

7. 若 $X \sim B(100, \frac{1}{3})$, 则当 $k=0, 1, 2, \dots, 100$ 时

A. $P(X=k) \leq P(X=50)$

B. $P(X=k) \leq P(X=32)$

C. $P(X=k) \leq P(X=33)$

D. $P(X=k) \leq P(X=49)$

8. 已知 $a=(e-0.1)^{e+0.1}, b=e^e, c=(e+0.1)^{e-0.1}$, 则 a, b, c 的大小关系是

A. $a < b < c$

B. $c < a < b$

C. $b < a < c$

D. $a < c < b$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知复数 z 的共轭复数为 \bar{z} , 则下列说法正确的是

A. $z^2 = |z|^2$

B. $z + \bar{z}$ 一定是实数

C. 若复数 z_1, z_2 满足 $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$, 则 $z_1 \cdot z_2 = 0$

D. 若复数 z 的平方是纯虚数, 则复数 z 的实部和虚部相等或者互为相反数

10. 已知不恒为 0 的函数 $f(x)$, 满足 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 都有 $f(x) + f(y) = 2f(\frac{x+y}{2})f(\frac{x-y}{2})$, 则

A. $f(0) = 0$

B. $f(0) = 1$

C. $f(x)$ 为奇函数

D. $f(x)$ 为偶函数

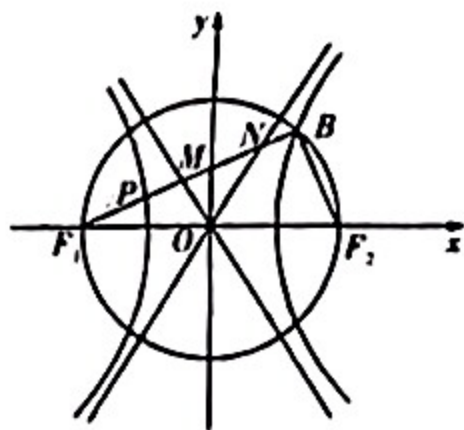
11. 如图, 已知双曲线: $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 以 F_1F_2 为直径的圆与双曲线在第一象限交于点 B , 连接 BF_1, BF_2 , BF_1 与双曲线左支交于点 P , 与渐近线分别交于点 M, N , 则

A. $|PM| = |BN|$

B. $S_{\triangle F_1BF_2} = 2$

C. 过 F_2 的双曲线的弦的长度的最小值为 8

D. 点 B 到两条渐近线的距离的积为 $\frac{4}{5}$



12. 如图, 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 3, E 为 AB 的中点, $C_1F = 2FC$, 动点 M 在侧面 AA_1D_1D 内运动(含边界), 则

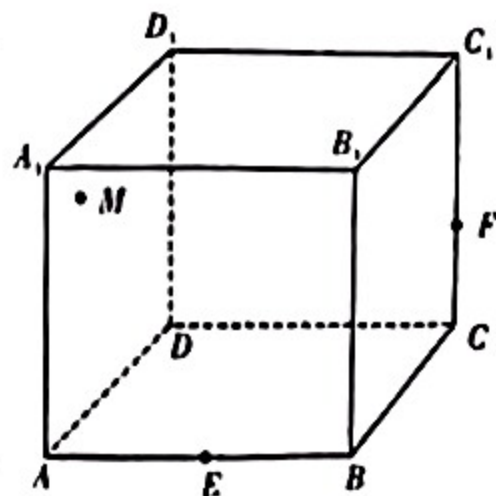
A. 若 $MB \parallel$ 平面 D_1EF , 则点 M 的轨迹长度为 $\frac{\sqrt{13}}{2}$

B. 平面 D_1EF 与平面 $ABCD$ 的夹角的正切值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

C. 平面 D_1EF 截正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 所得的截面多边形的

周长为 $3\sqrt{13} + \frac{3\sqrt{2}}{2}$

D. 不存在一条直线 l , 使得 l 与正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱所成的角都相等



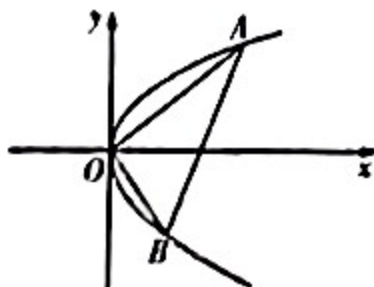
三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 计算: $\frac{2\sin 20^\circ - \cos 10^\circ}{\sin 10^\circ} = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 六个身高不同的人排成二排三列,每一列后面的那个人比他(她)前面的那个人高,则共有 种排法.

15. 函数 $f(x) = x^x (x > 0)$ 的最小值为 .

16. 如图,已知抛物线 $C: y^2 = 2x$, 圆 $E: (x-2)^2 + y^2 = 4$, 直线 OA, OB 分别交抛物线于 A, B 两点,且直线 OA 与直线 OB 的斜率之积等于 -2 , 则直线 AB 被圆 E 所截的弦长最小值为 .



四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.请在答题卡指定区域内作答.解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知正数数列 $\{a_n\}$, $a_1 = 1$, 且满足 $a_n^2 - (n-1)a_n a_{n-1} - n a_{n-1}^2 = 0 (n \geq 2)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{n-1}{a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. (本小题满分 12 分)

在三角形 ABC 中,内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sqrt{2}b \sin C + a \sin A = b \sin B + c \sin C$.

(1) 求 A ;

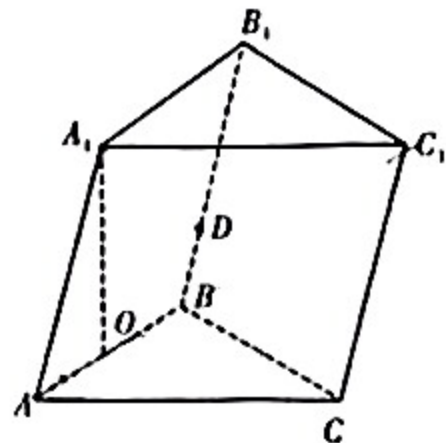
(2) 若 $a = \sqrt{2}$, 求 BC 边上的高 AD 的最大值.

19. (本小题满分 12 分)

斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各棱长都为 2, $\angle A_1AB = 60^\circ$, 点 A_1 在下底面 ABC 的投影为 AB 的中点 O .

(1) 在棱 BB_1 (含端点) 上是否存在一点 D 使 $A_1D \perp AC_1$? 若存在, 求出 BD 的长; 若不存在, 请说明理由;

(2) 求点 A_1 到平面 BCC_1B_1 的距离.



20. (本小题满分 12 分)

2023 年中非经贸合作座谈会议在长沙举行,拟在某单位招募 5 名志愿者,该单位甲、乙、丙三个部门可分别向单位推选 3 名志愿者以供选拔,每个部门有 3 个小组,每个小组可向本部门推选 2 名志愿者供部门选拔,假设每名志愿者入选的机会相等.

- (1)求甲部门志愿者入选人数为 1 人的概率;
- (2)求所招募的 5 名志愿者来自三个部门的概率;
- (3)求某小组志愿者入选人数 X 的分布列及期望.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 2\sin x - \sin 2x$.

- (1)当 $0 \leq x \leq \pi$ 时,求 $f(x)$ 的最大值;
- (2)当 $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时,求证: $f(x) > \ln(x+1)$ (记 $\ln \frac{2\pi}{3} = 0.739$).

22. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点.

- (1)点 $P(x_0, y_0)$ 为椭圆 C 上的动点(与点 A, B 不重合),若直线 PA , 直线 PB 的斜率存在且斜率之积为 $-\frac{1}{4}$, 试探究直线 l 是否过定点, 并说明理由;
- (2)若 $OA \perp OB$, 过点 O 作 $OQ \perp AB$, 垂足为点 Q , 求点 Q 的轨迹方程.