

华南师大附中 2023-2024 学年高三开学测

数学

本试卷分选择题和非选择题两部分，共 4 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名、考号和座位号填写在答题卡指定区域内，并用 2B 铅笔填涂相关信息。
2. 选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔涂黑答题卡上对应题目的答案标号；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，答在问卷上则答案无效。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡上各题目指定区域内的相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。
4. 考生必须保持答题卡的整洁。

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个符合要求的。

1. 复数 $z = \frac{4i}{1+i}$ ，则 z 的辐角主值为 ()

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{7\pi}{4}$ C. $\frac{3\pi}{4}$ D. $-\frac{\pi}{4}$

2. 设集合 $M = \{x | x^2 + 2x - 3 < 0, x \in \mathbb{Z}\}$ ，则 M 的子集数量是

- A. 8 B. 7 C. 32 D. 31

3. 椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 (a > b > 0)$ 的两焦点分别为 F_1, F_2 ， A 是椭圆 E 上

一点，当 $\Delta F_1 A F_2$ 的面积取得最大值时， $\angle F_1 A F_2 = ()$ 。

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

4. $(x+7)^5$ 展开式中 x^3 项的系数是

- A. 245 B. 10 C. 49 D. 490

5. 以下什么物体能被放进底面半径为 $\frac{1}{2}m$ ，高为 $\sqrt{3}m$ 的圆柱中

- A. 底面半径为 $\frac{3}{4}m$ ，母线长为 $\frac{\sqrt{10}}{4}m$ 的圆锥 B. 底面半径为 $0.01m$ ，高为 $1.9m$ 的圆柱
C. 边长为 $1m$ 的立方体 D. 底面积为 $\frac{3}{2}m^2$ ，高为 $1.5m$ 的直三棱柱

6. 有下列一组数据: 4 4 2 4 9 8 0 5 3, 则这组数据的第 80 百分位数是 ()

- A. 5.6 B. 5 C. 8 D. 6.2

7. 设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 1 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + 2^3 C_n^3 + \dots + 2^n C_n^n (n \in \mathbb{N}^*)$, 其前 n 项和为 S_n , 则使 $S_n > 2023$ 的最小 n 是 ()

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

8. $a = \frac{1}{10} + \ln 10, b = 6 \ln 11 - 5 \ln 9 - 1, c = \frac{10}{99} + \frac{\ln 99}{2}$, 则 a, b, c 的大小关系是 ()

- A. $a > c > b$ B. $a > b > c$ C. $b > a > c$ D. $c > b > a$

二、多选题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求。全部选对得 5 分, 漏选得 2 分, 有选错或未选的得 0 分。

9. 下列式子中最小值是 3 的是 ()

- A. $x \ln x + \frac{9}{x \ln x}$ B. $x + \frac{9}{x}$ C. $x e^x + \frac{3e+1}{e}$ D. $2x^2 + 4x + 5$

10. $f(x) = a \cos \omega x (\omega > 0)$, 若将 $f(x)$ 图象向左平移 $\frac{\pi}{6\omega}$ 个单位长度后在 $[0, \frac{7\pi}{12}]$ 上有且只有两个零点, 则 ω 的取值可以是 ()

- A. $\frac{16}{7}$ B. 2 C. 3 D. 4

11. 已知正方形 $ABCD$ 中, $AB = 2$, P 是平面 $ABCD$ 外一点, 设直线 PB 与平面 $ABCD$ 所成角为 α , 设三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 V , 则下列命题正确的是 ()

- A. 若 $PA + PC = 2\sqrt{3}$, 则 α 的最大值是 $\frac{\pi}{4}$ B. 若 $PA + PC = 2\sqrt{3}$, 则 V 的最大值是 $\frac{1}{3}$

- C. 若 $PA^2 + PC^2 = 4$, 则 V 的最大值是 $\frac{2}{3}$ D. 若 $PA^2 + PC^2 = 4$, 则 α 的最大值是 $\frac{\pi}{4}$

12. 在本场考试中, 多选题可能有 2 个或 3 个正确的选项, 全部选对得 5 分, 漏选得 2 分, 有选错或未选的得 0 分。如果你因完全不会做某道题目而必须随机选择 1~3 项选项, 设该题恰有两个正确选项的概率为 p_0 , 你的得分为随机变量 X , 则下列说法正确的是 ()

- A. 若随机选择两项, 则存在 p_0 使 $E(X) > 1$ B. 无论 p_0 为多少, 随机选择一项总能使 $E(X)$ 最大

- C. 若 $p_0 > \frac{3}{13}$ 则随机选择两项比随机选择三项更优 D. 若随机选择三项, 则存在 p_0 使 $E(X) > 1$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 设随机变量 $X \sim N(5, 2^2)$, 则 $P(X > 5) =$ _____

14. 直线 l 与圆 $G: (x-4)^2 + (y+1)^2 = 4$ 和椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 同时相切, 请写出一条符合条件的 l 的方程 来源: 高三答案公众号

15. 底面是面积为 $\sqrt{3}$ 的等边三角形 ABC 的三棱锥 $P-ABC$ 的表面积是 $6 + \sqrt{3}$, 则其体积的最大值是 _____

16. 有 8 个不同的小球从左到右排成一排, 从中拿出至少一个球且不能同时拿出相邻的两个球的方案数量是 _____

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

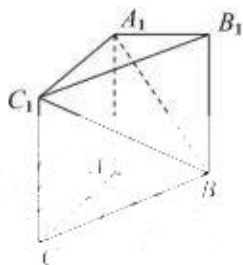
17. (10 分)

向量 \vec{a} 与 \vec{b} 能作为平面向量的一组基底.

(1). 若 $\vec{AB} = \vec{a} + 7\vec{b}$, $\vec{BC} = 3\vec{a} + 4\vec{b}$, $\vec{DC} = \vec{a} - 10\vec{b}$, 证明 A, B, D 三点共线

(2). 若 $\vec{a} + k\vec{b}$ 与 $(k+1)\vec{a} + \vec{b}$ 共线, 求 k 的值

18. (12 分) 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 四边形 AA_1C_1C 是边长为 4 的正方形, 平面 $ABC \perp$ 平面 AA_1C_1C , $AB = 3$, $BC = 5$



(1). 求证: $AA_1 \perp$ 平面 ABC

(2). 求平面 A_1C_1B 与平面 B_1C_1B 的夹角的余弦值

19. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为 A, B, C 的对边, $\cos C = \frac{\sin^2 C}{\sin A \sin B}$

(1). 证明 $a^2 + b^2 = 3c^2$

(2). 求 $\cos C$ 的取值范围

20. (12 分)

已知函数 $f(x) = e^x - a \sin x + bx$ ($a > 0$).

(1). 当 $b = 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上有极小值, 求实数 a 的取值范围

(2). 若 $b < 0$, $g(x) = f(x) + a \sin x$, 证明 $g(x) > b \ln(-\frac{b}{2})$

21. (12分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两焦点分别为 $F_1(-\sqrt{3}, 0), F_2(\sqrt{3}, 0)$, A 是椭圆 E 上

一点, 当 $\angle F_1AF_2 = \frac{\pi}{3}$ 时, ΔF_1AF_2 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(1). 求椭圆 E 的方程

(2). 直线 $l_1: k_1x - y + 2k_1 = 0 (k_1 > 0)$ 与椭圆 E 交于 M, N 两点, 线段 MN 的中点为 P , 过 P 作垂直 x 轴的直线在第二象限交椭圆 E 于点 S , 过 S 作椭圆 E 的切线 l_2 , l_2 的斜率为 k_2 , 求 $k_1 - k_2$ 的取值范围

22. (12分)

记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_1 = 1, 2S_n - a_n = n^2$.

1. 求数列 a_n 的通项公式

2. 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{1}{a_n}$, 证明对任意 $n \in N^*$, $\ln(n+1) + \frac{n}{2(n+1)} < b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n \leq$

$\ln(n) + 1$

3. 某铁道线上共有 84 列列车运行, 且每次乘坐到任意一列列车的概率相等, 设随机变量 X

为恰好乘坐一次全部列车所乘坐的次数, 试估算 $\frac{E(X)}{84}$ 的值 (结果保留整数)

参考数据: $\ln 2 \approx 0.6931, \ln 3 \approx 1.0986, \ln 7 \approx 1.9459$



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

