

## 大同市 2024 届高三年级学情调研测试

# 数 学

注意事项:

1. 答题前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上相应的位置。
2. 全部答案在答题卡上完成, 答在本试题上无效。
3. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案用 0.5mm 黑色笔迹签字笔写在答题卡上。
4. 考试结束后, 将本试题和答题卡一并交回。
5. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分, 共 150 分, 考试时间 120 分钟。

### 第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ,  $B = \{x | x(x-2) \leq 0\}$ , 则  $A \cap B =$

- A.  $\{0, 1\}$       B.  $[0, 2]$       C.  $\{1\}$       D.  $\{0, 1, 2\}$

2. 已知复数  $z$  满足  $z(2-i) = 4+3i$ , 则  $|z| =$

- A.  $\sqrt{3}$       B. 3      C. 5      D.  $\sqrt{5}$

3. 在 2022 年北京冬奥会期间, 需从 2 名男志愿者和 3 名女志愿者中任选 2 名志愿者去支援冰壶比赛的志愿者工作, 若选出的 2 名中至少有 1 名男志愿者, 则不同的选法有

- A. 3 种      B. 7 种      C. 10 种      D. 12 种

4. 分形几何学是数学家伯努瓦·曼德尔布罗在 20 世纪 70 年代创立的一门新的数学学科, 它的创立为解决众多传统科学领域的难题提供了全新的思路。按照如图 1 的分形规律可得如

图2的一个树形图. 记图2中第 $n$ 行黑圈的个数为 $a_n$ , 白圈的个数为 $b_n$ , 若 $a_n = 144$ ,

则 $b_n =$



图1

A. 34

B. 35

C. 88

D. 89

5. 若函数  $f(x) = a \ln x - \frac{b}{x}$  在点  $(1, f(1))$  处的切线斜率为1, 其中  $a > 0, b > 0$ , 则  $ab$  最大值为

A.  $\sqrt{2}$

B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C.  $\frac{1}{2}$

D.  $\frac{1}{4}$

6. 已知圆锥的底面半径为1, 母线长为3, 该圆锥内半径最大的球的体积为

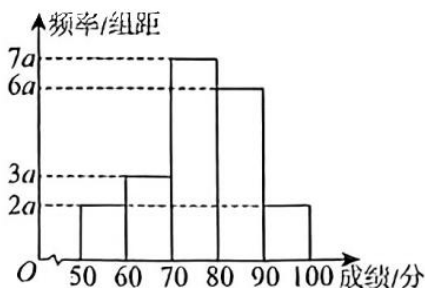
A.  $\sqrt{2}\pi$

B.  $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$

C.  $\frac{\sqrt{6}\pi}{3}$

D.  $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$

7. 某校1500名学生参加交通安全知识竞赛, 随机抽取了100名学生的竞赛成绩(单位: 分), 成绩的频率分布直方图如图所示, 则下列说法正确的是



A. 频率分布直方图中  $a$  的值为 0.0045

B. 估计这100名学生竞赛成绩的第60百分位数为80

C. 估计这100名学生竞赛成绩的众数为80

D. 估计总体中成绩落在  $[70, 80)$  内的学生人数为500



8. 已知函数  $y = f(x)$  的定义域为  $\mathbb{R}$ ,  $y = f(x+3)$  与  $y = f(2x+1)$  都是偶函数, 并且当

$$x \in [1, 3] \text{ 时, } f(x) = \begin{cases} 2^{x-1} - 1, & 1 \leq x \leq 2 \\ 2\sin \frac{\pi}{2}(x-1) - 1, & 2 < x \leq 3 \end{cases}, \text{ 若关于 } x \text{ 的方程 } m \ln|x-1| = f(x)$$

至少有 8 个实数解, 则实数  $m$  的取值范围是

- A.  $\left[-\frac{1}{\ln 6}, \frac{1}{\ln 5}\right)$       B.  $\left(-\frac{1}{\ln 6}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{\ln 5}\right)$   
C.  $\left[-\frac{1}{\ln 6}, \frac{1}{\ln 5}\right]$       D.  $\left[-\frac{1}{\ln 6}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{\ln 5}\right]$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知函数  $f(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x - 1$ , 则下列说法正确的是

- A. 函数  $f(x)$  的一条对称轴是  $x = \frac{2}{3}\pi$   
B. 函数  $f(x)$  的最大值是  $\frac{1}{2}$   
C. 函数  $f(x)$  在区间  $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$  单调递增  
D. 函数  $f(x)$  的图像可由  $y = \sin 2x$  的图像向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度, 再向下平移  $\frac{1}{2}$  个单位长度得到

10. 设  $O$  为  $\triangle ABC$  的外心,  $AB = 2$ ,  $AC = 4$ ,  $\angle BAC$  的角平分线  $AM$  交  $BC$  于点  $M$ , 则

- A.  $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$       B.  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$   
C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = 2$       D.  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AO} = 6$

11. 已知抛物线  $C: y^2 = 8x$  的焦点为  $F$ , 其准线与  $x$  轴相交于点  $M$ , 经过点  $M$  且斜率为  $k$  的直线  $l$  与抛物线相交于点  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  两点, 则下列结论中正确的是

A.  $x_1 x_2 = 4$

B.  $y_1 y_2 = 8$

C.  $k$  的取值范围是  $(-1, 1)$

D.  $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$  时, 以  $AB$  为直径的圆经过点  $F$

12. 如图, 正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 2, 线段  $B_1D_1$

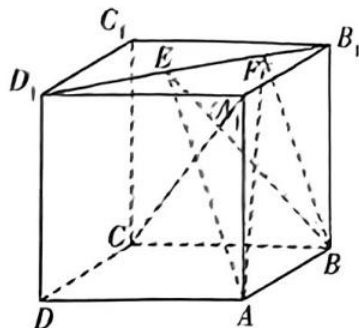
上有两个动点  $E, F$ , 且  $EF = \sqrt{2}$ , 以下结论正确的有

A.  $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AB} = 2$

B.  $A_1C \perp AE$

C. 正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的体积是三棱锥  $A - BEF$  的体积的 12 倍

D. 异面直线  $AE, BF$  所成的角为定值



## 第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ , 则  $\sin^2(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}) =$  \_\_\_\_\_.

14.  $(1 - \frac{y}{x})(x + y)^7$  的展开式中  $x^2 y^5$  的系数为 \_\_\_\_\_ (用数字作答).

15. 一个质点在随机外力的作用下, 从原点  $O$  出发, 每隔 1s 等可能地向左或向右移动一个单位, 共移动 8 次. 移动后, 事件“质点位于原点  $O$ ”的概率为 \_\_\_\_\_ (2 分); 事件“质点位于 4 的位置”的概率为 \_\_\_\_\_ (3 分)

16. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 过点  $P(3c, 0)$  作直线  $l$  交椭圆  $C$  于  $M, N$  两点, 若  $\overrightarrow{PM} = 2\overrightarrow{NM}, |\overrightarrow{F_2M}| = 4|\overrightarrow{F_2N}|$ , 则椭圆  $C$  的离心率为 \_\_\_\_\_.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

从①  $\sqrt{3} \sin C - \sin A = \frac{c \sin C - b \sin B}{a}$ ，②  $\triangle ABC$  的外接圆的半径为  $\sqrt{3}$  且  $B < A$ ，

这两个条件中选择一个，补充在下面问题中，并解答。

已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，且  $b = \sqrt{3}$ ，\_\_\_\_\_。

(1) 求角  $B$  的大小；

(2) 若  $a + c = 3 + \sqrt{3}$ ，求  $\triangle ABC$  的面积。

注：若选择多个条件分别解答，按第一个解答给分。

18. (12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  中， $a_1 = 1$ ， $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$  是公差为  $\frac{1}{2}$  的等差数列。

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式；

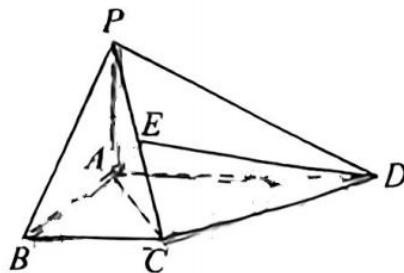
(2) 若  $b_n = \frac{1}{a_n}$ ， $T_n$  为数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和，证明： $T_n < 2$ 。

19. (12 分)

如图所示，在四棱锥  $P-ABCD$  中， $PA \perp$  平面  $ABCD$ ， $AD \parallel BC$ ， $AB \perp BC$ ，且  $AB = AP = 2, BC = 1, AD = 5$ ， $E$  为  $PC$  上一点。

(1) 求证： $AE \perp CD$ ；

(2) 若  $E$  为  $PC$  的中点，求  $CD$  与平面  $AED$  所成角的正弦值。



20. (12 分)

食品安全问题越来越受到人们的重视. 某超市在进某种蔬菜前, 食品安检部门要求对每箱蔬菜进行三轮各项指标的综合检测, 只有三轮检测都合格, 该种蔬菜才能在该超市销售. 已知每箱这种蔬菜第一轮检测不合格的概率为  $\frac{1}{3}$ , 第二轮检测不合格的概率为  $\frac{1}{4}$ , 第三轮检测不合格的概率为  $\frac{1}{5}$ , 每轮检测只有合格与不合格两种情况, 且各轮检测互不影响.

- (1) 求每箱这种蔬菜能在该超市销售的概率;
- (2) 若这种蔬菜能在该超市销售, 则每箱可获利 100 元, 若不能在该超市销售, 则每箱亏损 50 元, 现有 3 箱这种蔬菜, 设这 3 箱蔬菜的总收益为  $X$  元, 求  $X$  的分布列和数学期望.

21. (12 分)

从双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  上一点  $P$  向  $x$  轴作垂线, 垂足恰为左焦点  $F_1$ , 点

$A_1, A_2$  分别是双曲线的左、右顶点, 点  $B(0, \frac{1}{2}b)$ , 且  $A_2B \parallel OP, |F_1A_2| = 2 + \sqrt{3}$ .

- (1) 求双曲线的方程;
- (2) 过点  $(2\sqrt{3}, 0)$  作直线  $L$  分别交双曲线左右两支于  $C, D$  两点, 直线  $A_1C$  与直线  $A_2D$  交于点  $M$ , 证明: 点  $M$  在定直线上.

22. (12 分)

已知函数  $f(x) = x - a \ln x, a \in R$ .

- (1) 讨论函数  $f(x)$  的单调性;
- (2) 若存在  $x \in [1, e]$ , 使得  $xf(x) < -e(a+e)$  成立, 求  $a$  的取值范围.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：[www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线