高三理科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：集合、常用逻辑用语、函数、导数及其应用。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知命题 p：$\forall x\geqslant 1,\ln x\geqslant\sqrt{x}+1$，则 $\neg p$ 为

A. $\exists x<1,\ln x<\sqrt{x}+1$　　B. $\exists x\geqslant 1,\ln x<\sqrt{x}+1$

C. $\exists x\geqslant 1,\ln x\geqslant\sqrt{x}+1$　　D. $\forall x<1,\ln x<\sqrt{x}+1$

2. 已知集合 $A=\{x|y=\ln(2-x)\}$，$B=\{x|x^2<9\}$，则 $B\cap(\complement_{\mathbf{R}}A)=$

A. $(-3,2]$　　B. $[-3,2)$

C. $(2,3]$　　D. $[2,3)$

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}f(x+1)-f(x-2), & x\leqslant 0,\\ x^2-4, & x>0,\end{cases}$ $g(x)=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）．若 $f(0)=g(8)$，则 $a=$

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. 3

4. 我们知道，人们对声音有不同的感觉，这与声音的强度有关系．声音的强度常用 I（单位：瓦/米^2，即 $\mathrm{W/m^2}$）表示，但在实际测量时，声音的强度水平常用 L（单位：分贝）表示，它们满足换算公式：$L=10\lg\frac{I}{I_0}$（$L\geqslant 0$，其中 $I_0=1\times 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$ 是人们能听到的最小声音的强度，是听觉的开端）．若使某小区内公共场所声音的强度水平降低 10 分贝，则声音的强度应变为原来的

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{1}{100}$　　C. $\frac{1}{10}$　　D. $\frac{1}{20}$

5. "$\ln a<\ln b$"是"$a^{\frac{1}{3}}<b^{\frac{1}{3}}$"的

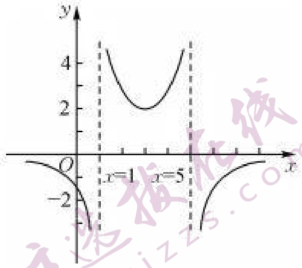
A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 已知函数 $f(x)=ax^3+bx+3(a,b\in\mathbf{R})$．若 $f(2)=5$，则 $f(-2)=$

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

7. 已知函数 $f(x)=\dfrac{d}{ax^2+bx+c}(a,b,c,d\in\mathbf{R})$ 的图象如图所示，则下列判断正确的是



A. $a>0,b>0,c<0,d>0$

B. $a<0,b>0,c<0,d>0$

C. $a<0,b>0,c>0,d>0$

D. $a>0,b<0,c>0,d>0$

8. 若偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，$a=f(\log_2 3)$，$b=f(\log_4 5)$，$c=f(2^{\frac{3}{2}})$，则 a,b,c 满足

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$

C. $c<a<b$　　D. $c<b<a$

9. 已知函数 $f(x)$ 满足：当 $x\leqslant a$ 时，$f(x)=x^3-x$，且 $f(a+x)=f(a-x)$. 若函数 $f(x)$ 恰有 5 个零点，则 $a=$

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 1

10. 已知函数 $f(x)=e^{4x-1}$，$g(x)=\dfrac{1}{2}+\ln 2x$，若 $f(m)=g(n)$ 成立，则 $n-m$ 的最小值为

A. $\dfrac{1-\ln 2}{4}$　　B. $\dfrac{2\ln 2-1}{3}$

C. $\dfrac{1+\ln 2}{4}$　　D. $\dfrac{1+2\ln 2}{3}$

11. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的连续奇函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，当 $x>0$ 时，$f'(x)+\dfrac{f(x)}{x}>0$，则使得 $2xf(2x)+(1-3x)f(3x-1)>0$ 成立的 x 的取值范围是

A. $\left(\dfrac{1}{5},1\right)$　　B. $\left(-1,\dfrac{1}{5}\right)\cup(1,+\infty)$

C. $(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,1)$

12. 定义“函数 $y=f(x)$ 是 D 上的 a 级类周期函数”如下：函数 $y=f(x)$，$x\in D$，对于给定的非零常数 a，总存在非零常数 T，使得定义域 D 内的任意实数 x 都有 $af(x)=f(x+T)$ 恒成立，此时 T 为 $f(x)$ 的周期. 若 $y=f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上的 a 级类周期函数，且 $T=1$，当 $x\in[1,2)$ 时，$f(x)=2^x(2x+1)$，且 $y=f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上的单调递增函数，则实数 a 的取值范围为

A. $\left[\dfrac{5}{6},+\infty\right)$　　B. $[2,+\infty)$

C. $\left[\dfrac{10}{3},+\infty\right)$　　D. $[10,+\infty)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知函数 $f(x)=(x+1)(x+a)x^4$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，则 $a=$________.

14. 若函数 $y=2x^3+1$ 与 $y=3x^2-b$ 的图象在一个公共点处的切线相同，则实数 $b=$________.

15. 函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-x$ 在区间 $(0,e]$ 上的最大值是________.

16. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}(a+1)x^2+ax$，集合 $M=\{x|f(x)<0\}$，$P=\{x|f'(x)<$

a 的取值构成的集合是________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

设函数 $f(x)=\sqrt{4^x-32}$ 的定义域为集合 A，集合 $B=\{x|x^2+ax-6<0\}$.

(1)若 $a=-5$，求 $A\cap B$；

(2)若 $3\notin B$，且 $-2\notin B$，求 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)$.

18.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x^2+bx-1$ 有两个零点 x_1,x_2，且 x_1,x_2 的倒数和为 -1.

(1)求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2)若在区间 $[-2,1]$ 上，不等式 $f(-x)>2x-m$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

19.（本小题满分 12 分）

已知 p：函数 $y=\ln(mx^2-4x+m)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，q：存在 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，使得不等式 $x^2-x+m-\frac{5}{4}\geqslant 0$ 成立.

(1)若 p 为真，求实数 m 的取值范围；

(2)若 $(\neg p)\vee q$ 为真且 $(\neg p)\wedge q$ 为假，求实数 m 的取值范围.

20.(本小题满分12分)

已知函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{2-ax}{x-2}(a\in\mathbf{R})$的图象关于原点对称.

(1)当 $x\in(2,+\infty)$时,$f(x)+\log_{\frac{1}{2}}(x-2)<m$ 恒成立,求实数 m 的取值范围;

(2)若关于 x 的方程 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+k)$在$(2,5]$上有解,求实数 k 的取值范围.

21.(本小题满分12分)

已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2,g(x)=e\ln x$.

(1)设函数 $F(x)=f(x)-g(x)$,求 $F(x)$的单调区间;

(2)若存在常数 k,m,使得 $f(x)\geqslant kx+m$,对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,且 $g(x)\leqslant kx+m$,对 $x\in(0,+\infty)$恒成立,则称直线 $y=kx+m$ 为函数 $f(x)$与 $g(x)$的"分界线",试问:$f(x)$与$g(x)$是否存在"分界线"?若存在,求出"分界线"的方程;若不存在,请说明理由.

22.(本小题满分12分)

已知函数 $f(x)=ae^x-x+1(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论函数 $f(x)$的零点的个数;

(2)若 $f(x)$有两个不同的零点 x_1、x_2,证明:$x_1+x_2>4$.

高三理科数学参考答案、提示及评分细则

1. B　根据命题的否定可知，$\neg p$ 为 $\exists x\geqslant1,\ln x<\sqrt{x}+1$. 故选 B.

2. D　$\because A=\{x|y=\ln(2-x)\}=\{x|x<2\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}A=\{x|x\geqslant2\}$. 又 $B=\{x|-3<x<3\}$，$\therefore B\cap(\complement_{\mathbf{R}}A)=\{x|2\leqslant x<3\}$. 故选 D.

3. A　$\because f(0)=f(1)-f(2)=-3$，又 $g(8)=\log_a8$，$\therefore \log_a8=-3$，则 $a^{-3}=8$，$\therefore a=\dfrac{1}{2}$. 故选 A.

4. C　设该小区内公共场所声音的强度水平为 L_1、L_2，相应声音的强度为 I_1、I_2，由题意，得 $L_1-L_2=10$，即 $10\lg\dfrac{I_1}{I_0}-10\lg\dfrac{I_2}{I_0}=10$，解得 $I_2=\dfrac{1}{10}I_1$. 故选 C.来源微信公众号：高三答案

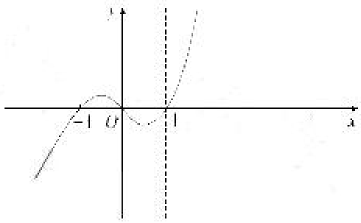
5. A　由 $\ln a<\ln b$，可得 $0<a<b$，所以 $a^{\frac{1}{3}}<b^{\frac{1}{3}}$，所以充分性成立；当 $a^{\frac{1}{3}}<b^{\frac{1}{3}}$ 时，在 $a<b<0$ 的情况下，$\ln a<\ln b$ 不成立，所以必要性不成立. 故“$\ln a<\ln b$”是“$a^{\frac{1}{3}}<b^{\frac{1}{3}}$”的充分不必要条件. 故选 A.

6. D　令 $g(x)=ax^3+bx$，则 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，又 $f(2)=3$，所以 $g(2)+3=5$，所以 $g(2)=2$，所以 $f(-2)=g(-2)+3=-2+3=1$. 故选 D.

7. B　由图象可知，$x\neq1$ 且 $x\neq5$. $\because ax^2+bx+c\neq0$，可知 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为 $1,5$，由韦达定理得 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=6$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}=5$，$\therefore a,b$ 异号，a,c 同号，又 $\because f(0)=\dfrac{d}{c}<0$，$\therefore c,d$ 异号，只有选项 B 符合题意. 故选 B.

8. B　$\because$ 偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，$\therefore f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增. $\because 2>\log_23=\log_49>\log_45$，$2^{\frac{3}{2}}>2$，$\therefore f(\log_45)<f(\log_23)<f(2^{\frac{3}{2}})$，$\therefore b<a<c$. 故选 B.

9. D　由 $f(a+x)=f(a-x)$ 知 $f(x)$ 的图象关于 $x=a$ 对称，再结合 $y=x(x+1)(x-1)$ 的大致图象可知，$y=x^3-x$ 有三个零点，最大的零点为 1，则 $a=1$ 时 $y=f(x)$ 的图象恰好与 x 轴有 5 个零点. 故选 D.



10. C　因为 $f(m)=g(n)$，所以可设 $e^{4m-1}=\dfrac{1}{2}+\ln 2n=t$，于是 $m=\dfrac{1}{4}(\ln t+1)$，$n=\dfrac{1}{2}e^{t-\frac{1}{2}}$，所以 $n-m=\dfrac{1}{2}e^{t-\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{4}\ln t-\dfrac{1}{4}$. 引入 $h(t)=\dfrac{1}{2}e^{t-\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{4}\ln t-\dfrac{1}{4}$，则 $h'(t)=\dfrac{1}{2}e^{t-\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{4t}$. 又因为 $h'(t)$ 是增函数，且 $h'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，所以函数 $h(t)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在区间 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，所以 $h(t)_{\min}=h\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1+\ln 2}{4}$，即 $n-m$ 的最小值为 $\dfrac{1+\ln 2}{4}$. 故选 C.

11. A　当 $x>0$ 时，$f'(x)+\dfrac{f(x)}{x}>0\Rightarrow xf'(x)+f(x)>0$，可得 $g(x)=xf(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $g(x)$ 为偶函数，所以 $2xf(2x)+(1-3x)f(3x-1)>0$ 等价于 $g(2x)>g(3x-1)$，可得 $|2x|>|3x-1|$，平方得 $4x^2>9x^2-6x+1$，解得 $\dfrac{1}{5}<x<1$. 故选 A.

12. C　$\because x\in[1,2)$ 时，$f(x)=2^x(2x+1)$，$\therefore$ 当 $x\in[2,3)$ 时，$f(x)=af(x-1)=a\cdot2^{x-1}(2x-1)$；当 $x\in[n+1,n+2)$ 时，$f(x)=af(x-1)=a^2f(x-2)=\cdots=a^nf(x-n)=a^n\cdot2^{x-n}(2x-2n+1)$. 即 $x\in[n+1,n+2)$ 时，$f(x)=a^n\cdot2^{x-n}(2x-2n+1)$，$n\in\mathbf{N}^*$. 当 $x\in[n,n+1)$ 时，$f(x)=a^{n-1}\cdot2^{x-n+1}\cdot(2x-2n+3)$，$\because f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore a>0$ 且 $a^n\cdot2^{n+1-n}\cdot(2n+2-2n+1)\geqslant a^{n-1}\cdot2^{(n+1-n+1)}\cdot(2n+2-2n+3)$，即 $a^n\cdot2\cdot3\geqslant a^{n-1}\cdot4\cdot5$，解得 $a\geqslant\dfrac{10}{3}$. $\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $\left[\dfrac{10}{3},+\infty\right)$. 故选 C.

13. -1　$\because y=x^4$ 为偶函数，$\therefore y=(x+1)(x+a)=x^2+(a+1)x+a$ 为偶函数，则 $-\dfrac{a+1}{2}=0$，$\therefore a=$

14. 0 或 -1　设公共切点的横坐标为 x_0，函数 $y=2x^3+1$ 的导数为 $y'=6x^2$，$y=3x^2-b$ 的导数为

$6x_0^2=6x_0$，$1+2x_0^3=3x_0^2-b$，解得 $x_0=0$，$b=-1$ 或 $x_0=1$，$b=0$. 则 $b=0$ 或 -1.

15. -1　$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}-1=\dfrac{1-x^2-\ln x}{x^2}$，设 $g(x)=1-x^2-\ln x$，则 $g(x)$ 在 $(0,e]$ 上递减，$\because g(1)=0$，$\therefore$ 当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)>0$，当 $x\in(1,e]$ 时，$g(x)<0$. $\therefore f(x)$ 在 $(0,1]$ 上递增，在 $(1,e]$ 上递减，$f(x)_{\max}=f(1)=-1$.

16. $\{0,1\}$　$f'(x)=x^2-(a+1)x+a=(x-a)(x-1)$，可以判断当 $a\neq1$ 时，$f(x)$ 既有极大值又有极小值，所以要使 $P\subsetneqq M$，只需 $f(x)$ 的极大值非正.

若 $a>1$，$f(x)$ 在 $x=1$ 处取极大值，故 $f(1)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}(a+1)+a=\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{6}\leqslant0$，即 $a\leqslant\dfrac{1}{3}$，这与 $a>1$ 矛盾；

若 $a<1$，$f(x)$ 在 $x=a$ 处取极大值，故 $f(a)=\dfrac{1}{3}a^3-\dfrac{1}{2}(a+1)a^2+a^2=a^2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{a}{6}\right)\leqslant0$，即 $a=0$，或 $a\geqslant3$（舍去）；

当 $a=1$ 时，$P=\varnothing$，显然成立.

综上可知，a 的取值构成的集合是 $\{0,1\}$.

17. 解：(1)由 $4^x-32\geqslant0$，得 $2^{2x}\geqslant2^5$，则 $x\geqslant\dfrac{5}{2}$，……………… 2 分

$\because a=-5$，$\therefore B=\{x|x^2-5x-6<0\}=\{x|-1<x<6\}$，……………… 4 分

$\therefore A\cap B=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{5}{2}\leqslant x<6\right\}$. ……………… 5 分

(2)$\because 3\notin B$，且 $-2\notin B$，$\therefore 3\in \complement_{\mathbf{R}}B$，$-2\in\complement_{\mathbf{R}}B$. ……………… 6 分

$\therefore\begin{cases}9+3a-6\geqslant0,\\4-2a-6\geqslant0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a\geqslant-1,\\a\leqslant-1,\end{cases}$ $\therefore a=-1$. ……………… 8 分

$\therefore B=\{x|-2<x<3\}$，……………… 9 分

$\therefore(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=\{x|x\leqslant-2\}$. ……………… 10 分

18. 解：(1)因为函数 $f(x)=x^2+bx-1$ 有两个零点 x_1,x_2，

所以 x_1,x_2 是方程 $x^2+bx-1=0$ 的两个实数根，所以 $x_1+x_2=-b$，$x_1x_2=-1$. ……………… 2 分

所以 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{-b}{-1}=b$. ……………… 3 分

又 x_1,x_2 的倒数和为 -1，所以 $b=-1$. ……………… 5 分

所以 $f(x)=x^2-x-1$. ……………… 6 分

(2)不等式 $f(-x)>2x-m$ 等价于 $x^2+x-1>2x-m$，即 $m>-x^2+x-1$. ……………… 8 分

要使不等式 $m>-x^2+x+1$ 在区间 $[-2,1]$ 上恒成立，只需令函数 $g(x)=-x^2+x+1$ 在区间 $[-2,1]$ 上的最大值小于 m 即可. ……………… 10 分

因为函数 $g(x)=-x^2+x+1$ 在区间 $\left[-2,\dfrac{1}{2}\right]$ 上单调递增，在区间 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上单调递减，

所以 $g(x)_{\max}=g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{4}$，所以 $m>\dfrac{5}{4}$.

因此，满足条件的实数 m 的取值范围是 $\left(\dfrac{5}{4},+\infty\right)$. ……………… 12 分

19. 解：(1)当 $m=0$ 时，$y=\ln(-4x)$，定义域 $(-\infty,0)$，不满足题意，舍去；……………… 1 分

当 $m\neq0$ 时，要使 $y=\ln(mx^2-4x+m)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，则 $\begin{cases}m>0,\\\Delta=16-4m^2<0,\end{cases}$ 解得 $m>2$. ……………… 3 分

综上可知：实数 m 的取值范围是 $(2,+\infty)$. ……………… 4 分

(2)q：存在 $x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$，使得不等式 $x^2-x+m-\dfrac{5}{4}\geqslant0$ 成立，

只需 $\left(x^2-x+m-\dfrac{5}{4}\right)_{\max}\geqslant0$，而 $x^2-x+m-\dfrac{5}{4}=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+m-\dfrac{3}{2}$，所以当 $x=0$ 时，$x^2-x+m-\dfrac{5}{4}$ 取到最大值 $m-\dfrac{5}{4}$，所以 $m-\dfrac{5}{4}\geqslant0$，$m\geqslant\dfrac{5}{4}$，

即 q 为真时，实数 m 的取值范围是 $m\geqslant\dfrac{5}{4}$. ……………… 6 分

因为 $(\neg p)\vee q$ 为真且 $(\neg p)\wedge q$ 为假，

所以 $\neg p$，q 一真一假，所以 p，q 真假相同，……………… 7 分

当 p 假 q 假时，$\begin{cases}m\leqslant2,\\m<\dfrac{5}{4},\end{cases}$ 此时 $m<\dfrac{5}{4}$；……………… 9 分

当 p 真 q 真时，$\begin{cases}m>2,\\m\geqslant\dfrac{5}{4},\end{cases}$ 此时 $m>2$. ………………

综上,实数 m 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{5}{4}\right)\cup(2,+\infty)$. ………… 12 分

20. 解:(1)∵函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称,

∴函数 $f(x)$ 为奇函数.

∴ $f(-x)=-f(x)$ 恒成立. ………… 2 分

∴ $\log_{\frac{1}{2}}\frac{2+ax}{-x-2}=-\log_{\frac{1}{2}}\frac{2-ax}{x-2}=\log_{\frac{1}{2}}\frac{x-2}{2-ax}$ 恒成立.

即 $\frac{2+ax}{-x-2}=\frac{x-2}{2-ax}$ 恒成立,解得 $a=-1$ 或 $a=1$. 又 $a=1$ 时,$\frac{2-x}{x-2}=-1$ 不合题意,舍去,所以 $a=-1$.

∴ $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{x+2}{x-2}$. ………… 4 分

∴ $f(x)+\log_{\frac{1}{2}}(x-2)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{x+2}{x-2}+\log_{\frac{1}{2}}(x-2)=\log_{\frac{1}{2}}(2+x)\ (x>2)$,

当 $x>2$ 时,$\log_{\frac{1}{2}}(2+x)<\log_{\frac{1}{2}}4=-2$.

∵当 $x\in(2,+\infty)$ 时,$f(x)+\log_{\frac{1}{2}}(x-2)<m$ 恒成立,

∴ $m\geqslant-2$,即实数 m 的取值范围是 $[-2,+\infty)$. ………… 6 分

(2)由 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+k)$,得 $\log_{\frac{1}{2}}\frac{x+2}{x-2}=\log_{\frac{1}{2}}(x+k)$,

∵关于 x 的方程 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+k)$ 在 $(2,5]$ 上有解,

∴关于 x 的方程 $\frac{x+2}{x-2}=x+k$ 在 $(2,5]$ 上有解,

即 $k=\frac{4}{x-2}-x+1$ 在 $(2,5]$ 上有解. ………… 9 分

∵函数 $g(x)=\frac{4}{x-2}-x+1$ 在 $(2,5]$ 上单调递减,

∴ $g(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{8}{3},+\infty\right)$,

∴ $k\in\left[-\frac{8}{3},+\infty\right)$,即实数 k 的取值范围是 $\left[-\frac{8}{3},+\infty\right)$. ………… 12 分

21. 解:(1)由于函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$,$g(x)=e\ln x$,

因此 $F(x)=f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x^2-e\ln x$,

则 $F'(x)=x-\frac{e}{x}=\frac{(x-\sqrt{e})(x+\sqrt{e})}{x}$,$x\in(0,+\infty)$. ………… 1 分

当 $0<x<\sqrt{e}$ 时,$F'(x)<0$,∴ $F(x)$ 在 $(0,\sqrt{e})$ 上是减函数;

当 $x>\sqrt{e}$ 时,$F'(x)>0$,∴ $F(x)$ 在 $(\sqrt{e},+\infty)$ 上是增函数. ………… 3 分

因此,函数 $F(x)$ 的单调减区间是 $(0,\sqrt{e})$,单调增区间是 $(\sqrt{e},+\infty)$. ………… 4 分

(2)由(1)可知,当 $x=\sqrt{e}$ 时,$F(x)$ 取得最小值 $F(\sqrt{e})=0$,

则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象在 $x=\sqrt{e}$ 处有公共点 $\left(\sqrt{e},\frac{e}{2}\right)$. ………… 5 分

假设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 存在“分界线”,则其必过点 $\left(\sqrt{e},\frac{e}{2}\right)$.

故设其方程为:$y-\frac{e}{2}=k(x-\sqrt{e})$,即 $y=kx+\frac{e}{2}-k\sqrt{e}$, ………… 7 分

由 $f(x)\geqslant kx+\frac{e}{2}-k\sqrt{e}$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,

则 $x^2-2kx-e+2k\sqrt{e}\geqslant0$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,

∴ $\Delta=4k^2-4(2k\sqrt{e}-e)=4(k-\sqrt{e})^2\leqslant0$ 成立,

因此 $k=\sqrt{e}$,“分界线”的方程为 $y=\sqrt{e}x-\frac{e}{2}$. ………… 9 分

下面证明 $g(x)\leqslant\sqrt{e}x-\frac{e}{2}$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立,

设 $G(x)=e\ln x-\sqrt{e}x+\frac{e}{2}$,则 $G'(x)=\frac{e}{x}-\sqrt{e}=\frac{\sqrt{e}(\sqrt{e}-x)}{x}$.

∴当 $0<x<\sqrt{e}$ 时,$G'(x)>0$,当 $x>\sqrt{e}$ 时,$G'(x)<0$,

当 $x=\sqrt{e}$ 时，$G(x)$ 取得最大值 0，

则 $g(x)\leqslant\sqrt{e}x-\frac{e}{2}$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立. ………………………………………… 11 分

故所求"分界线"的方程为 $y=\sqrt{e}x-\frac{e}{2}$. ………………………………………… 12 分

22.(1)解：因为 $f'(x)=ae^x-1$，

当 $a=0$ 时，$f(x)=-x+1=0$，解得 $x=1$. 函数 $f(x)$ 有一个零点；………………………… 1 分

当 $a<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减. 又 $f(1)=ae-1+1=ae<0$，存在实数 x_0，当 $x_0<0$ 且 $x_0<1+a$ 时，$f(x_0)=ae^{x_0}-x_0+1>a+1-x_0>0$，所以 $f(x_0)f(1)<0$，函数 $f(x)$ 有一个零点；………………… 2 分

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0\Rightarrow x=-\ln a$.

且当 $x<-\ln a$ 时，$f'(x)<0$，此时函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上单调递减；

当 $x>-\ln a$ 时，$f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$ 在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增. ………………… 3 分

当 $f(x)_{\min}=f(-\ln a)=2+\ln a<0$，解得 $0<a<\frac{1}{e^2}$. ………………………………… 4 分

令 $t=\frac{1}{a}>e$，构造函数 $h(t)=e^t-t^2$，其中 $t>e$，则 $h'(t)=e^t-2t$，

令 $u(t)=e^t-2t$，所以 $u'(t)=e^t-2>0$，

所以函数 $h'(t)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递增，可得出 $h'(t)>h'(e)=e^e-2e>e^e-e^2>0$，

所以函数 $h(t)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递增，可得出 $h(t)>h(e)=e^e-e^2>0$，

所以当 $0<a<\frac{1}{e^2}$ 时，$e^{\frac{1}{a}}>\frac{1}{a^2}$.

当 $0<a<\frac{1}{e^2}$ 时，$f(0)=a+1>0$，$f\left(\frac{1}{a}\right)=ae^{\frac{1}{a}}-\frac{1}{a}+1>a\cdot\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}+1=1>0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,-\ln a)$ 和 $\left(-\ln a,\frac{1}{a}\right)$ 上各有一个零点，即函数 $f(x)$ 有两个零点. ……………… 5 分

当 $f(x)_{\min}=f(-\ln a)=2+\ln a=0$ 时，即 $a=\frac{1}{e^2}$，函数 $f(x)$ 有一个零点；………………………… 6 分

当 $f(x)_{\min}=f(-\ln a)=2+\ln a>0$ 时，即 $a>\frac{1}{e^2}$，函数 $f(x)$ 没有一个零点. ……………………… 7 分

综上所述，当 $a\leqslant0$ 或 $a=\frac{1}{e^2}$ 时，函数 $f(x)$ 有一个零点；

当 $0<a<\frac{1}{e^2}$ 时，函数 $f(x)$ 有两个零点；

当 $a>\frac{1}{e^2}$ 时，函数 $f(x)$ 没有零点. ………………………………………………… 8 分

(2)证明：由 $f(x)=ae^x-x+1=0$，得 $\frac{x-1}{e^x}-a=0$，令 $g(x)=\frac{x-1}{e^x}-a$，则 $g'(x)=\frac{2-x}{e^x}$，

由 $g'(x)=\frac{2-x}{e^x}>0$，得 $x<2$；由 $g'(x)=\frac{2-x}{e^x}<0$，得 $x>2$.

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减. …………………………… 9 分

由于 x_1、x_2 是方程 $g(x)=0$ 的实根，不妨设 $x_1<2<x_2$，

要证 $x_1+x_2>4$，只要证 $x_2>4-x_1>2$.

由于 $g(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 单调递减，故只要证 $g(x_2)<g(4-x_1)$，

由于 $g(x_1)=g(x_2)=0$，故只要证 $g(x_1)<g(4-x_1)$. ……………………………………… 10 分

令 $H(x)=g(x)-g(4-x)=\frac{x-1}{e^x}-\frac{3-x}{e^{4-x}}(x<2)$，

则 $H'(x)=\frac{2-x}{e^x}-\frac{2-x}{e^{4-x}}=\frac{(e^{4-x}-e^x)(2-x)}{e^4}$，

因为 $x<2$，所以 $2-x>0$，$4-x>x$，所以 $e^{4-x}>e^x$，即 $e^{4-x}-e^x>0$，

所以 $H'(x)>0$，所以 $H(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上为增函数.

所以 $H(x_1)<H(2)=0$，即有 $g(x_1)<g(2-x_1)$ 成立，所以 $x_1+x_2>4$. ………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。