



7. 若  $X \sim B(100, \frac{1}{3})$ , 则当  $k=0, 1, 2, \dots, 100$  时

A.  $P(X=k) \leq P(X=50)$

B.  $P(X=k) \leq P(X=32)$

C.  $P(X=k) \leq P(X=33)$

D.  $P(X=k) \leq P(X=49)$

8. 已知  $a=(e-0.1)^{e+0.1}, b=e^e, c=(e+0.1)^{e-0.1}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系是

A.  $a < b < c$

B.  $c < a < b$

C.  $b < a < c$

D.  $a < c < b$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知复数  $z$  的共轭复数为  $\bar{z}$ , 则下列说法正确的是

A.  $z^2 = |z|^2$

B.  $z + \bar{z}$  一定是实数

C. 若复数  $z_1, z_2$  满足  $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ , 则  $z_1 \cdot z_2 = 0$

D. 若复数  $z$  的平方是纯虚数, 则复数  $z$  的实部和虚部相等或者互为相反数

10. 已知不恒为 0 的函数  $f(x)$ , 满足  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  都有  $f(x) + f(y) = 2f(\frac{x+y}{2})f(\frac{x-y}{2})$ , 则

A.  $f(0) = 0$

B.  $f(0) = 1$

C.  $f(x)$  为奇函数

D.  $f(x)$  为偶函数

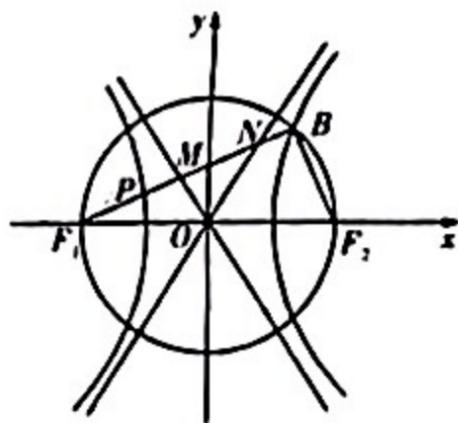
11. 如图, 已知双曲线:  $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$  的左右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 以  $F_1F_2$  为直径的圆与双曲线在第一象限交于点  $B$ , 连接  $BF_1, BF_2$ ,  $BF_1$  与双曲线左支交于点  $P$ , 与渐近线分别交于点  $M, N$ , 则

A.  $|PM| = |BN|$

B.  $S_{\triangle F_1BF_2} = 2$

C. 过  $F_2$  的双曲线的弦的长度的最小值为 8

D. 点  $B$  到两条渐近线的距离的积为  $\frac{4}{5}$



12. 如图, 正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 3,  $E$  为  $AB$  的中点,  $C_1F = 2FC$ , 动点  $M$  在侧面  $AA_1D_1D$  内运动(含边界), 则

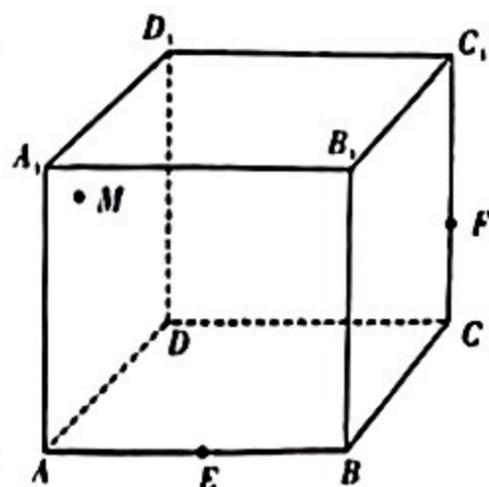
A. 若  $MB \parallel$  平面  $D_1EF$ , 则点  $M$  的轨迹长度为  $\frac{\sqrt{13}}{2}$

B. 平面  $D_1EF$  与平面  $ABCD$  的夹角的正切值为  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

C. 平面  $D_1EF$  截正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  所得的截面多边形的

周长为  $3\sqrt{13} + \frac{3\sqrt{2}}{2}$

D. 不存在一条直线  $l$ , 使得  $l$  与正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的所有棱所成的角都相等



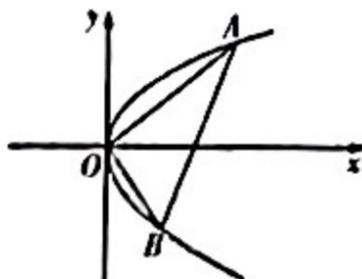
三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 计算:  $\frac{2\sin 20^\circ - \cos 10^\circ}{\sin 10^\circ} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

14. 六个身高不同的人排成二排三列,每一列后面的那个人比他(她)前面的那个人高,则共有          种排法.

15. 函数  $f(x) = x^x (x > 0)$  的最小值为         .

16. 如图,已知抛物线  $C: y^2 = 2x$ , 圆  $E: (x-2)^2 + y^2 = 4$ , 直线  $OA, OB$  分别交抛物线于  $A, B$  两点,且直线  $OA$  与直线  $OB$  的斜率之积等于  $-2$ , 则直线  $AB$  被圆  $E$  所截的弦长最小值为         .



四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.请在答题卡指定区域内作答.解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知正数数列  $\{a_n\}$ ,  $a_1 = 1$ , 且满足  $a_n^2 - (n-1)a_n a_{n-1} - n a_{n-1}^2 = 0 (n \geq 2)$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 设  $b_n = \frac{n-1}{a_n}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

18. (本小题满分 12 分)

在三角形  $ABC$  中,内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $\sqrt{2}b \sin C + a \sin A = b \sin B + c \sin C$ .

(1) 求  $A$ ;

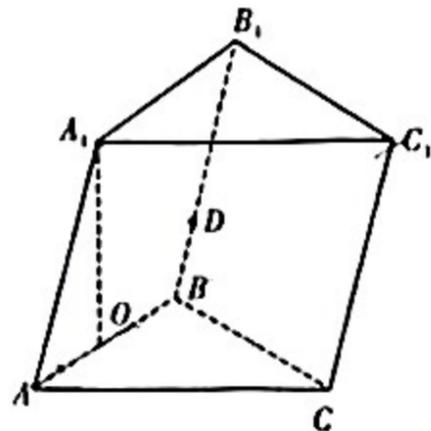
(2) 若  $a = \sqrt{2}$ , 求  $BC$  边上的高  $AD$  的最大值.

19. (本小题满分 12 分)

斜三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  的各棱长都为 2,  $\angle A_1AB = 60^\circ$ , 点  $A_1$  在下底面  $ABC$  的投影为  $AB$  的中点  $O$ .

(1) 在棱  $BB_1$  (含端点) 上是否存在一点  $D$  使  $A_1D \perp AC_1$ ? 若存在, 求出  $BD$  的长; 若不存在, 请说明理由;

(2) 求点  $A_1$  到平面  $BCC_1B_1$  的距离.



20. (本小题满分 12 分)

2023 年中非经贸合作座谈会议在长沙举行, 拟在某单位招募 5 名志愿者, 该单位甲、乙、丙三个部门可分别向单位推选 3 名志愿者以供选拔, 每个部门有 3 个小组, 每个小组可向本部门推选 2 名志愿者供部门选拔, 假设每名志愿者入选的机会相等.

- (1) 求甲部门志愿者入选人数为 1 人的概率;
- (2) 求所招募的 5 名志愿者来自三个部门的概率;
- (3) 求某小组志愿者入选人数  $X$  的分布列及期望.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = 2\sin x - \sin 2x$ .

- (1) 当  $0 \leq x \leq \pi$  时, 求  $f(x)$  的最大值;
- (2) 当  $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  时, 求证:  $f(x) > \ln(x+1)$  (记  $\ln \frac{2\pi}{3} = 0.739$ ).

22. (本小题满分 12 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ , 直线  $l$  与椭圆  $C$  交于  $A, B$  两点.

- (1) 点  $P(x_0, y_0)$  为椭圆  $C$  上的动点 (与点  $A, B$  不重合), 若直线  $PA$ , 直线  $PB$  的斜率存在且斜率之积为  $-\frac{1}{4}$ , 试探究直线  $l$  是否过定点, 并说明理由;
- (2) 若  $OA \perp OB$ , 过点  $O$  作  $OQ \perp AB$ , 垂足为点  $Q$ , 求点  $Q$  的轨迹方程.