绝密★考试结束前

2023学年第一学期浙南名校联盟第一次联考

高三年级数学学科 试题

考生须知：

1．本卷共5页满分150分，考试时间120分钟。

2．答题前，在答题卷指定区域填写班级、姓名、考场号、座位号及准考证号并填涂相应数字。

3．所有答案必须写在答题纸上，写在试卷上无效。

4．考试结束后，只需上交答题纸。

选择题部分

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知集合$M=\{x\mid x^2+2x-3=0\}$,$N=\left\{x\mid y=\sqrt{2^x-\frac{1}{2}}\right\}$，则$M\cap N=$（　　）

A.$\{1\}$　　B.$\{3\}$　　C.$\{-1,3\}$　　D.$\{1,-3\}$

2.双曲线$C:y^2-\frac{x^2}{3}=1$的焦点坐标为（　　）

A.$(\pm2,0)$　　B.$(\pm\sqrt{2},0)$　　C.$(0,\pm\sqrt{2})$　　D.$(0,\pm2)$

3.已知平面向量a=(1,3),b=(−1,2),则a在b方向上的投影向量为（　　）

A. (1,−2)　　B.(−1,2)　　C.(−2,4)　　D.(3,−6)

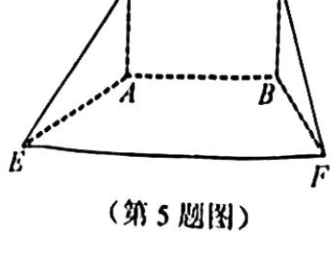
4.已知$a_n=n+\frac{\lambda}{n}$,则“$0<\lambda<2$”是“数列$\{a_n\}$是递增数列”的（　　）

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分又不必要条件

5.生活中有很多常见的工具有独特的几何体结构特征，例如垃圾畚箕，其结构如图所示的五面体ADE-BCF，其中四边形$ABFE$与$CDEF$都为等腰梯形，$ABCD$为平行四边形，若$AD\perp$面$ABFE$，且$EF=2AB=2AE=2BF$，记三棱锥$D-ABF$的体积为V_1，则该五面体的体积为（　　）

A.$8V_1$　　B.$5V_1$　　C.$4V_1$　　D.$3V_1$



（第5题图）

6.若$3\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{10}$，则$\tan(\theta+\frac{\pi}{8})-\frac{1}{\tan(\theta+\frac{\pi}{8})}$的值为（　　）

A.−7　　B.−14　　C. $\frac{1}{7}$　　D.$\frac{2}{7}$

7.设离散型随机变量 X 的期望和方差分别为 $E(X)$ 和 $D(X)$，且 $E(X)\neq -1$，则

A. $E((X+1)^2)=D(X)$　　B. $E((X+1)^2)<D(X)$

C. $E((X+1)^2)>D(X)$　　D. $E((X+1)^2)$ 和 $D(X)$ 大小不确定

8.在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是直角梯形，$AB//CD,\angle ABC=90^\circ$，

$AB=2,BC=2\sqrt{3}$.若 $PA=PD,PC=PB$,且三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 20π，则当四棱锥 $P-ABCD$ 的体积最大值时，CD 长为（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{10}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

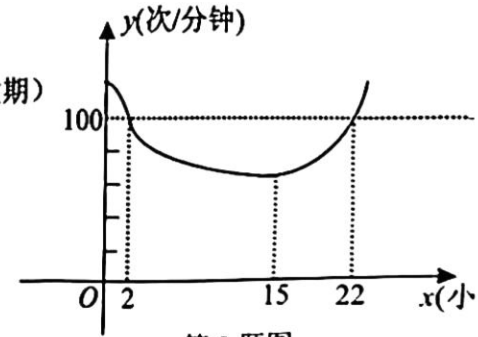
9.成人心率的正常范围为 $60\sim100$ 次/分钟，超过 100 次/分钟为心率过速.观测并记录一名心率过速成人患者服用某种药物后心率，其随时间的变化如图所示，则该患者（　　）

A.服了药物后心率会马上恢复正常

B.服药后初期药物起效速度会加快

C.所服药物约 15 个小时后失效（服药后心率下降期间为有效期）

D.一天需服用该药 1 至 2 次



第 9 题图

10.将函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，再把所得图象上各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$，纵坐标保持不变，得到函数 $g(x)$ 的图象，则关于 $g(x)$ 的说法正确的是（　　）

A.周期为 2π　　B.偶函数

C.在 $\left(\frac{9}{4}\pi,\frac{5}{2}\pi\right)$ 上单调递减　　D.关于 $\left(\frac{2k-1}{8}\pi,0\right)(k\in Z)$ 中心对称

11.已知函数 $f(x)=2023x-e^x$，其导函数为 $f'(x)$，则（　　）

A.曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=2022x-1$

B. $f(x)$ 有极大值，也有极小值

C.使得 $f(x)\leq kx$ 恒成立的最小正整数 k 为 2021

D. $f(x)$ 有两个不同零点 m,n，且 $2<m+n<16$

12.已知P,Q,R是椭圆$C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$上不同的三点，记$\Delta OPQ,\Delta OPR,\Delta ORQ$的面积分别为$S_1,S_2,S_3$（$S_i>0,i=1,2,3$，$O$为坐标原点）. 若$S_1{}^2+S_2{}^2=S_3{}^2$，则（　　）

A. $OQ\perp OR$　　　　B.$|OQ|^2+|OR|^2=25$

C. $S_3=6$　　　　D.$\frac{1}{|OQ|^2}+\frac{1}{|OR|^2}$为定值

非选择题部分

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13.已知复数z满足$z+2\overline{z}=3-\mathrm{i}$，则$|z|=$________.

14.若$\left(2x-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$的展开式中所有系数绝对值之和为81，则其常数项为__________.

15.已知点P在$y=\sqrt{x^2+1},x\in[-1,\sqrt{3}]$上运动，点$Q$在圆$C:x^2+(y-a)^2=\frac{3}{4}(a>0)$上运动，且$|PQ|$最小值为$\frac{3}{2}\sqrt{3}$，则实数$a$的值为________.

16.已知数列$\{a_n\}$的首项为a_1，且满足$12S_n=4a_{n+1}+5^n-13$，其中S_n为其前n项和，若恒有$S_n\le S_4(n\in\mathrm{N}^*)$，则$a_1$的取值范围为__________.

四、解答题：本大题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本题满分10分）设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$S_5=30,a_4=8$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式及S_n；

（2）设$b_n=a_n\cdot 2^{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

18.（本题满分12分）记ΔABC的内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，

已知$c\sin(A-B)=b\sin(C-A)$.

（1）若$a^2=bc$，求A；

（2）若$a=2,\cos A=\frac{4}{5}$，求ΔABC的周长.

19.（本题满分 12 分）某型合金钢生产企业为了合金钢的碳含量百分比在规定的值范围内，检验员在同一试验条件下，每天随机抽样 10 次，并测量其碳含量(单位：%).已知其产品的碳含量服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$.

（1）假设生产状态正常，记 X 表示一天内 10 次抽样中其碳含量百分比在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之外的次数，求 $P(X\geq 1)$ 及 X 的数学期望；

（2）一天内的抽检中，如果出现了至少 1 次检测的碳含量在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之外，就认为这一天的生产过程可能出现了异常情况，需对当天的生产过程进行检查.

下面是在一天中，检测员进行 10 次碳含量(单位：%)检测得到的测量结果：

次数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
碳含量(%)	0.31	0.32	0.34	0.31	0.30	0.31	0.32	0.31	0.33	0.32

经计算得，$\overline{x}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i=0.317$，$s=\sqrt{\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})^2}=0.011$，其中 x_i 为抽取的第 i 次的碳含量百分比 $(i=1,2,\cdots,10)$.

①用样本平均数 $\overline{x}$ 作为 μ 的估计值 $\hat{\mu}$，用样本标准差 s 作为 σ 的估计值 $\hat{\sigma}$，利用估计值判断是否需对当天的生产过程进行检查？

②若去掉 x_1，剩下的数的平均数和标准差分别记为 μ_1，σ_1，试写出 σ_1 的算式（用 $\overline{x},s,x_1,\mu_1$ 表示 σ_1）.

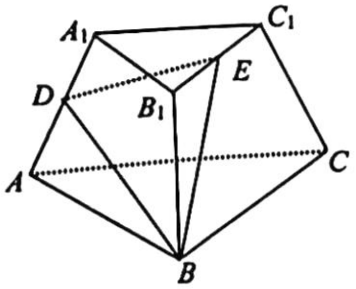
附：若随机变量 Z 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-3\sigma<Z<\mu+3\sigma)=0.9974$.

$0.9974^{10}\approx 0.9743$.

20.（本题满分 12 分）在正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧棱长为 1，且 $BC=2B_1C_1=2$，E 为 B_1C_1 的中点，D 为 AA_1 上的点，且 $DE\perp BB_1$.

(1) 证明：$DE\perp$ 平面 BCC_1B_1，并求出 AD 的长；

(2) 求平面 BDE 与平面 ABC 夹角的余弦值.



第20题图

21.（本题满分 12 分）设抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，O 是坐标原点，$M(4,0)$，过点 F 的直线与抛物线交于 A,B 两点，延长 AM,BM 分别交抛物线于 C,D 两点，P,Q 分别是 AB,CD 的中点.

（1）求直线 OP 的斜率的取值范围；

（2）求 $\cos\angle POQ$ 的最小值.

22.（本题满分 12 分）设函数 $f(x)=\ln(x+1)-a\ln x-b$，$a>0,b\in\mathrm{R}$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若对任意 $0<a<1$，函数 $f(x)$ 均有 2 个零点，求 b 的取值范围；

（3）设 $n\in\mathrm{N}^*$ 且 $n\geq 2$，证明：$\left(\dfrac{1}{n}\right)\cdot\left(\dfrac{2}{n}\right)^2\cdot\left(\dfrac{3}{n}\right)^3\cdot\cdots\cdot\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n-1}>2^{-\frac{n^2}{2}}$.

命题学校：永康一中　　审题学校：温州中学 温州二高