福建省 2023 届高中毕业班适应性练习卷

数学参考答案及评分细则

评分说明：

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则。

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4．只给整数分数。选择题和填空题不给中间分。

一、选择题：本大题考查基础知识和基本运算。每小题 5 分，满分 40 分。

1．D　2．B　3．C　4．A　5．D　6．D　7．A　8．B

二、选择题：本大题考查基础知识和基本运算。每小题 5 分，满分 20 分。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9．BC　10．ABD　11．ACD　12．BD

三、填空题：本大题考查基础知识和基本运算。每小题 5 分，满分 20 分。

13．$y=x-2$，$y=-x+2$（只需填其中的一个即可）

14．2　15．$\left[\frac{1}{2},2\right]$　16．$\sqrt{3}a$，$\left(\frac{2\sqrt{21}}{3}a,2\sqrt{3}a\right)$

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．本小题主要考查正弦定理、余弦定理、三角恒等变换、三角形面积及平面向量等基础知识，考查直观想象能力、逻辑推理能力、运算求解能力等，考查化归与转化思想、函数与方程思想、数形结合思想等，考查数学运算、逻辑推理、直观想象等核心素养，体现基础性和综合性．满分 10 分．

解法一：（1）因为$b=2c\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$，在$\triangle ABC$中，由正弦定理得，

$\sin B=2\sin C\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$，……………………1 分

又因为$\sin B=\sin(\pi-A-C)=\sin(A+C)$，

所以$\sin(A+C)=2\sin C\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$，……………………2 分

展开得$\sin A\cos C+\cos A\sin C=2\sin C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\frac{1}{2}\cos A\right)$，……………………3 分

即$\sin A\cos C-\sqrt{3}\sin C\sin A=0$，

因为$\sin A\neq 0$，故$\cos C=\sqrt{3}\sin C$，即$\tan C=\frac{\sqrt{3}}{3}$．……………………4 分

又因为$C\in(0,\pi)$，所以$C=\frac{\pi}{6}$．……………………5 分

（2）设$\triangle ABC$的外接圆的圆心为O，半径为R，

因为 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}^2$，所以 $\overrightarrow{BA}\cdot\left(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}\right)=0$，即 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，

所以 $DA\perp BA$ ....6 分

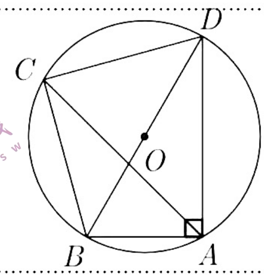
故 BD 是 $\odot O$ 的直径，所以 $BC\perp CD$.

在 $\triangle ABC$ 中，$c=1$，$2R=\dfrac{c}{\sin\angle BCA}=\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=2$，所以 $BD=2$ ....7 分

在 $\triangle ABD$ 中，$AD=\sqrt{BD^2-AB^2}=\sqrt{3}$.

设四边形 $ABCD$ 的面积为 S，$BC=x$，$CD=y$，则 $x^2+y^2=4$，.......................................8 分

$S=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AD+\dfrac{1}{2}BC\cdot CD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}xy$ ....9 分



$\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^2+y^2}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1$，

当且仅当 $x=y=\sqrt{2}$ 时，等号成立.

所以四边形 $ABCD$ 面积最大值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1$. ....10 分

解法二：（1）同解法一；...5 分

（2）设 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 O，半径为 R，$\overrightarrow{BD}$ 在 $\overrightarrow{BA}$ 上的投影向量为 $\lambda\overrightarrow{BA}$，

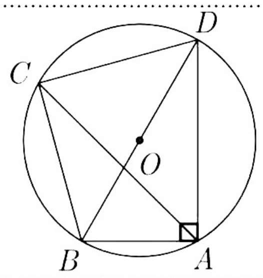
所以 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}\cdot\left(\lambda\overrightarrow{BA}\right)=\lambda\left|\overrightarrow{BA}\right|^2$. 又 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}^2=\left|\overrightarrow{BA}\right|^2$，所以 $\lambda=1$，

所以 $\overrightarrow{BD}$ 在 $\overrightarrow{BA}$ 上的投影向量为 $\overrightarrow{BA}$.

所以 $DA\perp BA$ ....6 分

故 BD 是 $\odot O$ 的直径，所以 $BC\perp CD$.

在 $\triangle ABC$ 中，$c=1$，$2R=\dfrac{c}{\sin\angle BCA}=\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=2$，所以 $BD=2$ ....7 分



在 $\triangle ABD$ 中，$AD=\sqrt{BD^2-AB^2}=\sqrt{3}$.

设四边形 $ABCD$ 的面积为 S，$\angle CBD=\theta$，$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

则 $CB=2\cos\theta$，$CD=2\sin\theta$，..8 分

$S=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AD+\dfrac{1}{2}CB\cdot CD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sin 2\theta$ ....9 分

当 $2\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时，S 最大，所以四边形 $ABCD$ 面积最大值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1$. ....10 分

解法三：（1）同解法一；...5 分

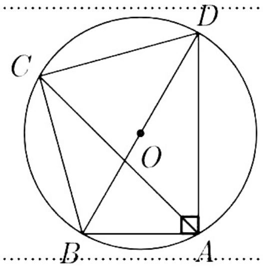
（2）设$\triangle ABC$的外接圆的圆心为O，半径为R，

因为$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}^2$，所以$\overrightarrow{BA}\cdot\left(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}\right)=0$，即$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，

所以$DA\perp BA$ ....6 分

故BD是$\odot O$的直径，所以$BC\perp CD$．

在$\triangle ABC$中，$c=1$，$2R=\dfrac{c}{\sin\angle BCA}=\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=2$，所以$BD=2$ ....7 分



在$\triangle ABD$中，$AD=\sqrt{BD^2-AB^2}=\sqrt{3}$．

设四边形$ABCD$的面积为S，点C到BD的距离为h，

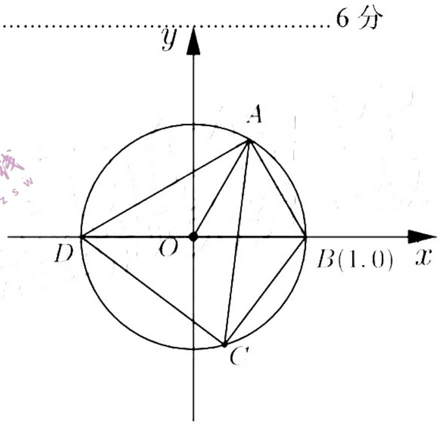
则$S=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AD+\dfrac{1}{2}BD\cdot h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+h$ ....9 分

当$h=R=1$时，S最大，所以四边形$ABCD$面积最大值为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1$ ....10 分

解法四：（1）同解法一； ....5 分

（2）设$\triangle ABC$的外接圆的圆心为O，半径为R，

在$\triangle ABC$中，$c=1$，$2R=\dfrac{c}{\sin\angle BCA}=\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=2$， ....6 分



故$\triangle ABC$外接圆$\odot O$的半径$R=1$．

即$OA=OB=AB=1$，所以$\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$．

如图，以$\triangle ABC$外接圆的圆心为原点，OB所在直线为x轴，

建立平面直角坐标系xOy，则$A\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$B(1,0)$．

因为C，D为单位圆上的点，设$C(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$D(\cos\beta,\sin\beta)$，其中$\alpha\in(0,2\pi)$，$\beta\in(0,2\pi)$．

所以$\overrightarrow{BA}=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{BD}=(\cos\beta-1,\sin\beta)$， ....7 分

代入$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}^2$，即$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=1$，可得$-\dfrac{1}{2}\cos\beta+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta=1$， ....8 分

即$\sin\left(\beta-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$．

由$\beta\in(0,2\pi)$可知$\beta-\dfrac{\pi}{6}\in\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6}\right)$，所以解得$\beta-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$或$\beta-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}$，即$\beta=\dfrac{\pi}{3}$或$\beta=\pi$．

当 $\beta=\frac{\pi}{3}$ 时，A,D 重合，舍去；当 $\beta=\pi$ 时，BD 是 $\odot O$ 的直径.

设四边形 $ABCD$ 的面积为 S，

则 $S=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}=\frac{1}{2}BD\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}BD\cdot|\sin\alpha|=\frac{\sqrt{3}}{2}+|\sin\alpha|$，……9 分

由 $\alpha\in(0,2\pi)$ 知 $|\sin\alpha|\leqslant 1$，所以当 $\alpha=\frac{3\pi}{2}$ 时，即 C 的坐标为 $(0,-1)$ 时，S 最大，

所以四边形 $ABCD$ 面积最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}+1$. ……10 分

18．本小题主要考查指数与对数基本运算、递推数列、等差数列、等比数列及数列求和等基础知识，考查运算求解能力、逻辑推理能力和创新能力等，考查化归与转化思想、分类与整合思想、函数与方程思想、特殊与一般思想等，考查逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性和创新性．满分 12 分.

解法一：（1）由 $a_{2n-1}+a_{2n+1}=\log_2 a_{2n}$，得 $a_{2n}=2^{a_{2n-1}+a_{2n+1}}$，……2 分

则 $a_{2n+2}=2^{a_{2n+1}+a_{2n+3}}$，从而 $a_{2n}a_{2n+2}=2^{a_{2n-1}+a_{2n+1}}\cdot 2^{a_{2n+1}+a_{2n+3}}=2^{a_{2n-1}+2a_{2n+1}+a_{2n+3}}$，……3 分

又 $a_{2n}a_{2n+2}=16^{a_{2n+1}}=2^{4a_{2n+1}}$，……4 分

所以 $a_{2n-1}+2a_{2n+1}+a_{2n+3}=4a_{2n+1}$，……5 分

即 $a_{2n-1}+a_{2n+3}=2a_{2n+1}$，所以 $\{a_{2n-1}\}$ 是等差数列. ……6 分

（2）设等差数列 $\{a_{2n-1}\}$ 的公差为 d.

当 $n=1$ 时，$a_1+a_3=\log_2 a_2$，即 $1+a_3=\log_2 8$，

所以 $a_3=2$，所以 $d=a_3-a_1=1$，……7 分

所以数列 $\{a_{2n-1}\}$ 是首项为 1，公差为 1 的等差数列，

所以 $a_{2n-1}=n$；……8 分

又 $a_{2n}=2^{a_{2n-1}+a_{2n+1}}=2^{n+(n+1)}=2^{2n+1}$；……9 分

$S_9=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9=(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)+(a_2+a_4+a_6+a_8)$

$=(1+2+3+4+5)+(2^3+2^5+2^7+2^9)=15+680=695<2023$，

又 $S_{10}=S_9+a_{10}=695+2^{11}=2743>2023$；

又 $a_n>0$，则 $S_n<S_{n+1}$，且 $S_9<2023<S_{10}$，......11 分

所以 n 的最小值为10......12 分

解法二：（1）由 $a_{2n}>0$，且 $a_{2n}a_{2n+2}=16^{a_{2n+1}}$，

则 $\log_2\left(a_{2n}a_{2n+2}\right)=\log_2 16^{a_{2n+1}}$，......2 分

得 $\log_2 a_{2n}+\log_2 a_{2n+2}=4a_{2n+1}$，......4 分

因为 $a_{2n-1}+a_{2n+1}=\log_2 a_{2n}$， $a_{2n+1}+a_{2n+3}=\log_2 a_{2n+2}$，

所以 $\left(a_{2n-1}+a_{2n+1}\right)+\left(a_{2n+1}+a_{2n+3}\right)=4a_{2n+1}$，......5 分

即 $a_{2n-1}+a_{2n+3}=2a_{2n+1}$， 所以 $\left\{a_{2n-1}\right\}$ 是等差数列......6 分

（2）设等差数列 $\left\{a_{2n-1}\right\}$ 的公差为 d.

当 $n=1$ 时， $a_1+a_3=\log_2 a_2$， 即 $1+a_3=\log_2 8$，

所以 $a_3=2$， 所以 $d=a_3-a_1=1$，......7 分

所以数列 $\left\{a_{2n-1}\right\}$ 是首项为1，公差为1的等差数列，

所以 $a_{2n-1}=n$；......8 分

又 $a_{2n-1}+a_{2n+1}=\log_2 a_{2n}$，

所以 $a_{2n}=2^{a_{2n-1}+a_{2n+1}}=2^{n+(n+1)}=2^{2n+1}$；......9 分

当 $k\in\mathbf{N}^*$ 时,

$S_{2k}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2k}$

$=\left(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k-1}\right)+\left(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k}\right)$

$=\left(1+2+3+\cdots+k\right)+\left(2^3+2^5+2^7+\cdots+2^{2k+1}\right)$

$=\dfrac{k(k+1)}{2}+\dfrac{8\left(4^k-1\right)}{3}$，

$S_{2k-1}=S_{2k}-a_{2k}=\dfrac{k(k+1)}{2}+\dfrac{8\left(4^k-1\right)}{3}-2^{2k+1}=\dfrac{k(k+1)}{2}+\dfrac{2\times 4^k-8}{3}$，

所以 $S_9=S_{2\times5-1}=\dfrac{5\times6}{2}+\dfrac{2\times4^5-8}{3}=695<2023$，

$S_{10}=S_{2\times5}=\dfrac{5\times6}{2}+\dfrac{8\left(4^5-1\right)}{3}=2743>2023$，

又 $a_n>0$，则 $S_n<S_{n+1}$，且 $S_9<2023<S_{10}$，……………………………………………………11 分

所以 n 的最小值为 10……………………………………………………………………………12 分

解法三：（1）同解法一；……………………………………………………………………………6 分

（2）设等差数列 $\{a_{2n-1}\}$ 的公差为 d.

当 $n=1$ 时，$a_1+a_3=\log_2 a_2$，即 $1+a_3=\log_2 8$，

所以 $a_3=2$，所以 $d=a_3-a_1=1$，…………………………………………………………………7 分

所以数列 $\{a_{2n-1}\}$ 是首项为 1，公差为 1 的等差数列，

所以 $a_{2n-1}=n$；……………………………………………………………………………………8 分

又 $a_{2n}=2^{a_{2n-1}+a_{2n+1}}=2^{n+(n+1)}=2^{2n+1}$；……………………………………………………9 分

当 $k\in\mathbf{N}^*$ 时，

$S_{2k-1}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2k-1}$

$=\left(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k-1}\right)+\left(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k-2}\right)$

$=\left(1+2+3+\cdots+k\right)+\left(2^3+2^5+2^7+\cdots+2^{2k-1}\right)$

$=\dfrac{k(k+1)}{2}+8\left(\dfrac{1-4^{k-1}}{1-4}\right)=\dfrac{k(k+1)}{2}+\dfrac{8\left(4^{k-1}-1\right)}{3}$，

所以 $S_9=S_{2\times5-1}=\dfrac{5\times6}{2}+\dfrac{8\left(4^4-1\right)}{3}=695<2023$，$S_{10}=S_9+a_{10}=695+2^{2\times5+1}=2743>2023$.

又 $a_n>0$，则 $S_n<S_{n+1}$，且 $S_9<2023<S_{10}$，……………………………………………………11 分

所以 n 的最小值为 10……………………………………………………………………………12 分

19．本小题主要考查一元线性回归模型、条件概率与全概率公式等基础知识，考查数学建模能力、运算求解能力、逻辑推理能力、直观想象能力等，考查统计与概率思想、分类与整合思想等，考查数学抽象、数学建模和数学运算等核心素养，体现应用性和创新性．满分 12 分．

解：（1）由散点图判断 $y=c\ln(x-2012)+d$ 适宜作为该机场飞往 A 地航班放行准点率 y 关于年份数 x

的经验回归方程类型. ....1 分

令 $t=\ln(x-2012)$，先建立 y 关于 t 的线性回归方程.

由于 $\hat{c}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{10}t_iy_i-10\bar{t}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{10}t_i^2-10\bar{t}^2}=\dfrac{1226.8-10\times1.5\times80.4}{27.7-10\times1.5^2}=4$， ....2 分

$\hat{d}=\bar{y}-\hat{c}\bar{t}=80.4-4\times1.5=74.4$， ....3 分

该机场飞往 A 地航班放行准点率 y 关于 t 的线性回归方程为 $\hat{y}=4t+74.4$，

因此 y 关于年份数 x 的回归方程为 $\hat{y}=4\ln(x-2012)+74.4$ ....4 分

所以当 $x=2023$ 时，该机场飞往 A 地航班放行准点率 y 的预报值为

$\hat{y}=4\ln(2023-2012)+74.4=4\ln11+74.4\approx4\times2.40+74.4=84$.

所以 2023 年该机场飞往 A 地航班放行准点率 y 的预报值为 84%. ....5 分

（2）设 A_1 =“该航班飞往 A 地”，A_2 =“该航班飞往 B 地”，A_3 =“该航班飞往其他地区”，

C =“该航班准点放行”， ....6 分

则 $P(A_1)=0.2$，$P(A_2)=0.2$，$P(A_3)=0.6$，

$P(C|A_1)=0.84$，$P(C|A_2)=0.8$，$P(C|A_3)=0.75$ ....7 分

（i）由全概率公式得，

$P(C)=P(A_1)P(C|A_1)+P(A_2)P(C|A_2)+P(A_3)P(C|A_3)$ ....8 分

$=0.84\times0.2+0.8\times0.2+0.75\times0.6=0.778$，

所以该航班准点放行的概率为 0.778. ....9 分

（ii）$P(A_1|C)=\dfrac{P(A_1C)}{P(C)}=\dfrac{P(A_1)P(C|A_1)}{P(C)}=\dfrac{0.2\times0.84}{0.778}$，

$P(A_2|C)=\dfrac{P(A_2C)}{P(C)}=\dfrac{P(A_2)P(C|A_2)}{P(C)}=\dfrac{0.2\times0.8}{0.778}$，

$P(A_3|C)=\dfrac{P(A_3C)}{P(C)}=\dfrac{P(A_3)P(C|A_3)}{P(C)}=\dfrac{0.6\times0.75}{0.778}$， ....11 分

因为 $0.6\times0.75>0.2\times0.84>0.2\times0.8$，

所以可判断该航班飞往其他地区的可能性最大. ....12 分

20．本小题主要考查直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系，空间几何体的体积、平面与平面的夹角等基础知识；考查直观想象能力，逻辑推理能力，运算求解能力等；考查化归与转化思想，数

形结合思想，函数与方程思想等；考查直观想象，逻辑推理，数学运算等核心素养；体现基础性和综合性．满分 12 分．

解法一：（1）如图 1，取 AB 中点 O，连接 PO，CO．

因为 $PA=PB=\sqrt{2}$，$AB=2$，所以 $PO\perp AB$，$PO=1$，$BO=1$．

又因为 $ABCD$ 是菱形，$\angle ABC=60^{\circ}$，所以 $CO\perp AB$，$CO=\sqrt{3}$．

因为 $PC=2$，所以 $PC^2=PO^2+CO^2$，所以 $PO\perp CO$．

又因为 $AB\subset$ 平面 $ABCD$，$CO\subset$ 平面 $ABCD$，$AB\cap CO=O$，

所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$．..2 分

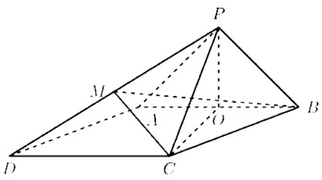
因为 $AD/\!/BC$，$BC\subset$ 平面PBC，$AD\not\subset$ 平面PBC，

所以 $AD/\!/$ 平面PBC，所以 $V_{D-PBC}=V_{A-PBC}=V_{P-ABC}=\frac{1}{3}PO\cdot S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ....3 分

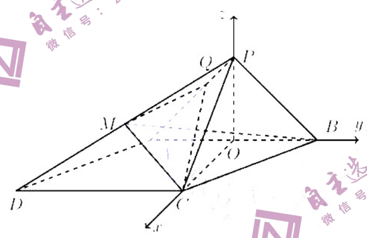
因为 $V_{M-PBC}=\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{1}{2}V_{D-PBC}$， ....4 分

所以点 M 到平面 PBC 的距离是点 D 到平面 PBC 的距离的 $\frac{1}{2}$，

所以 $PM=MD$ ....5 分



（图 1）



（图 2）

（2）由（1）知，$BO\perp CO$，$PO\perp BO$，$PO\perp CO$，

如图 2，以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OP}$ 的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴正方向建立空间直角坐标系，

....6 分

则 $A(0,-1,0)$，$B(0,1,0)$，$C(\sqrt{3},0,0)$，$D(\sqrt{3},-2,0)$，$P(0,0,1)$，所以 $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-1,\frac{1}{2}\right)$．

则 $\overrightarrow{AC}=(\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{BC}=(\sqrt{3},-1,0)$，$\overrightarrow{BD}=(\sqrt{3},-3,0)$，$\overrightarrow{AP}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{CM}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-1,\frac{1}{2}\right)$．

因为 $Q\in AP$，设 $\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{AP}=(0,\lambda,\lambda)$，则 $\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AC}=(-\sqrt{3},\lambda-1,\lambda)$，

因为$BD// \alpha$，$Q\in\alpha$，$C\in\alpha$，$M\in\alpha$，故存在实数a,b，使得$\overrightarrow{CQ}=a\overrightarrow{CM}+b\overrightarrow{BD}$，……………7 分

所以$\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a+\sqrt{3}b=-\sqrt{3},\\ -a-3b=\lambda-1,\\ \dfrac{a}{2}=\lambda,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=\dfrac{4}{3},\\ b=-\dfrac{1}{3},\\ \lambda=\dfrac{2}{3}.\end{cases}$

所以$\overrightarrow{CQ}=\left(-\sqrt{3},-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$……………8 分

设平面BCQ的法向量为$\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{CQ}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-\sqrt{3}x-\dfrac{y}{3}+\dfrac{2z}{3}=0,\\ \sqrt{3}x-y=0.\end{cases}$

取$x=1$，得到平面BCQ的一个法向量$\boldsymbol{n}_1=\left(1,\sqrt{3},2\sqrt{3}\right)$．……………10 分

设平面BCQ与平面$ABCD$夹角是β，

又因为$\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$是平面$ABCD$的一个法向量，……………11 分

则$\cos\beta=\left|\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>\right|=\dfrac{\left|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2\right|}{\left|\boldsymbol{n}_1\right|\left|\boldsymbol{n}_2\right|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

所以平面BCQ与平面$ABCD$夹角的余弦值是$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．……………12 分

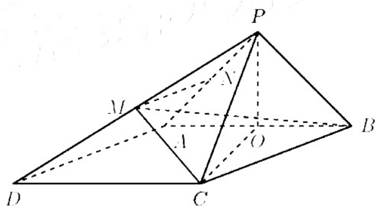
解法二：（1）如图 3，取AB中点O，连接PO，CO，

因为$PA=PB=\sqrt{2}$，$AB=2$，

所以$PO\perp AB$，$PO=1$，$BO=1$，

又因为$ABCD$是菱形，$\angle ABC=60^\circ$，

所以$CO\perp AB$，$CO=\sqrt{3}$．



（图 3）

因为$PC=2$，所以$PC^2=PO^2+CO^2$，所以$PO\perp CO$．

因为$AB\subset$平面PAB，$PO\subset$平面PAB，$AB\cap PO=O$，

所以$CO\perp$平面PAB．……………2 分

$V_{A-PBC}=V_{C-ABP}=\dfrac{1}{3}CO\cdot S_{\triangle ABP}=\dfrac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．……………3 分

过M作$MN//AD$交AP于点N，$AD//BC$，所以$MN//BC$，又$BC\subset$平面PBC，$MN\not\subset$平面PBC，

所以$MN//$平面PBC，所以$V_{M-PBC}=V_{N-PBC}=V_{C-NBP}=\frac{1}{3}CO\cdot S_{\triangle NBP}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，

因为$V_{C-ABP}=\frac{1}{3}CO\cdot S_{\triangle ABP}$，$V_{C-NBP}=\frac{1}{3}CO\cdot S_{\triangle NBP}$

所以$S_{\triangle ABP}=2S_{\triangle NBP}$，……………………………………………………………4 分

所以N是PA的中点，所以M是PD的中点，所以$PM=MD$.……………………………5 分

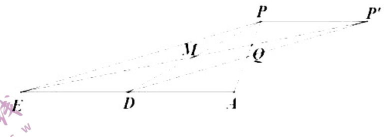
（2）在平面$ABCD$内，过C作$EF//BD$交AD延长线于点E，交AB延长线于点F，

因为$ABCD$是菱形，所以$AD=DE$.

如图 4，在平面PAD内，作$PP'//AE$交EM的延长线于点P'，设EP'交AP于点Q.

所以，四边形$EDP'P$是平行四边形，$PP'=DE,PP'//DE$，

所以$\triangle QPP'\backsim\triangle QAE$，所以$\frac{PQ}{AQ}=\frac{PP'}{AE}=\frac{1}{2}$，



（图 4）

所以点Q是线段PA上靠近P的三等分点……………………………………………7 分

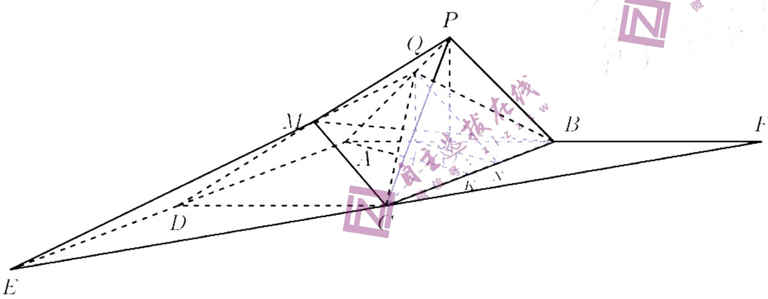
如图 5，在平面PAB内，作$QT//PO$，交AB于T，

因为$PO\perp$平面$ABCD$，所以$QT\perp$平面$ABCD$，所以$QT\perp BC$，

因为$PO=1$，$QT=\frac{2}{3}PO=\frac{2}{3}$，……………………………………………8 分

在平面$ABCD$内，作$TN\perp BC$，交BC于点N，连接QN，过A作$AK//TN$交BC于K，

在$\triangle ABK$中，$AB=2$，$\angle ABK=60^{\circ}$，所以$AK=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\sqrt{3}$，



（图 5）

所以$TN=\frac{2}{3}AK=\frac{2}{3}\sqrt{3}$，……………………………………………9 分

因为$QT\perp BC$，$TN\perp BC$，$QT\cap TN=T$，所以$BC\perp$平面QTN，

因为$QN\subset$平面QTN，所以$BC\perp QN$.

所以$\angle QNT$是二面角$A-BC-Q$的平面角.……………………………………11 分

在 Rt△QTN 中，$\tan\angle QNT=\dfrac{QT}{NT}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\cos\angle QNT=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

所以平面 BCQ 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值是 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………………………12 分

解法三：

（1）同解法一；……………………………………………………………………………………5 分

（2）由（1）知，$BO\perp CO$，$PO\perp BO$，$PO\perp CO$，

如图 2，以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OP}$ 的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴正方向建立空间直角坐标系，

……………………………………………………………………………………………………6 分

则 $A(0,-1,0)$，$B(0,1,0)$，$C(\sqrt{3},0,0)$，$D(\sqrt{3},-2,0)$，$P(0,0,1)$，所以 $M(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-1,\dfrac{1}{2})$.

则 $\overrightarrow{AC}=(\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{BC}=(\sqrt{3},-1,0)$，$\overrightarrow{BD}=(\sqrt{3},-3,0)$，$\overrightarrow{AP}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{CM}=(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},-1,\dfrac{1}{2})$.

设平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CM}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{3}x-3y=0,\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-y+\dfrac{1}{2}z=0.\end{cases}$

取 $y=1$，得到平面 α 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=\left(\sqrt{3},1,5\right)$. ……………………………………………………7 分

因为 $Q\in AP$，设 $\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{AP}=\left(0,\lambda,\lambda\right)$，则 $\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AC}=\left(-\sqrt{3},\lambda-1,\lambda\right)$，

因为 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CQ}=-3+\lambda-1+5\lambda=0$，所以 $\lambda=\dfrac{2}{3}$，所以 $\overrightarrow{CQ}=\left(-\sqrt{3},-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$. ……………………………8 分

设平面 BCQ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{CQ}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\sqrt{3}x_1-\dfrac{y_1}{3}+\dfrac{2z_1}{3}=0,\\ \sqrt{3}x_1-y_1=0.\end{cases}$

取 $x_1=1$，得到平面 BCQ 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_1=\left(1,\sqrt{3},2\sqrt{3}\right)$. ………………………………………10 分

设平面 BCQ 与平面 $ABCD$ 夹角是 β，

又因为 $\boldsymbol{n}_2=\left(0,0,1\right)$ 是平面 $ABCD$ 的一个法向量，…………………………………………………11 分

则 $\cos\beta=\left|\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>\right|=\dfrac{\left|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2\right|}{\left|\boldsymbol{n}_1\right|\left|\boldsymbol{n}_2\right|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

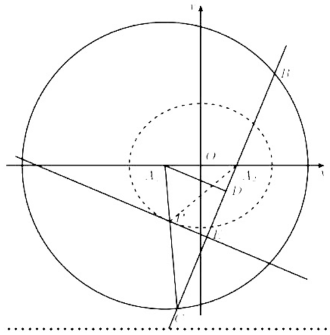
所以平面 BCQ 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值是 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………………………12 分

21．本小题主要考查圆、椭圆的标准方程及简单几何性质，直线与椭圆的位置关系等基础知识；考查运算

求解能力，逻辑推理能力，直观想象能力和创新能力等；考查数形结合思想，函数与方程思想，化归与转化思想等；考查直观想象，逻辑推理，数学运算等核心素养；体现基础性，综合性与创新性．满分 12 分．

解法一：（1）由题意得，$A_1(-1,0)$，$A_2(1,0)$．

因为 D 为 BC 中点，所以 $A_1D\perp BC$，即 $A_1D\perp A_2C$，……1 分



又 $PE/\!/A_1D$，所以 $PE\perp A_2C$，

又 E 为 A_2C 的中点，所以 $|PA_2|=|PC|$，

所以 $|PA_1|+|PA_2|=|PA_1|+|PC|=|A_1C|=4>|A_1A_2|$，

所以点 P 的轨迹 Γ 是以 A_1,A_2 为焦点的椭圆（左、右顶点除外）．……2 分

设 Γ：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$x\neq\pm a$），其中 $a>b>0$，$a^2-b^2=c^2$．

则 $2a=4$，$a=2$，$c=1$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$．……3 分

故 Γ：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$（$x\neq\pm2$）．……4 分

（2）结论③正确．下证：$\triangle QC_1C_2$ 的面积是定值．……5 分

由题意得，$B_1(-2,0)$，$B_2(2,0)$，$C_1(0,-1)$，$C_2(0,1)$，且直线 l_2 的斜率不为 0，

可设直线 l_2：$x=my-1$，$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，且 $x_1\neq\pm2$，$x_2\neq\pm2$．

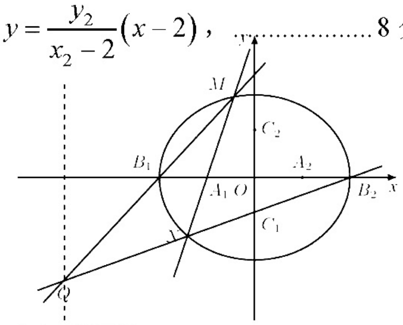
由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\\ x=my-1,\end{cases}$ 得 $(3m^2+4)y^2-6my-9=0$，……6 分

所以 $y_1+y_2=\dfrac{6m}{3m^2+4},y_1y_2=\dfrac{-9}{3m^2+4}$，……7 分

所以 $2my_1y_2=-3(y_1+y_2)$．

直线 B_1M 的方程为：$y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，直线 B_2N 的方程为：$y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，……8 分

由 $\begin{cases}y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2),\\ y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2),\end{cases}$



得 $\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{y_2(x_1+2)}{y_1(x_2-2)}$ ……………………………………………………………………………9 分

$$=\frac{y_2(my_1+1)}{y_1(my_2-3)}=\frac{my_1y_2+y_2}{my_1y_2-3y_1}=\frac{-\frac{3}{2}(y_1+y_2)+y_2}{-\frac{3}{2}(y_1+y_2)-3y_1}=\frac{-\frac{3}{2}y_1-\frac{1}{2}y_2}{-\frac{9}{2}y_1-\frac{3}{2}y_2}=\frac{1}{3},$$

解得 $x=-4$． ……………………………………………………………………………11 分

故点 Q 在直线 $x=-4$，所以 Q 到 C_1C_2 的距离 $d=4$，

因此 $\triangle QC_1C_2$ 的面积是定值，为 $\dfrac{1}{2}|C_1C_2|\cdot d=\dfrac{1}{2}\times 2\times 4=4$． ……………………………12 分

解法二：（1）同解法一． ……………………………………………………………………………4 分

（2）结论③正确．下证：$\triangle QC_1C_2$ 的面积是定值． ……………………………………5 分

由题意得，$B_1(-2,0)$，$B_2(2,0)$，$C_1(0,-1)$，$C_2(0,1)$，且直线 l_2 的斜率不为 0，

可设直线 l_2：$x=my-1$，$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，且 $x_1\neq\pm 2$，$x_2\neq\pm 2$．

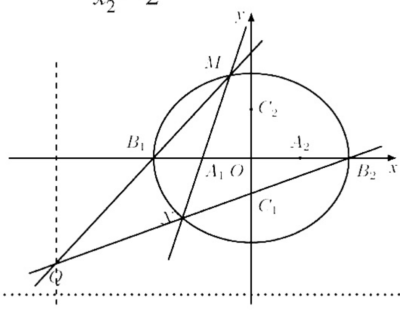
由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\\ x=my-1,\end{cases}$ 得 $(3m^2+4)y^2-6my-9=0$， ……………………………6 分

所以 $y_1+y_2=\dfrac{6m}{3m^2+4},y_1y_2=\dfrac{-9}{3m^2+4}$， ……………………………………………7 分

所以 $2my_1y_2=-3(y_1+y_2)$．

直线 B_1M 的方程为：$y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，直线 B_2N 的方程为：$y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)$， ………………8 分

由 $\begin{cases}y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2),\\ y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2),\end{cases}$



得 $x=2\left[\dfrac{y_2(x_1+2)+y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)-y_1(x_2-2)}\right]$ ……………………………………………9 分

$$=2\left[\frac{y_2(my_1+1)+y_1(my_2-3)}{y_2(my_1+1)-y_1(my_2-3)}\right]=2\left(\frac{2my_1y_2+y_2-3y_1}{y_2+3y_1}\right)$$

$$=2\left[\frac{2my_1y_2+3(y_1+y_2)-2(y_2+3y_1)}{y_2+3y_1}\right]=-4$$ ……11 分

故点 Q 在直线 $x=-4$，所以 Q 到 C_1C_2 的距离 $d=4$，

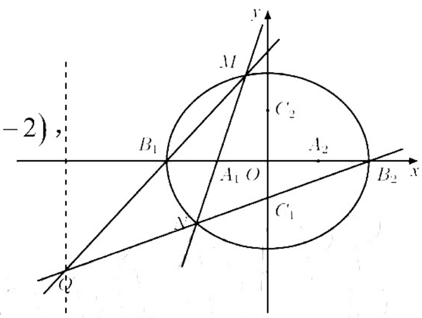
因此 $\triangle QC_1C_2$ 的面积是定值，为 $\frac{1}{2}|C_1C_2|\cdot d=\frac{1}{2}\times2\times4=4$． ……12 分

解法三：（1）同解法一． ……4 分

（2）结论③正确．下证：$\triangle QC_1C_2$ 的面积是定值． ……5 分

由题意得，$B_1(-2,0)$，$B_2(2,0)$，$C_1(0,-1)$，$C_2(0,1)$，直线 l_2 的斜率不为 0．

（i）当直线 l_2 垂直于 x 轴时，l_2：$x=-1$，由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ x=-1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-1,\\ y=-\frac{3}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1,\\ y=\frac{3}{2}.\end{cases}$



不妨设 $M\left(-1,\frac{3}{2}\right),N\left(-1,-\frac{3}{2}\right)$，

则直线 B_1M 的方程为：$y=\frac{3}{2}(x+2)$，直线 B_2N 的方程为：$y=\frac{1}{2}(x-2)$，

由 $\begin{cases}y=\frac{3}{2}(x+2),\\ y=\frac{1}{2}(x-2)\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-4,\\ y=-3,\end{cases}$ 所以 $Q(-4,-3)$，

故 Q 到 C_1C_2 的距离 $d=4$，此时 $\triangle QC_1C_2$ 的面积是 $\frac{1}{2}|C_1C_2|\cdot d=\frac{1}{2}\times2\times4=4$． ……6 分

（ii）当直线 l_2 不垂直于 x 轴时，设直线 l：$y=k(x+1)$，$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，且 $x_1\neq\pm2$，$x_2\neq\pm2$．

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=k(x+1),\end{cases}$ 得 $(4k^2+3)x^2+8k^2x+(4k^2-12)=0$， ……7 分

所以 $x_1+x_2=\frac{-8k^2}{4k^2+3},x_1x_2=\frac{4k^2-12}{4k^2+3}$． ……8 分

直线 MB_1 的方程为：$y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，直线 MB_2 的方程为：$y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$， ……9 分

由 $\begin{cases}y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2),\\ y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2),\end{cases}$

得 $x=2\left[\dfrac{y_2(x_1+2)+y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)-y_1(x_2-2)}\right]$ ……10 分

$$=2\left[\frac{k(x_2+1)(x_1+2)+k(x_1+1)(x_2-2)}{k(x_2+1)(x_1+2)-k(x_1+1)(x_2-2)}\right]=\frac{4x_1x_2-2x_1+6x_2}{3x_1+x_2+4}.$$

下证：$\dfrac{4x_1x_2-2x_1+6x_2}{3x_1+x_2+4}=-4$．

即证 $4x_1x_2-2x_1+6x_2=-4(3x_1+x_2+4)$，

即证 $4x_1x_2=-10(x_1+x_2)-16$，

即证 $4\left(\dfrac{4k^2-12}{4k^2+3}\right)=-10\left(\dfrac{-8k^2}{4k^2+3}\right)-16$，

即证 $4(4k^2-12)=-10(-8k^2)-16(4k^2+3)$，

上式显然成立，……11 分

故点 Q 在直线 $x=-4$，所以 Q 到 C_1C_2 的距离 $d=4$，

此时 $\triangle QC_1C_2$ 的面积是定值，为 $\dfrac{1}{2}|C_1C_2|\cdot d=\dfrac{1}{2}\times2\times4=4$．

由（i）（ii）可知，$\triangle QC_1C_2$ 的面积为定值．……12 分

解法四：（1）同解法一．……4 分

（2）结论③正确．下证：$\triangle QC_1C_2$ 的面积是定值．……5 分

由题意得，$B_1(-2,0)$，$B_2(2,0)$，$C_1(0,-1)$，$C_2(0,1)$，且直线 l_2 的斜率不为 0，

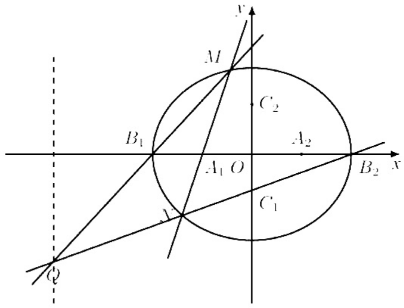
可设直线 l_2：$x=my-1$，$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，且 $x_1\neq\pm2$，$x_2\neq\pm2$．

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\\ x=my-1,\end{cases}$ 得 $(3m^2+4)y^2-6my-9=0$，……6 分

所以 $y_1+y_2=\dfrac{6m}{3m^2+4},y_1y_2=\dfrac{-9}{3m^2+4}$．……7 分

直线 B_1M 的方程为：$y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，直线 B_2N 的方程为：$y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，……8 分

因为 $\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1$，所以 $\frac{y_2}{x_2-2}=-\frac{3}{4}\left(\frac{x_2+2}{y_2}\right)$，



故直线 B_2N 的方程为：$y=-\frac{3}{4}\left(\frac{x_2+2}{y_2}\right)(x-2)$.

由 $\begin{cases} y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2), \\ y=-\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{x_2+2}{y_2}\right)(x-2), \end{cases}$

得 $\frac{x-2}{x+2}=-\frac{4y_1y_2}{3(x_1+2)(x_2+2)}$ ……………………………………………………………………9 分

$$=-\frac{4y_1y_2}{3(my_1+1)(my_2+1)}=-\frac{4}{3}\left[\frac{y_1y_2}{m^2y_1y_2+m(y_1+y_2)+1}\right]=-\frac{4}{3}\left[\frac{-9}{-9m^2+6m^2+(3m^2+4)}\right]=3,$$

解得 $x=-4$. ……………………………………………………………………………………………11 分

故点 Q 在直线 $x=-4$，所以 Q 到 C_1C_2 的距离 $d=4$，

因此 $\triangle QC_1C_2$ 的面积是定值，为 $\frac{1}{2}|C_1C_2|\cdot d=\frac{1}{2}\times2\times4=4$. ……………………………………12 分

22．本小题主要考查导数及其应用、函数的单调性、不等式等基础知识，考查逻辑推理能力、直观想象能力、运算求解能力和创新能力等，考查函数与方程思想、化归与转化思想、分类与整合思想等，考查逻辑推理、直观想象、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性和创新性．满分 12 分．

解法一：（1）$f'(x)=(x+a+1)\mathrm{e}^x$，……………………………………………………………1 分

故 $x>-a-1$ 时，$f'(x)>0$；$x<-a-1$ 时，$f'(x)<0$. …………………………………………2 分

当 $-a-1>0$，即 $a<-1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,-a-1)$ 单调递减，在 $(-a-1,+\infty)$ 单调递增；

当 $-a-1\leqslant0$，即 $a\geqslant-1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

综上，当 $a<-1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,-a-1)$ 单调递减，在 $(-a-1,+\infty)$ 单调递增；

当 $a\geqslant-1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增. ……………………………………………………4 分

（2）不存在 a,x_0,x_1，且 $x_0\neq x_1$，使得曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 和 $x=x_1$ 处有相同的切线. …………5 分

证明如下：假设存在满足条件的 a,x_0,x_1，

因为 $f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

即 $y=\left(x_0+a+1\right)e^{x_0}\cdot x+\left(a-x_0^2-ax_0\right)e^{x_0}$， ……………………………………………………………………………6 分

同理 $f\left(x\right)$ 在 $\left(x_1,f\left(x_1\right)\right)$ 处的切线方程为 $y=\left(x_1+a+1\right)e^{x_1}\cdot x+\left(a-x_1^2-ax_1\right)e^{x_1}$，

且它们重合，所以 $\begin{cases}\left(x_0+a+1\right)e^{x_0}=\left(x_1+a+1\right)e^{x_1},\\ \left(a-x_0^2-ax_0\right)e^{x_0}=\left(a-x_1^2-ax_1\right)e^{x_1},\end{cases}$ ……………………………………………………7 分

整理得 $\left(x_0+a+1\right)\left(a-x_1^2-ax_1\right)=\left(x_1+a+1\right)\left(a-x_0^2-ax_0\right)$，

即 $x_0x_1+\left(a+1\right)\left(x_0+x_1\right)+a^2+2a=0$， $x_0x_1+\left(a+1\right)\left(x_0+x_1\right)+\left(a+1\right)^2=1$，

所以 $\left(x_0+a+1\right)\left(x_1+a+1\right)=1$， ……………………………………………………………………………………8 分

由 $(x_0+a+1)e^{x_0}=(x_1+a+1)e^{x_1}$ 两边同乘以 e^{a+1}，

得 $(x_0+a+1)e^{x_0+a+1}=(x_1+a+1)e^{x_1+a+1}$， ………………………………………………………………………9 分

令 $t_0=x_0+a+1$， $t_1=x_1+a+1$，则 $\begin{cases}t_0e^{t_0}=t_1e^{t_1},\\ t_0t_1=1,\end{cases}$ 且 $t_0\neq t_1$，

由 $t_0t_1=1$ 得 $t_0=\dfrac{1}{t_1}$，代入 $t_0e^{t_0}=t_1e^{t_1}$ 得 $e^{\frac{1}{t_1}}=t_1^2e^{t_1}$，两边取对数得 $\dfrac{1}{t_1}=2\ln\left|t_1\right|+t_1$. ……………………10 分

令 $g(t)=2\ln|t|+t-\dfrac{1}{t}$，

当 $t>0$ 时， $g(t)=2\ln t+t-\dfrac{1}{t}$， $g'(t)=\dfrac{2}{t}+1+\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{(t+1)^2}{t^2}\geqslant 0$，

所以 $g\left(t\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $g(1)=0$，所以 $t_1=1$，从而 $t_0=1$，与 $t_0\neq t_1$ 矛盾； ………11 分

当 $t<0$ 时， $g(t)=2\ln\left(-t\right)+t-\dfrac{1}{t}$， $g'(t)=\dfrac{2}{t}+1+\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{\left(t+1\right)^2}{t^2}\geqslant 0$，

所以 $g\left(t\right)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，又 $g\left(-1\right)=0$，所以 $t_1=-1$，从而 $t_0=-1$，与 $t_0\neq t_1$ 矛盾；

综上，不存在 t_0,t_1，使得 $\begin{cases}t_0e^{t_0}=t_1e^{t_1},\\ t_0t_1=1,\end{cases}$ 且 $t_0\neq t_1$.

故不存在 a,x_0,x_1 且 $x_0\neq x_1$，使得曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 和 $x=x_1$ 处有相同的切线. ………………12 分

解法二：（1）同解法一； …………………………………………………………………………………………………4 分

（2）不存在a,x_0,x_1，且$x_0\neq x_1$，使得曲线$y=f(x)$在$x=x_0$和$x=x_1$处有相同的切线. ....5 分

证明如下：假设存在满足条件的a,x_0,x_1，

因为$f(x)$在$(x_0,f(x_0))$处的切线方程为$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$即

$y=(x_0+a+1)e^{x_0}\cdot x+(x_0+a)e^{x_0}-x_0(x_0+a+1)e^{x_0}$， ....6 分

同理$f(x)$在$(x_1,f(x_1))$处的切线方程为$y=(x_1+a+1)e^{x_1}\cdot x+(x_1+a)e^{x_1}-x_1(x_1+a+1)e^{x_1}$，

且它们重合，所以$\begin{cases}(x_0+a+1)e^{x_0}=(x_1+a+1)e^{x_1},\\(x_0+a)e^{x_0}-x_0(x_0+a+1)e^{x_0}=(x_1+a)e^{x_1}-x_1(x_1+a+1)e^{x_1},\end{cases}$ ....7 分

整理得$(x_0+a+1)[x_1+a-x_1(x_1+a+1)]=(x_1+a+1)[x_0+a-x_0(x_0+a+1)]$，

令$t_0=x_0+a+1$，$t_1=x_1+a+1$，可得$t_0t_1=1$. ....8 分

由$(x_0+a+1)e^{x_0}=(x_1+a+1)e^{x_1}$两边同乘以$e^{a+1}$，

得$(x_0+a+1)e^{x_0+a+1}=(x_1+a+1)e^{x_1+a+1}$，则$\begin{cases}t_0e^{t_0}=t_1e^{t_1},\\t_0t_1=1,\end{cases}$且$t_0\neq t_1$， ....9 分

令$h(t)=te^t$，则$h(t_0)=h(t_1)$，且$t_0\neq t_1$.

由（1）知，当$t>-1$时，$h(t)$单调递增，当$t<-1$时，$h(t)$单调递减，

又当$t>0$时，$h(t)>0$，当$t<0$时，$h(t)<0$，

所以若t_0,t_1存在，不妨设$t_1<-1<t_0<0$，

设$t_1=mt_0$，$m>1$，又$t_0t_1=1$，所以$t_0^2=\dfrac{1}{m}$，则$t_0=-\dfrac{1}{\sqrt{m}}$，

由$t_1e^{t_1}=t_0e^{t_0}$，得$mt_0e^{mt_0}=t_0e^{t_0}$即$me^{mt_0}=e^{t_0}$，

则$\ln m+mt_0=t_0$，所以$t_0=\dfrac{\ln m}{1-m}$，

所以$-\dfrac{1}{\sqrt{m}}=\dfrac{\ln m}{1-m}$，即$\ln m+\dfrac{1}{\sqrt{m}}-\sqrt{m}=0$， ....11 分

令$g(x)=2\ln x-x+\dfrac{1}{x}$，$x\geqslant 1$，则$g'(x)=\dfrac{2}{x}-1-\dfrac{1}{x^2}=-\dfrac{(x-1)^2}{x^2}\leqslant 0$，

所以$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，所以当$x>1$时，$g(x)<g(1)=0$，

即 $2\ln x < x - \frac{1}{x}$，取 $x=\sqrt{m}$，即 $\ln m + \frac{1}{\sqrt{m}} - \sqrt{m} < 0$，

所以 $\ln m + \frac{1}{\sqrt{m}} - \sqrt{m} = 0$ 在 $m>1$ 时无解，

综上，不存在 t_0,t_1，使得 $\begin{cases} t_0 e^{t_0} = t_1 e^{t_1}, \\ t_0 t_1 = 1, \end{cases}$ 且 $t_0 \neq t_1$.

故不存在 a,x_0,x_1 且 $x_0 \neq x_1$，使得曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 和 $x=x_1$ 处有相同的切线. ………………12 分

解法三：（1）同解法一；………………………………………………………………………………4 分

（2）不存在 a,x_0,x_1，且 $x_0 \neq x_1$，使得曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 和 $x=x_1$ 处有相同的切线. …………5 分

证明如下：假设存在满足条件的 a,x_0,x_1，

因为 $f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

即 $y=(x_0+a+1)e^{x_0}\cdot x+(a-x_0^2-ax_0)e^{x_0}$，……………………………………………6 分

同理 $f(x)$ 在 $(x_1,f(x_1))$ 处的切线方程为 $y=(x_1+a+1)e^{x_1}\cdot x+(a-x_1^2-ax_1)e^{x_1}$，

且它们重合，所以 $\begin{cases} (x_0+a+1)e^{x_0}=(x_1+a+1)e^{x_1}, \\ (a-x_0^2-ax_0)e^{x_0}=(a-x_1^2-ax_1)e^{x_1}, \end{cases}$ ……………………………7 分

整理得 $(x_0+a+1)(a-x_1^2-ax_1)=(x_1+a+1)(a-x_0^2-ax_0)$，

即 $x_0x_1+(a+1)(x_0+x_1)+a^2+2a=0$，$x_0x_1+(a+1)(x_0+x_1)+(a+1)^2=1$，

所以 $(x_0+a+1)(x_1+a+1)=1$，………………………………………………………………8 分

由 $(x_0+a+1)e^{x_0}=(x_1+a+1)e^{x_1}$ 两边同乘以 e^{a+1}，

得 $(x_0+a+1)e^{x_0+a+1}=(x_1+a+1)e^{x_1+a+1}$，…………………………………………9 分

令 $t_0=x_0+a+1$，$t_1=x_1+a+1$，则 $\begin{cases} t_0 e^{t_0} = t_1 e^{t_1}, \\ t_0 t_1 = 1, \end{cases}$ 且 $t_0 \neq t_1$，

令 $h(t)=te^t$，则 $h(t_0)=h(t_1)$，且 $t_0 \neq t_1$.

由（1）知，当 $t>-1$ 时，$h(t)$ 单调递增，当 $t<-1$ 时，$h(t)$ 单调递减，

又当 $t>0$ 时，$h(t)>0$，当 $t<0$ 时，$h(t)<0$，

所以若 t_0,t_1 存在，不妨设 $t_1<-1<t_0<0$，

则 $-t_0\mathrm{e}^{t_0}=-t_1\mathrm{e}^{t_1}$，$\ln\left(-t_0\right)+t_0=\ln\left(-t_1\right)+t_1$，

所以 $\dfrac{\left(-t_0\right)-\left(-t_1\right)}{\ln\left(-t_0\right)-\ln\left(-t_1\right)}=1$ .... 11 分

以下证明 $\dfrac{\left(-t_0\right)-\left(-t_1\right)}{\ln\left(-t_0\right)-\ln\left(-t_1\right)}>\sqrt{\left(-t_0\right)\cdot\left(-t_1\right)}$.

令 $g(x)=2\ln x-x+\dfrac{1}{x}$，$x\geqslant 1$，则 $g'(x)=\dfrac{2}{x}-1-\dfrac{1}{x^2}=-\dfrac{(x-1)^2}{x^2}\leqslant 0$，

所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以当 $x>1$ 时，$g(x)<g(1)=0$，

因为 $\sqrt{\dfrac{-t_1}{-t_0}}>1$，所以 $g\left(\sqrt{\dfrac{-t_1}{-t_0}}\right)<0$，$\ln\left(\dfrac{-t_1}{-t_0}\right)-\sqrt{\dfrac{-t_1}{-t_0}}+\sqrt{\dfrac{-t_0}{-t_1}}<0$，

整理得 $\dfrac{\left(-t_0\right)-\left(-t_1\right)}{\ln\left(-t_0\right)-\ln\left(-t_1\right)}>\sqrt{\left(-t_0\right)\cdot\left(-t_1\right)}$.

因为 $\dfrac{\left(-t_0\right)-\left(-t_1\right)}{\ln\left(-t_0\right)-\ln\left(-t_1\right)}=1$，所以 $\left(-t_0\right)\cdot\left(-t_1\right)<1$，与 $t_0t_1=1$ 矛盾；

所以不存在 t_0,t_1，使得 $\begin{cases}t_0\mathrm{e}^{t_0}=t_1\mathrm{e}^{t_1},\\ t_0t_1=1,\end{cases}$ 且 $t_0\neq t_1$.

故不存在 a,x_0,x_1 且 $x_0\neq x_1$，使得曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 和 $x=x_1$ 处有相同的切线. .... 12 分