

数学参考答案

一、选择题

1. D 2. C 3. B 4. D 5. D 6. C 7. A 8. C

二、选择题

9. AC 10. AB 11. AC 12. BCD

三、填空题

13. $(-\infty, 2\sqrt{2}]$ 14. 5 15. $\frac{4\sqrt{\ln 2}}{\ln 2}$ 16. $\frac{3\pi}{2}$

四、解答题

17. 解: (1) 因为 $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+1} + 2a_n^2$,

$$\text{所以 } (a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - 2a_n) = 0.$$

又 $a_n > 0$, 所以 $a_{n+1} - 2a_n = 0$

即 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$, 所以 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列. (2 分)

又 $3a_1, a_2 + 3, a_3$ 成等差数列, 所以 $3a_1 + a_3 = 2(a_2 + 3)$,

所以 $3a_1 + 4a_1 = 4a_1 + 6$, 解得 $a_1 = 2$ (4 分)

所以 $a_n = 2^n$ (5 分)

(2) 由 (1) 可知 $a_n = 2^n$, 所以 $b_n = \begin{cases} 2^n, & \text{为奇函数,} \\ -n, & n \text{ 为偶函数,} \end{cases}$ (6 分)

所以 $T_{2n} = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{2n}$

$$= (b_1 + b_3 + \cdots + b_{2n-1}) + (b_2 + b_4 + \cdots + b_{2n})$$

$$= 2^1 + 2^3 + \cdots + 2^{2n-1} - (2 + 4 + \cdots + 2n)$$

$$= \frac{2 - 2^{2n-1} \cdot 2^2}{1-4} - \frac{(2+2n)n}{2}$$

$$= \frac{2^{2n+1} - 2}{3} - n(n+1). \quad (10 \text{ 分})$$

18. 解: (1) 在 $\triangle AOM$ 中, $OA=15$, $\angle AOM=\beta$, 且 $\cos \beta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $OM=3\sqrt{13}$,

由余弦定理, 得 $AM^2 = OA^2 + OM^2 - 2OA \cdot OM \cdot \cos \beta$.

$$\cos \beta = \frac{15^2 + (3\sqrt{13})^2 - AM^2}{2 \times 15 \times 3\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

所以 $AM = 6\sqrt{2}$, 所以大学 M 与站 A 的距离 AM 为 $6\sqrt{2}$ km. (4 分)

(2) 因为 $\cos \beta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, 且 β 为锐角, 所以 $\sin \beta = \frac{2}{\sqrt{13}}$ 在 $\triangle AOM$ 中, 由正弦定理,

$$\frac{AM}{\sin \beta} = \frac{OM}{\sin \angle MAO}, \text{ 即 } \frac{6\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{13}}{\sin \angle MAO},$$

$$\text{解得 } \sin \angle MAO = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (6 \text{ 分})$$

由题意知 $\angle MAO$ 为锐角, 所以 $\angle MAO = \frac{\pi}{4}$,

$$\text{所以 } \angle ABO = \alpha - \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{因为 } \tan \alpha = 2, \text{ 所以 } \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\text{所以 } \sin \angle ABO = \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{10}}. \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{又 } \angle AOB = \pi - \alpha, \text{ 所以 } \sin \angle AOB = \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{在 } \triangle AOB \text{ 中, 由正弦定理, 得 } \frac{AB}{\sin \angle AOB} = \frac{OA}{\sin \angle ABO},$$

$$\text{即 } \frac{AB}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{15}{\frac{1}{\sqrt{10}}}, \text{ 解得 } AB = 30\sqrt{2}, \quad (11 \text{ 分})$$

所以铁路 AB 段的长 AB 为 $30\sqrt{2}$ km. (12 分)

19. (1) 证明: 如图, 连接 AC 与 BD 的交点为 O , 连接 OQ, OF, OF .

因为三棱锥 $E-ABD$ 和三棱锥 $F-BCD$ 均为棱长为 2 的正四面体,

所以 $OA=OC$, $OE=OF$, $AE=CF$,

则 $\triangle AOE \cong \triangle COF$,

则 $\angle EAO = \angle FCO$,

所以 $AQ = CQ$,

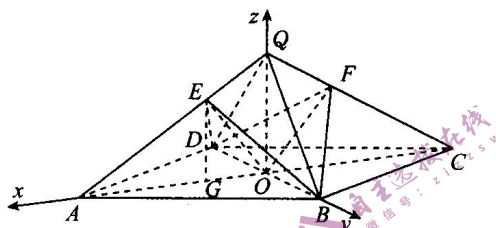
所以 $OQ \perp AC$. (2分)

由题意知四边形 $ABCD$ 是菱形, 则 $AC \perp BD$.

因为 $OQ \cap BD = O$, $OQ, BD \subset$ 平面 BDQ ,

所以 $AC \perp BDQ$.

又 $AC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以平面 $BDQ \perp$ 平面 $ABCD$. (4分)



(2) 解: 过点 E 作 $EG \parallel OQ$, 交 AC 于点 G , 则 $EG \perp$ 平面 ABD .

又三棱锥 $E-ABD$ 是正四面体, 所以 G 是 $\triangle ABD$ 的中心.

在 $\triangle ABD$ 中, $AG = \frac{2}{3}OA = \frac{2\sqrt{3}}{3}$;

在 $Rt\triangle AEG$ 中, $EG = \sqrt{AE^2 - AG^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

又 $EG \parallel OQ$, 所以 $\frac{OQ}{EG} = \frac{OA}{AG} = \frac{3}{2}$,

所以 $OQ = \sqrt{6}$.

由 (1) 知 OQ, AC, BD 两两垂直, 故以 O 为坐标原点, (6分)

OA, OB, OQ 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系, 如图所示,

则 $A(\sqrt{3}, 0, 0)$, $D(0, -1, 0)$, $C(-\sqrt{3}, 0, 0)$, $Q(0, 0, \sqrt{6})$,

故 $\overrightarrow{AD} = (-\sqrt{3}, -1, 0)$, $\overrightarrow{DQ} = (0, 1, \sqrt{6})$, $\overrightarrow{CD} = (\sqrt{3}, -1, 0)$

设平面 ADQ 的法向量为 $m = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \\ m \cdot \overrightarrow{DQ} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} -\sqrt{3}x - y = 0 \\ y + \sqrt{6}z = 0 \end{cases}$, 令 $y = \sqrt{6}$,

则 $x = -\sqrt{2}$, $z = -1$, 得平面 ADQ 的一个法向量为 $m = (-\sqrt{2}, \sqrt{6}, -1)$ (7分)

设平面 CDQ 的法向量为 $n = (a, b, c)$, 则 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \\ n \cdot \overrightarrow{DQ} = 0 \end{cases}$,

$$\text{即} \begin{cases} \sqrt{3}a - b = 0, \\ b + \sqrt{6}c = 0. \end{cases} \text{令 } b = \sqrt{6},$$

则 $a = \sqrt{2}$, $c = -1$, 得平面 CDQ 的一个法向量为 $n = (\sqrt{2}, \sqrt{6}, -1)$. (9 分)

设二面角 $A-DQ-C$ 的平面角为 θ ,

$$\text{则 } |\cos \theta| = |\cos \langle m, n \rangle| = \frac{|m \cdot n|}{|m||n|} = \frac{|-2+6+1|}{\sqrt{2+6+1} \times \sqrt{2+6+1}} = \frac{5}{9}, \quad (11 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{2\sqrt{14}}{9},$$

故二面角 $A-QD-C$ 的正弦值为 $\frac{2\sqrt{14}}{9}$. (12 分)

20. 解: (1) 若选择 A 方案的三人全部合格, 则所求概率 $P_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{27}$;

若选择 A 方案的三人中有两人合格, 则所求概率

$$P_2 = C_3^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times C_2^1 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{9}$$

若选择 A 方案的三人中, 只有一人合格, 则所求概率 $P_3 = C_3^1 \times \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{18}$,

所以恰有三位学生合格的概率 $P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{2}{27} + \frac{2}{9} + \frac{1}{18} = \frac{19}{54}$. (6 分)

(2) 设选择 A 方案测试的学生人数为 $n, n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$,

则选择 B 方案测试的学生人数为 $5 - n$, 并设通过 A 方案测试合格的学生人数为 ξ ,

通过 B 方案测试合格的学生人数为 η ,

当 $n = 0$ 时, 此时所有学生均选择 B 方案测试, 则 $\eta \sim B\left(5, \frac{1}{2}\right)$

所以 $E(\xi + \eta) = E(\eta) = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2} < 3$, 不符合题意;

当 $n = 5$ 时, 此时所有学生均选择 A 方案测试, 则 $\xi \sim B\left(5, \frac{2}{3}\right)$,

所以 $E(\xi + \eta) = E(\xi) = 5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3} > 3$, 符合题意; (9 分)

当 $n=1,2,3,4$ 时, $\xi \sim B\left(n, \frac{2}{3}\right)$, $\eta \sim B\left(5-n, \frac{1}{2}\right)$

$$\text{所以 } E(\xi + \eta) = E(\xi) + E(\eta) = \frac{2}{3}n + \frac{5-n}{2} = \frac{n+15}{6} \quad (10 \text{ 分})$$

$$\text{又 } E(\xi + \eta) = \frac{n+15}{6} \geq 3,$$

则 $n \geq 3$, 故当 $n=3,4$ 时, 符合题意. (11 分)

综上, 当选择 A 方案测试的学生人数为 3,4,5 时, 测试合格的人数的均值不小于 3. (12 分)

21. 解: (1) 设 $P(x, y)$ 为椭圆上一点, 由题意知 $|PF| + |PE| = |PA| + |PE| = |AE| = 6 > |EF| = 4$,

所以点 P 的轨迹是以 F, E 为焦点, 长轴长 $2a = 6$ 的椭圆. (2 分)

所以 $c = 2$, $a = 3$, 则 $b^2 = a^2 - c^2 = 5$,

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ (4 分)

(2) 由题意, 设 l 的方程为 $x = my + 1$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$.

$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1, \\ x = my + 1, \end{cases} \text{ 得 } (5m^2 + 9)y^2 + 10my - 40 = 0, \Delta = 100m^2 + 160(5m^2 + 9) > 0,$$

$$\text{则 } y_1 + y_2 = -\frac{10m}{5m^2 + 9}, \quad y_1 y_2 = -\frac{40}{5m^2 + 9} (*). \quad (7 \text{ 分})$$

$$k_{TM} \cdot k_{TN} = \frac{y_1}{x_1 - t} \cdot \frac{y_2}{x_2 - t} = \frac{y_1 y_2}{(my_1 + 1 - t)(my_2 + 1 - t)} = \frac{y_1 y_2}{m^2 y_1 y_2 + m(1 - t)(y_1 + y_2) + (1 - t)^2}$$

将 (*) 式代入上式,

$$\text{可得 } k_{TM} \cdot k_{TN} = \frac{-40}{5(t^2 - 9)m^2 + 9(1 - t)^2} \quad (9 \text{ 分})$$

要使 $k_{TM} \cdot k_{TN}$ 为定值, 则 $t^2 - 9 = 0$,

$$\text{即 } t^2 = 9. \text{ 又 } t > 0, \text{ 所以 } t = 3, \text{ 此时 } k_{TM} \cdot k_{TN} = -\frac{10}{9} \quad (11 \text{ 分})$$

所以存在点 $T(3, 0)$, 使得直线 TM 与 TN 的斜率之积为定值 $-\frac{10}{9}$. (12 分)

22. 解: (1) $f(x) = e^{ax} - ax$, 则 $f'(x) = ae^{ax} - a = a(e^{ax} - 1)$,

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) < 0$, 解得 $x < 0$,

令 $f'(x) > 0$, 解得 $x > 0$,

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增; (2 分)

当 $a < 0$ 时, 令 $f'(x) < 0$, 解得 $x < 0$; 令 $f'(x) > 0$, 解得 $x > 0$;

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增. (4 分)

综上, $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增. (5 分)

(2) 由题意得 $e^{ax} \geq \sin x - \cos x + 2$ 对任意 $x \geq 0$ 恒成立,

令 $h(x) = e^{ax} - \sin x + \cos x - 2$,

则 $h'(x) = ae^{ax} - \cos x - \sin x$.

若 $x \geq 0$, 当 $a \geq 1$ 时, $e^{ax} \geq e^x$, $h(x) \geq e^x - \cos x - \sin x$. (6 分)

令 $u(x) = x - \sin x (x \geq 0)$, 则 $u'(x) = 1 - \cos x \geq 0$,

所以 $u(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $u(x) \geq u(0) = 0$,

即 $x \geq \sin x$, 令 $v(x) = e^x - x - 1 (x \geq 0)$,

则 $v'(x) = e^x - 1 \geq 0$, 所以 $v(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $v(x) \geq v(0) = 0$,

即 $e^x \geq x + 1$, 所以当 $x \geq 0$ 时, $e^x \geq x + 1 \geq \sin x + 1$,

则 $h'(x) \geq e^x - \cos x - \sin x \geq 1 - \cos x \geq 0$,

所以 $h(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $h(x) \geq h(0) = 0$,

即 $e^{ax} \geq \sin x - \cos x + 2$ 恒成立. (9 分)

当 $a < 1$ 时, $h'(0) = a - 1 < 0$, 存在实数 $x_0 > 0$, 使得 $\forall x \in (0, x_0)$, 均有 $h'(x) < 0$,

则 $h(x)$ 在区间 $(0, x_0)$ 上单调递减, 且 $h(x) < h(0) = 0$, 不符合题意. (11 分)

综上, 实数 a 的取值范围是 $[1, +\infty)$. (12 分)