\sqrt{2^2+2^2+4^2}=2\sqrt{6}$，所以$R=\sqrt{6}$，故 B 正确；

对于 C，点 E 为 PB 的中点，则点 P，B 两点到平面 AEF 的距离相等，同理点 F 为 BC 的中点，则点 B，C 两点到平面 AEF 的距离相等，故 C 正确；

对于 D，设球心到平面 AEF 的距离为 d，截面圆的半径为 r，由题意可知，球心 O 到平面 AEF 的距离等于点 B 到平面 AEF 的距离，在三棱锥$B-AEF$中，由等体积法可得$V_{O-AEF}=V_{E-ABF}$，即$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times$

$\sqrt{2}\times\sqrt{6}\cdot d=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times1$，解得$d=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以 $r^2=R^2-d^2=6-\frac{4}{3}=\frac{14}{3}$，所以截面圆的面积为 $\pi r^2=\frac{14}{3}\pi$，故 D 正确；故选 BCD

13【答案】$3x-y-2=0$

【解析】由$x^2+y^2-4y+3=0$，得$x^2+(y-2)^2=1$，∴圆心 $C(0,2)$，设点 $P(1,1)$关于 x 轴的对称点为点 Q，则 $Q(1,-1)$,反射光线 CQ 的斜率为 $k=\frac{-1-2}{1-0}=-3$, ∴入射光线的斜率为 3, ∴入射光线的方程为：$y-1=3(x-1)$,即为 $3x-y-2=0$.

故答案为 $3x-y-2=0$.

14【答案】$2x-y+1=0$

【解析】∵ $f'(x)=e^x+\cos x$，则所求切线的斜率为 $f'(0)=2$．又$f(0)=1$，即切点为$(0,1)$，所以切线方程为$y-1=2(x-0)$，即 $2x-y+1=0$.

故答案为 $2x-y+1=0$．

15【答案】9

【解析】依题意，由正态分布知识可得$a+\frac{b}{2}=\frac{1}{2}$，

$\therefore\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=2(\frac{2}{a}+\frac{1}{b})(a+\frac{b}{2})=2(\frac{5}{2}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b})\geq2(\frac{5}{2}+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}})=9$，当且仅当$\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$且$a+\frac{b}{2}=\frac{1}{2}$即$a=b=\frac{2}{3}$时等号成立．所以$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$的最小值为 9.

故答案为 9.

16【答案】10π，$\frac{\sqrt{17}}{17}$；（本小题第 1 空作答正确得 2 分，第 2 空作答正确得 3 分）

【解析】用一个完全相同的几何体把题中几何体补成一个圆柱，如图，则圆柱的体积为$\pi\times2^2\times5=20\pi$，故所求几何体的体积为 10π；

该椭圆的长轴长 $2a=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$，

短轴长 $2b=4$，$\therefore c=\sqrt{\frac{17}{4}-4}=\frac{1}{2}$，椭圆的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{17}}{2}}=\frac{\sqrt{17}}{17}$.

故答案为 10π，$\frac{\sqrt{17}}{17}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17 解：（1）∵ $T_5=a_1a_2a_3a_4a_5=4^5q^{1+2+3+4}=4^5q^{10}=4^{10}$， ……………1 分

$\therefore q^{10}=4^5=2^{10}(q>0)$，

$\therefore q=2$， ……………2 分

$\therefore a_n=a_1q^{n-1}=4\cdot2^{n-1}=2^{n+1}$， ……………3 分

又数列$\{b_n\}$满足前 n 项和$S_n=\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n$，

当$n=1$时，$b_1=S_1=2$， ……………4 分

当$n\geq2$时，$b_n=S_n-S_{n-1}=\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-[\frac{3}{2}(n-1)^2+\frac{1}{2}(n-1)]=3n-1$， ……………5 分

当$n=1$时，$3\times1-1=2=b_1$，上式成立，故$b_n=3n-1$, ……………6 分

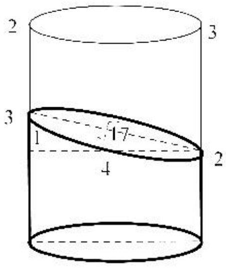
（2）由(1)得

$a_{b_n}=a_{3n-1}=2^{(3n-1)+1}=2^{3n}$ ……………7 分

$=8^n$， ……………8 分

$\therefore R_n=a_{b_1}+a_{b_2}+\cdots+a_{b_n}=8^1+8^2+\cdots+8^n=\frac{8(8^n-1)}{7}$(或$=\frac{8^{n+1}-8}{7}$). ……………10 分

18 解：(1) 解法一：在△ABC中，$\because cosA=\frac{1}{8}>0$，$\therefore$ A 为锐角，



$\therefore sinA=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$，

……………1 分

由正弦定理可得$\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}$，

$\therefore \frac{6}{\frac{3\sqrt{7}}{8}}=\frac{5}{sinB}$，

$\therefore sinB=\frac{5\sqrt{7}}{16}$，……………2 分

又 $a>b$，$\therefore B<A$，$\therefore B$ 为锐角，$cosB=\sqrt{1-\sin^2 B}=\frac{9}{16}$. ……………3 分

$\because C=\pi-(A+B)$，

$\therefore sinC=\sin(A+B)=sinAcosB+cosAsinB$

$=\frac{3\sqrt{7}}{8}\times\frac{9}{16}+\frac{5\sqrt{7}}{16}\times\frac{1}{8}=\frac{\sqrt{7}}{4}$ ……………4 分

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}absinC$ ……………5 分

$=\frac{1}{2}\times 6\times 5\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$； ……………6 分

解法二：在△ABC中，$\because cosA=\frac{1}{8}>0$，$\therefore$ A 为锐角，

$\therefore sinA=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$， ……………1 分

由余弦定理可得，$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$，

$\therefore 36=25+c^2+2\times 5\times c\times\frac{1}{8}$， ……………2 分

$\therefore 4c^2-5c-44=0$， ……………3 分

$\therefore c=4$ 或 $c=-\frac{11}{4}$(舍去)， ……………4 分

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bcsinA$ ……………5 分

$=\frac{1}{2}\times 5\times 4\times\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$， ……………6 分

(2) 解法一：在△ABC中，$C=\pi-(A+B)$，

$cosC=-\cos(A+B)$ ……………7 分

$=-cosAcosB+sinAsinB$ ……………8 分

$=-\frac{1}{8}\times\frac{9}{16}+\frac{3\sqrt{7}}{8}\times\frac{5\sqrt{7}}{16}=\frac{3}{4}$， ……………9 分

在△ACD中，由余弦定理得，$AD^2=AC^2+CD^2-2AC.CD.\cos C$ ……………10 分

$=5^2+2^2-2\times 5\times 2\times\frac{3}{4}=14$. ……………11 分

$\therefore AD=\sqrt{14}$ ……………12 分

解法二：在△ABC中由余弦定理可得，$b^2=a^2+c^2-2ac.\cos B$， ……………7 分

$\therefore 25=36+16-2\times 6\times 4\cos B$， ……………8 分

$\therefore \cos B=\frac{9}{16}$. ……………9 分

在△ABD中由余弦定理可得，$AD^2=AB^2+BD^2-2AB.BD.\cos B$ ……………10 分

$=4^2+4^2-2\times 4\times 4\times\frac{9}{16}=14$……………11 分

$\therefore AD=\sqrt{14}$ ……………12 分

19 解：（1）相关系数为$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$

$=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\cdot\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}=\hat{b}\cdot\frac{\sqrt{ns_x^2}}{\sqrt{ns_y^2}}=\hat{b}\cdot\frac{\sqrt{s_x^2}}{\sqrt{s_y^2}}$

……………2 分

$=4.7\times\sqrt{\frac{10}{254}}=\frac{47}{\sqrt{10}\times\sqrt{254}}=\frac{47}{2\sqrt{635}}\approx\frac{47}{50}=0.94>0.9$；

……………3 分

故 y 与 x 线性相关较强. ……………4 分

（2）$\because K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{90(39\times 15-30\times 6)^2}{45\times 45\times 69\times 21}$

……………5 分

$=5.031>5.024$. ……………6 分

所以有 97.5%的把握认为购买新能源车与车主性别有关. ……………7 分

（3）抽样比$=\frac{7}{21}=\frac{1}{3}$，男性车主选取**2**人，女性车主选取**5**人，则 X 的可能取值为 0，1，2，……8 分

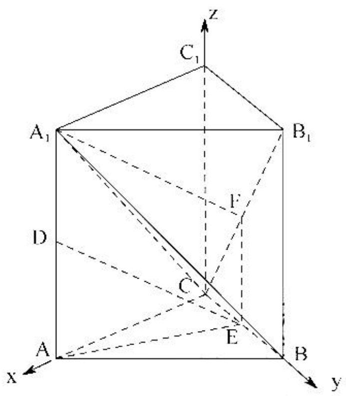
故$P(X=0)=\frac{C_5^3}{C_7^3}=\frac{2}{7}$，$P(X=1)=\frac{C_2^1C_5^2}{C_7^3}=\frac{4}{7}$，$P(X=2)=\frac{C_2^2C_5^1}{C_7^3}=\frac{1}{7}$ ……………11 分

故 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

$\therefore E(X)=0\times\frac{2}{7}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$ ………..12 分

20



(1)证明：取B_1C的中点为 F，连接 EF，A_1F，则$EF//BB_1//AA_1$，且$EF=\frac{1}{2}AA_1=A_1D$，

∴四边形A_1DEF是平行四边形，∴$DE//A_1F$， ……………2 分

∵$DE\not\subset$平面A_1B_1C，$A_1F\subset$平面A_1B_1C，∴$DE//$平面A_1B_1C． ……………4 分

（另法：取 AC 的中点 H，连接 DH，HE，可证面 DHE//平面A_1B_1C，再证$DE//$平面A_1B_1C，酌情给分）

（I）解：连接 AE，∵AD⊥底面 ABC，∴∠AED 就是直线 DE 与底面 ABC 所成的角， ………5 分

设$AA_1=2a$，∵$AE=\sqrt{5}$，$AD=a$，∴$DE=\sqrt{5+a^2}$，

$\therefore \sin\angle AED=\frac{AD}{DE}=\frac{a}{\sqrt{5+a^2}}=\frac{\sqrt{14}}{7}$， ………..6 分

化简得

$a^2=2$，$\therefore a=\sqrt{2}$．$AA_1=2\sqrt{2}$ ………..7 分

以 C 为原点，$\overrightarrow{CA}$、$\overrightarrow{CB}$、$\overrightarrow{CC_1}$的方向分别为 x、y、z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$A_1(2,0,2\sqrt{2})$，$B_1(0,2,2\sqrt{2})$， ……………8 分

$\therefore \overrightarrow{CA_1}=(2,0,2\sqrt{2})$，$\overrightarrow{CB_1}=(0,2,2\sqrt{2})$，$\overrightarrow{CB}=(0,2,0)$

设平面A_1B_1C的法向量$\vec{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{CA_1}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{CB_1}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}2x+0+2\sqrt{2}z=0\\ 0+2y+2\sqrt{2}z=0\end{cases}$

令$x=\sqrt{2}$，则$y=\sqrt{2}$，$z=-1$，

$\therefore \vec{m}=(\sqrt{2},\sqrt{2},-1)$ ……………9 分

设平面A_1BC的法向量为$\vec{n}=(x',y',z')$，则

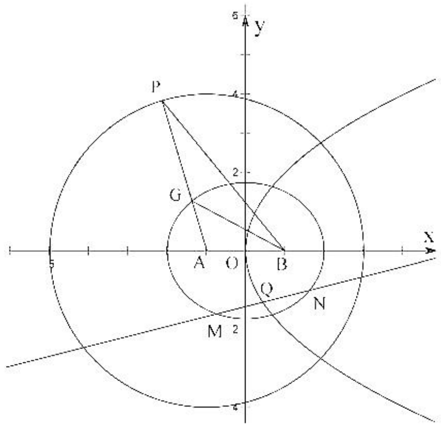
$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CA_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0\end{cases}$

即$\begin{cases}2x'+0+2\sqrt{2}z'=0\\ 0+2y'+0=0\end{cases}$，令$x'=\sqrt{2}$，则$y'=0$，$z'=-1$，$\therefore \vec{m}=(\sqrt{2},0,-1)$ ……………10 分

$\therefore \cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{2+0+1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$， ……………11 分

由图可知，二面角$B-A_1C-B_1$是锐角，故二面角$B-A_1C-B_1$的余弦值为$\frac{\sqrt{15}}{5}$． ……………12 分

21



解：（1）易知$A(-1,0)$ ∵点B是抛物线$y^2=4x$的焦点，∴$B(1,0)$， ……………1 分

依题意$|GA|+|GB|=|AP|=4>2=|AB|$，所以点 G 轨迹是一个椭圆，其焦点分别为 A，B，长轴长为 4，

……………2 分

设该椭圆的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

则 $2a=4$，$2c=2$，∴ $a=2$，$c=1$，

∴ $b^2=a^2-c^2=3$， ……………3 分

故点 G 的轨迹 E 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$． ……4 分

(2)易知直线 l 的斜率存在，设直线 l：$y=kx+t(t\neq 0)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$Q(x_0,y_0)$，…5 分

由$\begin{cases}y=kx+t\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$得：$(4k^2+3)x^2+8ktx+4t^2-12=0$， ……………6 分

∵ $\Delta=(8kt)^2-4(3+4k^2)(4t^2-12)>0$，即 $4k^2-t^2+3>0$①， ……………7 分

又$x_1+x_2=-\frac{8kt}{4k^2+3}$，

$x_1.x_2=\frac{4t^2-12}{4k^2+3}$ ……………8 分

故$Q(-\frac{4kt}{4k^2+3},\frac{3t}{4k^2+3})$， ……………9 分

将$Q(-\frac{4kt}{4k^2+3},\frac{3t}{4k^2+3})$，代入$y^2=4x$，得：$t=-\frac{16k(4k^2+3)}{9}$②，$(k\neq 0)$， ……………10 分

将②代入①，得：$16^2k^2(4k^2+3)<81$， $4\times 16^2k^4+3\times 16^2k^2-81<0$，

即$k^4+\frac{3}{4}k^2-(\frac{9}{32})^2<0$，即$(k^2-\frac{3}{32})(k^2+\frac{27}{32})<0$，

即$k^2-\frac{3}{32}<0$， ……………11 分

∴$-\frac{\sqrt6}{8}<k<\frac{\sqrt6}{8}$且$k\neq 0$，即 k 的取值范围为：$-\frac{\sqrt6}{8}<k<0$ 或 $0<k<\frac{\sqrt6}{8}$． ……………12 分

22 解：解：(1) 函数$f(x)$定义域为$(0,+\infty)$，

∵ $f(x)=a\ln x-x(a\in R)$．

∴ $f'(x)=\frac{a}{x}-1=\frac{a-x}{x}$ ……………1 分

①当$a\leq 0$ 时，$f'(x)<0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立，即函数$y=f(x)$的单调递减区间为$(0,+\infty)$；……2 分

②当$a>0$ 时，$f'(x)=0$，解得$x=a$，

当$x\in(0,a)$时，$f'(x)>0$，

∴函数$y=f(x)$的单调递增区间为$(0,a)$，

当$x\in(a,+\infty)$时，$f'(x)<0$，∴函数$y=f(x)$的单调递减区间为$(a,+\infty)$， …………3 分

综上可知：

①当$a\leq 0$ 时，函数$y=f(x)$的单调递减区间为$(0,+\infty)$；

②当$a>0$ 时，函数$y=f(x)$的单调递增区间为$(0,a)$，单调递减区间为$(a,+\infty)$； ……4 分

(2)解法一、由（1）知，当$a\leq 0$ 时，函数$y=f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，

∴函数$y=f(x)$至多有一个零点，不符合题意，

当$a>0$ 时，函数$y=f(x)$在$(0,a)$上单调递增，在$(a,+\infty)$上单调递减，∴ $f(x)_{max}=f(a)=a\ln a-a$，

又函数$y=f(x)$有两个零点，∴ $f(a)=a\ln a-a=a(\ln a-1)>0$，∴ $a>e$， ……………5 分

又$f(1)=-1<0$，∴ $\exists x_1\in(1,a)$，使得$f(x_1)=0$， ……………6 分

又$f(a^2)=a\ln a^2-a^2=a(2\ln a-a)$，设 $g(a)=2\ln a-a$，$g'(a)=\frac{2}{a}-1=\frac{2-a}{a}$，

∵ $a>e$，∴ $g'(a)<0$ ∴函数 $g(a)$在$(e,+\infty)$上单调

递减，$\therefore g(a)_{max}=g(e)=2-e<0$.

$\therefore \exists x_2\in(a,a^2)$，使得$f(x_2)=0$，　　…………7 分

综上可知，$a>e$为所求.　　……………8 分

(2)解法二、函数$y=f(x)$在其定义域内有两个不同的零点$\Leftrightarrow$方程$a\ln x-x=0$ 有两个解，

依题意，$a\neq 0$,$\therefore\Leftrightarrow$方程$\frac{1}{a}=\frac{\ln x}{x}$有两个解，　　……5 分

设 $g(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$,则$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,

当 $x\in(0,e)$时，$g'(x)>0$,当 $x\in(e,+\infty)$,$g'(x)<0$,
　　…… 6 分

$\therefore$函数$y=g(x)$在$(0,e)$上单调递增，在$(e,+\infty)$上单调递减，

$\therefore g(x)_{\max}=g(e)=\frac{1}{e}$,　　……… 7 分

当 $x\in(0,e)$ 时， $g(x)<\frac{1}{e}$； 当 $x\in[e,+\infty)$ 时，$0<g(x)\le\frac{1}{e}$；

$\therefore$方程$\frac{1}{a}=\frac{\ln x}{x}$有两个解$\Leftrightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{e}\Leftrightarrow a>e$　　…… 8 分

(3)依题意，x_1，$x_2(0<x_1<x_2)$是函数$y=f(x)$的两个零点，

设$x_2=tx_1$,因为$x_2>x_1>0\Rightarrow t>1$，　　………9 分

$\because a=\frac{x_1}{\ln x_1}=\frac{x_2}{\ln x_2}=\frac{tx_1}{\ln x_1+\ln t}$,

$\therefore \ln x_1=\frac{\ln t}{t-1}$，$\frac{a}{x_1}=\frac{1}{\ln x_1}=\frac{t-1}{\ln t}$

不等式$\frac{x_1}{\ln x_1}<2x_2-x_1\Leftrightarrow\frac{x_1}{\ln x_1}<2tx_1-x_1\Leftrightarrow\frac{1}{\ln x_1}<2t-1\Leftrightarrow\frac{t-1}{\ln t}<2t-1$，

$\because t>1$，所证不等式即 $2t\ln t-\ln t-t+1>0$
　　…………10 分

设 $h(t)=2t\ln t-\ln t-t+1$,$\therefore h'(t)=2\ln t+2-\frac{1}{t}-1$,$h''(t)=\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}>0$,

$\therefore h'(t)$在$(1,+\infty)$上是增函数，且$h'(t)>h'(1)=0$,

$\therefore h(t)$在$(1,+\infty)$上是增函数，且 $h(t)>h(1)=0$,
　　……………11 分

即 $2t\ln t-\ln t-t+1>0$，从而所证不等式成立.
　　……………12 分