

秘密 ★ 启用前 【考试时间：2023年1月4日 15:00—17:00】

## 绵阳市高中 2020 级第二次诊断性考试 理科数学

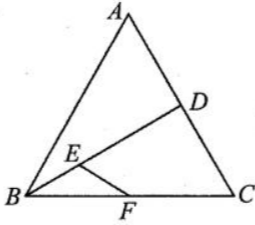
注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将答题卡交回。

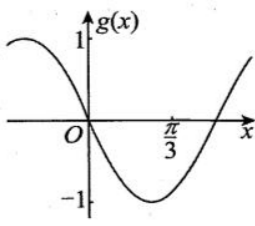
一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若  $iz = -3z + 10$ ，则在复平面内，复数  $z$  所对应的点位于
  - A. 第一象限
  - B. 第二象限
  - C. 第三象限
  - D. 第四象限
2. 已知  $A = \{1, 4, m^2\}$ ,  $B = \{1, m\}$ ，若  $B \subseteq A$ ，则  $m =$ 
  - A. 0 或 4
  - B. 1 或 4
  - C. 0
  - D. 4
3. 由专业人士和观众代表各组成一个评委小组给文艺比赛参赛选手打分，其中观众代表凭个人喜好打分，专业人士执行评分标准打分。如图是两个评委组对同一名选手打分的茎叶图，则下列结论正确的是
 

甲	乙
8 0	6 4
3 6	7 0 2 8
0 1	8 2
	9 0

  - A. 甲组的平均分高于乙组的平均分
  - B. 乙组更像是由专业人士组成的
  - C. 两组的总平均分等于甲组的平均分和乙组的平均分的平均数
  - D. 两组全部分数的方差等于甲组的方差和乙组的方差的平均数
4. 如图，在边长为 2 的等边  $\triangle ABC$  中，点  $E$  为中线  $BD$  的三等分点（靠近点  $B$ ），点  $F$  为  $BC$  的中点，则  $\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FC} =$ 

  - A.  $-\frac{\sqrt{3}}{4}$
  - B.  $-\frac{1}{2}$
  - C.  $\frac{3}{4}$
  - D.  $\frac{1}{2}$
5. 已知  $(ax + \frac{1}{x})^4$  的展开式中常数项为 24，则  $a$  的值为
  - A. 1
  - B.  $\sqrt{2}$
  - C. 2
  - D.  $\pm 2$

理科数学试题 第1页 (共4页)

6. 设命题  $p$ : 方程  $\frac{x^2}{k+1} + \frac{y^2}{3-k} = 1$  表示焦点在  $y$  轴上的椭圆；命题  $q$ : 方程  $\frac{x^2}{k+1} - \frac{y^2}{k-2} = 1$  表示焦点在  $x$  轴上的双曲线。若  $p \wedge q$  为真，则实数  $k$  的取值范围
  - A.  $-1 < k < 1$
  - B.  $-1 < k < 2$
  - C.  $1 < k < 3$
  - D.  $2 < k < 3$
7. 寒假来临，秀秀将从《西游记》、《童年》、《巴黎圣母院》、《战争与和平》、《三国演义》、《水浒传》这六部著作中选四部（其中国外两部、国内两部），每周看一部，连续四周看完，则《三国演义》与《水浒传》被选中且在相邻两周看完的概率为
  - A.  $\frac{1}{12}$
  - B.  $\frac{1}{6}$
  - C.  $\frac{1}{3}$
  - D.  $\frac{2}{3}$
8. 已知等比数列  $\{a_n\}$  的各项均为正数，前  $n$  项和为  $S_n$ ， $S_3 = 56$ ， $S_6 = 63$ ，则使得  $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n < 1$  成立的最小正整数  $n$  的值为
  - A. 10
  - B. 11
  - C. 12
  - D. 13
9. 设双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的右焦点为  $F$ ， $A, B$  两点在双曲线  $C$  上且关于原点对称，若  $|AB| = 2|OF|$ ， $|BF| = 3|AF|$ ，则该双曲线的渐近线方程为
  - A.  $\sqrt{6}x \pm 2y = 0$
  - B.  $2x \pm \sqrt{6}y = 0$
  - C.  $2x \pm 3y = 0$
  - D.  $3x \pm 2y = 0$
10. 将函数  $f(x) = \cos(\omega x + \varphi) (\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度得到如图所示的奇函数  $g(x)$  的图象，且  $g(x)$  的图象关于直线  $x = -\frac{\pi}{4}$  对称。则下列选项不正确的是
 
  - A.  $f(x)$  在区间  $[\frac{2\pi}{3}, \pi]$  上为增函数
  - B.  $f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
  - C.  $f(\frac{1}{2}) > f(0)$
  - D.  $f(-1) + f(0) < 0$
11. 已知  $\odot C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 3$ ，点  $A$  为直线  $l: y = -1$  上的动点，过点  $A$  作直线与  $\odot C$  相切于点  $P$ ，若  $Q(-2, 0)$ ，则  $|AP| + |AQ|$  最小值为
  - A.  $\sqrt{3} + 1$
  - B.  $2\sqrt{3}$
  - C.  $\sqrt{13}$
  - D. 4
12. 设  $x = e^{0.03}$ ， $y = 1.03^2$ ， $z = \ln(e^{0.6} + e^{0.4})$ ，则  $x, y, z$  的大小关系为
  - A.  $z > y > x$
  - B.  $y > x > z$
  - C.  $x > z > y$
  - D.  $z > x > y$

理科数学试题 第2页 (共4页)

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 若变量  $x, y$  满足不等式组  $\begin{cases} x \leq 3, \\ 2x + y - 2 \geq 0, \\ x - y + 3 \geq 0, \end{cases}$  则  $x + y$  的最大值是\_\_\_\_\_.

14. 已知  $\sin(\frac{2\pi}{3} - \alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ , 则  $\cos(2\alpha + \frac{2\pi}{3}) =$ \_\_\_\_\_.

15. 若函数  $f(x) = \begin{cases} 2 + \ln x, & x > 0, \\ x, & x \leq 0, \end{cases}$   $g(x) = f(x) + f(-x)$ , 则函数  $g(x)$  的零点个数为\_\_\_\_\_.

16. 已知  $F$  为抛物线:  $y^2 = 4x$  的焦点, 过直线  $l: x = -2$  上任一点  $P$  向抛物线引切线, 切点分别为  $A, B$ , 若点  $M(4, 0)$  在直线  $AB$  上的射影为  $H$ , 则  $|FH|$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共60分。

17. (12分)

在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ,  $a^2 \sin C + 3a \cos C = 3b$ ,  $A = 60^\circ$ .

(1) 求  $a$  的值;

(2) 若  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}$ , 求  $BC$  边上中线  $AT$  的长.

18. (12分)

某县依托种植特色农产品, 推进产业园区建设, 致富一方百姓. 已知该县近5年人均可支配收入如下表所示, 记2017年为  $x=1$ , 2018年为  $x=2$ , ... 以此类推.

年份	2017	2018	2019	2020	2021
年份代号 $x$	1	2	3	4	5
人均可支配收入 $y$ (万元)	0.8	1.1	1.5	2.4	3.7

(1) 使用两种模型: ①  $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ ; ②  $\hat{y} = \hat{m}x^2 + \hat{n}$  的相关指数  $R^2$  分别约为 0.92, 0.99,

请选择一个拟合效果更好的模型, 并说明理由;

(2) 根据(1)中选择的模型, 试建立  $y$  关于  $x$  的回归方程. (保留2位小数)

附: 回归方程  $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$  中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

参考数据:  $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 7.1$ , 令  $u_i = x_i^2$ ,  $\sum_{i=1}^5 (u_i - \bar{u})(y_i - \bar{y}) = 45.1$ .

理科数学试题 第3页 (共4页)

19. (12分)

已知等比数列  $\{b_n\}$  的各项都为正数,  $b_1 = \frac{2}{3}$ ,  $b_3 = \frac{8}{27}$ , 数列  $\{a_n\}$  的首项为 1, 且前  $n$  项和为  $S_n$ , 再从下面①②③中选择一个作为条件, 判断是否存在  $m \in \mathbf{N}^*$ , 使得  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ,  $a_n b_n \leq a_m b_m$  恒成立? 若存在, 求出  $m$  的值; 若不存在, 说明理由.

①  $2a_n - S_n = 1 (n \geq 1)$ ; ②  $a_{n+1} \cdot a_{n-1} = a_n^2 (n \geq 2)$ ,  $a_2 = \frac{1}{4}$ ; ③  $a_n - 1 = a_{n-1} (n \geq 2)$ .

20. (12分)

已知点  $A$  为椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  的左顶点, 过点  $P(4, 0)$  且斜率为  $k (k \neq 0)$  的直线交椭圆于  $B, C$  两点.

(1) 记直线  $AB, AC$  的斜率分别为  $k_1, k_2$ , 试判断  $k_1 k_2$  是否为定值? 并说明理由;

(2) 直线  $AB, AC$  分别交直线  $x=4$  于  $M, N$  两点, 当  $\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{1}{3}$  时, 求线段  $MN$  长度

的取值范围.

21. (12分)

已知函数  $f(x) = xe^x - \frac{1}{2}ax^2 - ax (a \in \mathbf{R})$ .

(1) 当  $a=1$  时, 求函数  $f(x)$  的极值;

(2) 若  $\forall x_1, x_2 \in [0, 2]$ , 恒有  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq a + 2e^2$  成立, 求实数  $a$  的取值范围.

(二) 选考题: 共10分. 请考生在第22、23题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题记分.

22. [选修4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

在极坐标系  $Ox$  中, 若点  $A$  为曲线  $l: \rho \cos \theta + \rho \sin \theta = -2 (\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2})$  上一动点, 点  $B$  在射线  $AO$  上, 且满足  $|OA| \cdot |OB| = 4$ , 记动点  $B$  的轨迹为曲线  $C$ .

(1) 求曲线  $C$  的极坐标方程;

(2) 若过极点的直线  $l_1$  交曲线  $C$  和曲线  $l$  分别于  $P, Q$  两点, 且  $P, Q$  的中点为  $M$ , 求  $|OM|$  的最大值.

23. [选修4-5: 不等式选讲] (10分)

已知函数  $f(x) = |2x+1| + |x+m|$ , 若  $f(x) \leq 3$  的解集为  $[n, 1]$ .

(1) 求实数  $m, n$  的值;

(2) 已知  $a, b$  均为正数, 且满足  $\frac{1}{2a} + \frac{2}{b} + 2m = 0$ , 求证:  $16a^2 + b^2 \geq 8$ .

理科数学试题 第4页 (共4页)

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：[www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线