郑州市2023年高中毕业年级第二次质量预测
文科数学试题卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第Ⅰ卷(选择题，共60分)

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x||x|\leqslant 1\}$，$B=\{x|2^x>1\}$，则 $A\cap B$

A. $[1,+\infty)$　　B. $[-1,+\infty)$　　C. $(0,1]$　　D. $(0,1)$

2. 已知复数 $z=1+2i$（i 为虚数单位），则 z 的虚部为

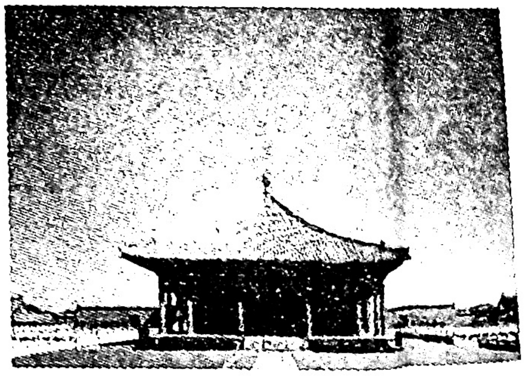
A. -1　　B. -2　　C. $-i$　　D. $-2i$

3. 命题：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x+\ln x>0$ 的否定是

A. $\forall x\notin\mathbf{R}$，$x+\ln x>0$　　B. $\forall x\notin\mathbf{R}$，$x+\ln x\leqslant 0$

C. $\exists x\in\mathbf{R}$，$x+\ln x>0$　　D. $\exists x\in\mathbf{R}$，$x+\ln x\leqslant 0$

4. 攒尖是古代中国建筑中屋顶的一种结构形式，依其平面有圆形攒尖、三角攒尖、四角攒尖、六角攒尖等，多见于亭阁式建筑.如故宫中和殿的屋顶为四角攒尖顶，它的主要部分的轮廓可近似看作一个正四棱锥，设正四棱锥的侧面等腰三角形的顶角为60°，则该正四棱锥的侧面积与底面积的比为



A. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\sqrt{3}$

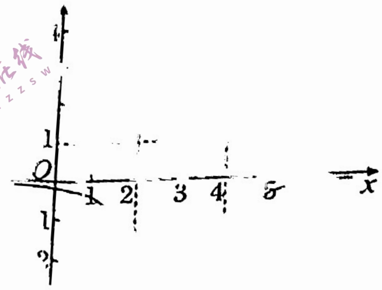
5. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=\frac{1}{2}$，$a_{n+1}=1-\frac{1}{a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_{2023}=$

A. -1　　B. 2　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 3

6. 尽管目前人类还无法精准预报地震，但科学家通过研究，已经对地震有所了解. 例如，地震释放出的能量 E(单位：焦耳)与地震里氏震级 M 之间的关系式为：$\lg E=4.8+1.5M$. 北京时间 2023 年 2 月 6 日 9 时 17 分，土耳其发生 7.8 级地震，它所释放出来的能量为 E_1，2023 年 2 月 28 日 12 时 21 分，塔吉克斯坦发生 4.6 级地震，它所释放出来的能量为 E_2. 则 E_1 大约是 E_2 的

A. $10^{2.8}$倍　　B. $10^{1.8}$倍　　C. $10^{3.8}$倍　　D. $10^{4.8}$倍

7. 若函数 $f(x)=\frac{2}{ax^2+bx+c}$ 的部分图象如右图所示，则 $f(5)=$



A. $-\frac{1}{3}$　　B. $-\frac{2}{3}$

C. $-\frac{1}{6}$　　D. $-\frac{1}{12}$

8. 人脸识别技术应用在各行各业，改变着人类的生活，而所谓人脸识别，就是利用计算机分析人脸视频或者图像，并从中提取出有效的识别信息，最终判别人脸对象的身份. 在人脸识别中为了检测样本之间的相似度主要应用距离的测试，常用的测量距离的方式有曼哈顿距离和余弦距离. 假设二维空间中有两个点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，O 为坐标原点，余弦相似度 similarity 为向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$夹角的余弦值，记作 $\cos(A,B)$，余弦距离为 $1-\cos(A,B)$. 已知 $P(\sin\alpha,\cos\alpha)$，$Q(\sin\beta,\cos\beta)$，$R(\sin\alpha,-\cos\alpha)$，若 P，Q 的余弦距离为$\frac{1}{3}$，Q，R 的余弦距离为$\frac{1}{2}$，则 $\tan\alpha\cdot\tan\beta=$

A. 7　　B. $\frac{1}{7}$　　C. 4　　D. $\frac{1}{4}$

9. 已知 $3^a=5^b=15$，则下列结论正确的是

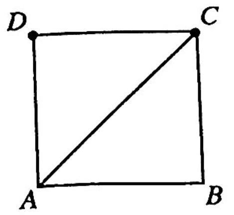
A. $a<b$　　B. $(a-1)^2+(b-1)^2>2$

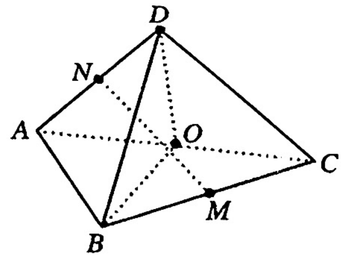
C. $ab>5$　　D. $a^2+b^2<8$

10. 已知抛物线 C：$y^2=4x$ 和直线 l：$\sqrt{3}x+y+3\sqrt{3}=0$，点 $P(a,b)$为抛物线 C 上任意一点，设点 P 到直线 l 的距离为 d，则 $a+d$ 的最小值为

A. $2\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}-1$ C. $2\sqrt{3}-2$ D. $\sqrt{3}-1$

11. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2,现将△ACD 沿对角线 AC 翻折,得到三棱锥 $D-ABC$. 记 AC,BC,AD 的中点分别为 O,M,N,则下列结论错误的是





A. $AC\perp$ 面 BOD

B. 三棱锥 $D-ABC$ 体积的最大值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

C. 三棱锥 $D-ABC$ 的外接球的表面积为定值

D. MN 与面 BOD 所成角的范围是 $(0,\frac{\pi}{4})$

12. 函数 $f(x)=\begin{cases}x\ln x, x>0,\\ x+1, x\leqslant 0,\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $[f(x)]^2-(m+1)f(x)+m=0$ 恰有 5 个不同的实数根,则实数 m 的取值范围是

A. $-\frac{1}{e}<m<0$

B. $-\frac{1}{e}<m\leqslant 0$

C. $-\frac{1}{e}\leqslant m<0$

D. $-\frac{1}{e}\leqslant m\leqslant 0$

第Ⅱ卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知 $\boldsymbol{a}=(2,k)$,$\boldsymbol{b}=(1,2)$,若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,则 $k=$ ________.

14. 双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $e=\sqrt{3}$,过双曲线的右焦点作垂直于 x 轴的直线交双曲线 C 与 A,B 两点. 设 A,B 两点到双曲线的同一条渐近线的距离之和为 8,则双曲线的焦距为 ________.

15. 在△ABC 中,角 A,B,C 所对的边分别是 a,b,c,其中 $\sin C=3\sin A$,$B=60°$,$b=\sqrt{7}$. 若 B 的角平分线 BD 交 AC 于点 D,则 $BD=$ ________.

16. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(-x+4)$,$f(2024)=\frac{1}{2}$,若 $f(x)-f'(x)>0$,则不等式 $f(x+2)>e^x$ 的解集为 ________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或验算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：60 分

17.（本小题满分 12 分）

在科学、文化、艺术、经济等领域，出现过大量举世瞩目的“左撇子”天才，如：相对论提出者爱因斯坦，万有引力定律的发现者牛顿，镭的发现者居里夫人，诺贝尔奖获得者杨振宁，著有《变形记》的小说家弗兰兹卡夫卡，乒乓球女将王楠等。正因为如此多的“左撇子”在不同领域取得了卓越的成就，所以越来越多的人认为“左撇子”会更聪明，这是真的吗？某学校数学社成员为了了解真相，决定展开调查。他们从学生中随机选取 100 位同学，统计他们惯用左手还是惯用右手，并通过测验获取了他们的智力商数，将智力商数不低于 120 视为高智商人群，统计情况如下表.

	智力商数不低于 120	智力商数低于 120	总计
惯用左手	4	6	10
惯用右手	16	74	90
总计	20	80	100

（Ⅰ）能否有 90% 的把握认为智力商数与是否惯用左手有关？

（Ⅱ）从智力商数不低于 120 分的这 20 名学生中，按惯用左手和惯用右手采用分层抽样，随机抽取了 5 人，再从这 5 人中随机抽取 2 人代表学校参加区里的素养大赛，求这 2 人中至少有一人是惯用左手的概率.

参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

18.(本小题满分 12 分)

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项之积为 $T_n=2^{\frac{n(n-1)}{2}}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(Ⅰ)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

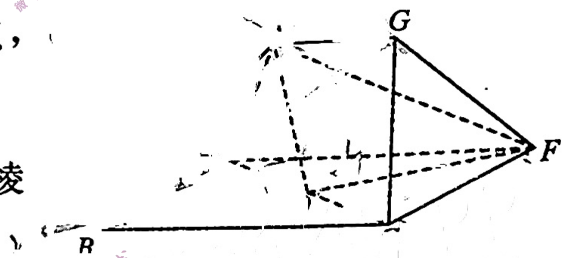
(Ⅱ)记 b_m 为$\{a_n\}$在区间$(0,m]$$(m\in\mathbf{N}^*)$中的项的个数,求数列$\{b_m\}$的前 50 项和 S_{50}.

19.(本小题满分 12 分)

《九章算术》卷第五《商功》中有记载:“刍甍者,下有袤有广,而上有袤无广.刍,草也.甍,屋盖也.”翻译为“底面有长有宽为矩形,顶部只有长没有宽为一条棱.刍甍字面意思为茅草屋顶.”现有“刍甍”如图所示,四边形 $EBCF$ 为矩形,$BC=2BE=2AE=2AG=4$,且 $AG /\!/ EF$.

(Ⅰ)若 O 是四边形 $EBCF$ 对角线的交点,求证:$AO /\!/$ 平面 GCF;

(Ⅱ)若 $AE\perp EF$,且 $\angle AEB=\dfrac{2\pi}{3}$,求三棱锥 $A-BEF$ 的体积.



20.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦距为 $2\sqrt{3}$,F_1,F_2 分别为左、右焦点,过 F_1 的直线 l 与椭圆 C 交于 M,N 两点,$\triangle F_2MN$ 的周长为 8.

(Ⅰ)求椭圆 C 的标准方程;

(Ⅱ)求三角形$\triangle F_2MN$内切圆半径的最大值.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\sin x-mx^3$，$g(x)=(x-1)e^x$，$(m\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）当 $m=1$ 时，求 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）设 $F(x)=f(x)+g(x)-\sin x$，当 $x>0$ 时，函数 $F(x)$ 有两个极值点，求实数 m 的取值范围.

（二）选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 在答题卷上将所选题号涂黑，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\varphi,\\ y=1+\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=2\sqrt{3}\cos\theta$.

（Ⅰ）求曲线 C_1 的极坐标方程与曲线 C_2 的直角坐标方程；

（Ⅱ）直线 $l:\theta=\frac{\pi}{6}(\rho\in\mathbf{R})$ 与曲线 C_1，C_2 分别交于 M、N 两点（异于极点 O），P 为 C_2 上的动点，求 $\triangle PMN$ 面积的最大值.

23.（10 分）

已知函数 $f(x)=|ax-2|-|x-2|(a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）当 $a=3$ 时，求不等式 $f(x)>2$ 的解集；

（Ⅱ）若对任意 $x\in[1,2]$，都有 $f(x)\geqslant 0$，求 a 的取值范围.