2023-2024学年上学期
东北师大附中（数学）科试卷
高三年级第一次摸底考试

注意事项：

1．答题前，考生须将自己的姓名、班级、考场/座位号填写在答题卡指定位置上，并粘贴条形码．

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号．

3．回答非选择题时，请使用0.5毫米黑色字迹签字笔将答案写在答题卡各题目的答题区域内，超出答题区域或在草稿纸、本试题卷上书写的答案无效．

4．保持卡面清洁，不要折叠、不要弄皱、弄破，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀．

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知$P=\{-1,0,1,2,3\}$，$Q=\{x\in Z||x|\le 1\}$，则$P\cap Q=$（　　）

A. $\{x|-1\le x\le 1\}$　　B. $\{-1,0,1\}$　　C. $\{0,1\}$　　D. $\{-1,0\}$

【答案】B

【解析】

【分析】利用集合的运算，分析运算即可得解．

【详解】解：由题意，$Q=\{x\in Z||x|\le 1\}=\{-1,0,1\}$，

$\therefore P\cap Q=\{-1,0,1\}$．

故选：B．

2. 已知条件$p:\frac{1}{x}<1$，条件$q:x^2+x-6>0$，则p是q的（　　）

A. 充要条件　　B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】

【分析】解不等式，解集分别为A，B，根据集合的包含关系即可求解．

【详解】由 $\frac{1}{x}<1\Rightarrow x>1$ 或 $x<0$，不妨设 $A=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$，

$x^2+x-6>0\Rightarrow(x+3)(x-2)>0\Rightarrow x>2$ 或 $x<-3$，不妨设 $B=(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$，

因为 B 真包含于 A，所以 p 推不出 q，q 能推出 p，

所以 p 是 q 的必要不充分条件.

故选：C

3. 方程 $\log_3 x+x=2$ 的根所在区间是（　　）

A. $(0,1)$　　B. $(1,2)$　　C. $(2,3)$　　D. $(3,4)$

【答案】B

【解析】

【分析】将问题转化为 $f(x)=\log_3 x+x-2$ 零点所在区间的求解问题，利用零点存在定理求解即可.

【详解】设 $f(x)=\log_3 x+x-2$，则方程 $\log_3 x+x=2$ 根所在区间即为 $f(x)$ 零点所在区间，

$\because y=\log_3 x$ 与 $y=x-2$ 在 $(0,+\infty)$ 上均为增函数，\ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

对于 A，$\because f(1)=\log_3 1+1-2=-1$，$\therefore$ 当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)<-1$，A 错误；

对于 B，$\because f(1)=-1<0$，$f(2)=\log_3 2+2-2=\log_3 2>0$，即 $f(1)f(2)<0$，

$\therefore\exists x_0\in(1,2)$，使得 $f(x_0)=0$，B 正确；

对于 CD，当 $x>2$ 时，$f(x)>f(2)>0$，\ $f(x)$ 在区间 $(2,3)$ 和 $(3,4)$ 上无零点，C 错误，D 错误.

故选：B.

4. 函数 $f(x)=\cos 2x$ 在点 $P\left(\frac{\pi}{4},f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ 处的切线斜率是（　　）

A. -2　　B. 2　　C. -1　　D. 1

【答案】A

【解析】

【分析】对函数求导，利用导数的几何意义求 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$，即可得答案.

【详解】由 $f'(x)=-2\sin 2x$，则 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2$，

所以在点$P\left(\frac{\pi}{4},f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$处的切线斜率为$-2$，

故选：A.

5. 若a，b，$c\in \mathrm{R}$，且$a>b$，则下列不等式一定成立的是（　　）

A. $ac>bc$　　　　B. $ac^2>bc^2$

C. $(b-a)c^2<0$　　　　D. $(a-b)c^2\geq 0$

【答案】D

【解析】

【分析】利用特殊情形可判断 ABC，根据不等式性质判断 D.

【详解】对 A，当$c\leq 0$时，$ac>bc$不成立，故 A 错误；

对 B，当$c=0$时，$ac^2>bc^2$不成立，故 B 错误；

对 C，当$c=0$时，$(b-a)c^2<0$不成立，故 C 错误；

对 D，由$a>b\Rightarrow a-b>0$，又$c^2\geq 0$，所以$(a-b)c^2\geq 0$，故 D 正确.

故选：D

6. 8 月 29 日，华为在官方网站发布了 Mate60 手机，其中大部分件已实现国产化，5G 技术更是遥遥领先，5G 技术的数学原理之一便是著名的香农公式：$C=W\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$，它表示：在受噪声干扰的信道中，最大信息传递速度$C$取决于信道带宽$W$，位道内信号的平均功率S以及信道内部的高斯噪声功率N的大小，其中$\frac{S}{N}$叫做信噪比．当信噪比比较大时，公式中真数中的 1 可以忽略不计．按照香农公式，若不改变带宽W，而将信噪比从 1000 提升至 5000，则C大约增加了（　　）（参考数值：$\lg 2\approx 0.301$）

A. 43%　　　　B. 33%　　　　C. 23%　　　　D. 13%

【答案】C

【解析】

【分析】把两个信噪比代入$C=W\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$，然后作商运算即可.

【详解】由题意，$\frac{W\log_2 5000}{W\log_2 1000}-1=\frac{\lg 5000}{\lg 1000}-1=\frac{3+\lg 5}{3}-1=\frac{4-\lg 2}{3}-1\approx\frac{1-0.301}{3}\approx 23\%$，

C大约增加了23%，

故选：C

7. 下列函数中，即是奇函数又是增函数的是（　　）

A. $f(x)=-x^3$　　B. $f(x)=x^3-x$

C. $f(x)=2^x-2^{-x}$　　D. $f(x)=\ln|x+1|+\ln|x-1|$

【答案】C

【解析】

【分析】分别判断各函数的单调性和奇偶性即可.

【详解】A 选项，$f(x)=-x^3$ 在 R 上单调递减，不合题意；

B 选项，$f(x)=x^3-x$，$f'(x)=3x^2-1$，当 $x\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，不合题意；

C 选项，$f(x)=2^x-2^{-x}$，定义域为 R，$f(-x)=2^{-x}-2^x=-\left(2^x-2^{-x}\right)=-f(x)$，函数为奇函数，

由函数 $y=2^x$ 和 $y=-2^{-x}$ 都是 R 上的增函数，所以 $f(x)$ 为 R 上的增函数，C 选项正确；

D 选项，$f(x)=\ln|x+1|+\ln|x-1|=\ln|x^2-1|$，

当 $x<-1$ 时，结合二次函数性质可知，函数 $y=|x^2-1|$ 单调递减，则 $f(x)$ 单调递减，不合题意.

故选：C.

8. 定义域为 R 的函数 $f(x)$ 的导函数记作 $f'(x)$，满足 $f'(x)-f(x)>3e^x$，$f(2)=6e^2$，则不等式 $f(x)>3xe^x$ 的解集为（　　）

A. $(2,+\infty)$　　B. $(-\infty,2)$　　C. $(3,+\infty)$　　D. $(-\infty,3)$

【答案】A

【解析】

【分析】根据条件构造函数 $G(x)=\frac{f(x)}{e^x}-3x$，利用导数判断单调性，由单调性求解不等式即可.

【详解】令 $G(x)=\frac{f(x)}{e^x}-3x$，

则 $G'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}-3>\frac{3e^x}{e^x}-3=0$，

所以函数 $G(x)$ 在 R 上单调递增，

又 $G(2)=\frac{f(2)}{e^2}-3\times2=0$，

由 $f(x)>3xe^x$ 可得 $\frac{f(x)}{e^x}-3x>0$，即 $G(x)>G(2)$，

所以 $x>2$.

故选：A

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 设 a，b 为正实数，则下列不等式正确的是（　　）

A. $\frac{ab}{a+b}\geq\frac{a+b}{4}$　　B. $\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\geq 4$

C. $\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$　　D. $\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}<a+b$

【答案】BC

【解析】

【分析】利用基本不等式以及其变形以及不等式性质一一判断各选项，即可得答案.

【详解】对于 A，a，b 为正实数，则 $a^2+b^2\geq 2ab$，故 $(a+b)^2\geq 4ab$，

即 $(a+b)(a+b)\geq 4ab$，故 $\frac{ab}{a+b}\leq\frac{a+b}{4}$，A 错误；

对于 B，由于 $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$，当且仅当 $a=\frac{1}{a}$ 即 $a=1$ 时取等号，

$b+\frac{1}{b}\geq 2$，当且仅当 $b=\frac{1}{b}$ 即 $b=1$ 时取等号，

故 $\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\geq 4$，B 正确；

对于 C，因为 a，b 为正实数，$a^2+b^2\geq 2ab$，故 $2(a^2+b^2)\geq(a+b)^2$，

故 $\frac{a^2+b^2}{2}\geq(\frac{a+b}{2})^2$，即 $\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，C 正确；

对于 D，因为 a，b 为正实数，则 $\frac{b^2}{a}+a\geq 2b,\frac{a^2}{b}+b\geq 2a$，

当且仅当 $a=b$ 时，等号成立，

故 $\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}+b+a\geq 2b+2a$，即 $\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}\geq b+a$，D 错误，

故选：BC

10. 已知 $f(x)=\begin{cases}x-1,(x\geq 0)\\ \dfrac{1}{x}\quad (x<0)\end{cases}$，下列说法正确的是（　　）

A. $f(x)=1$ 时，$x=2$

B. 若方程 $f(x)=a$ 有两个根，则 $-1\leq a<0$

C. 若直线 $kx+y-k-1=0$ 与 $y=f(x)$ 有两个交点，则 $k\geq 2$ 或 $0<k<1$

D. 函数 $g(x)=f(f(x))+1$ 有 3 个零点

【答案】ABD

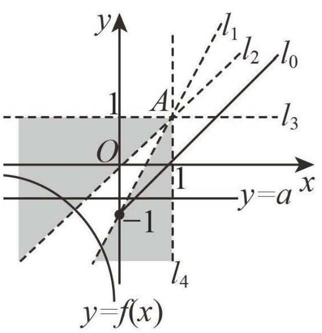
【解析】

【分析】对 A：分类讨论 x 求解即可；对 B：方程 $f(x)=a$ 有两个根可以看作 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=a$ 有两个不同交点，由图得 a 的取值范围；对 C：直线 $kx+y-k-1=0$ 是以 $-k$ 为斜率且恒过 $A(1,1)$ 的直线，结合 $y=f(x)$ 的图象得到直线与 $y=f(x)$ 有两个交点时斜率的范围；对 D：$f(f(x))=-1$ 分 $f(x)\geq 0, f(x)<0$ 求解.

【详解】对 A：当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=x-1=1$，得 $x=2$ 满足题意；

当 $x<0$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}=1$，得 $x=1$ 不满足题意，故 A 正确.

对 B：作出 $y=f(x)$ 的图象，方程 $f(x)=a$ 有两个根可以看作 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=a$ 有两个不同交点，由图知 $-1\leq a<0$，故 B 正确.



对 C：直线 $l: kx+y-k-1=0$ 可化为 $y-1=-k(x-1)$，故直线 l 是以 $-k$ 为斜率且恒过 $A(1,1)$ 的直线，

如图，l_1 为过 $A(1,1)$ 与 $(0,-1)$ 两点的直线，其斜率为 2，

当 l 位于 l_1 时，直线 l 与 $y=f(x)$ 有两个交点，

l_2为过$A(1,1)$且与$l_0: y=x-1$平行的直线， 其斜率为1，

当l位于l_2时，直线l与$y=f(x)$只有一个交点，

l_3为过$A(1,1)$的水平直线，其斜率为0，

当l位于l_3时，直线l与$y=f(x)$只有一个交点，

l_4为过$A(1,1)$的竖直直线，其斜率不存在，

当l位于l_4时，直线l与$y=f(x)$只有一个交点，

由图可知，要使直线$kx+y-k-1=0$与$y=f(x)$有两个交点，

则l位于l_2,l_3之间或位于l_1,l_4之间，故$-k\in(0,1)\cup[2,+\infty)$，所以$k\in(-\infty,-2]\cup(-1,0)$，故C错误.

对D：$g(x)=f(f(x))+1=0$，即$f(f(x))=-1$，所以$\begin{cases}f(x)\ge 0\\ f(x)-1=-1\end{cases}$或$\begin{cases}f(x)<0\\ \dfrac{1}{f(x)}=-1\end{cases}$

由$\begin{cases}f(x)\ge 0\\ f(x)-1=-1\end{cases}$得$x=1$，

由$\begin{cases}f(x)<0\\ \dfrac{1}{f(x)}=-1\end{cases}$得$f(x)=-1$进而得$x=-1$或$x=0$，

所以函数$g(x)=f(f(x))+1$有3个零点，故D正确.

故选：ABD

11. 已知$a+3^a=b+5^b=3$，则下列不等关系正确的是（　　）

A. $0<a<b<1$　　　　B. $0<b<a<1$

C. $b+3^a<a+5^b$　　　　D. $b\ln a>a\ln b$

【答案】BCD

【解析】

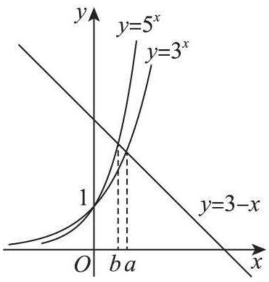
【分析】将a,b看作$y=3^x, y=5^x$的图象与直线$y=3-x$交点的横坐标，数形结合可判断A，B；结合题意可推出$3^a<5^b$，利用不等式性质可判断C；根据已知不等式的结构特征，构造函数$f(x)=\dfrac{\ln x}{x},(x>0)$，利用其单调性可判断D.

【详解】由$a+3^a=b+5^b=3$可知，若$a<0,b<0$，则$3^a<1,5^b<1$，则$a+3^a=b+5^b=3$不成立，

又 $a=b=1$ 时，$3^a=3,5^b=5$，故 $0<a<1,0<b<1$，

又 $3^a=3-a,5^b=3-b$，则 a,b 可看作 $y=3^x,y=5^x$ 的图象与直线 $y=3-x$ 交点的横坐标，

作出 $y=3^x,y=5^x$ 与 $y=3-x$ 的图象如图，



结合图象可知 $0<b<a<1$，故 A 错误，B 正确；

由 $0<b<a<1$，$a+3^a=b+5^b=3$，得 $3^a<5^b$，

故 $b+3^a<a+5^b$，C 正确；

令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x},(x>0)$，则 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(1,\mathrm{e})$ 上单调递增，

当 $x>\mathrm{e}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减，

由于 $0<b<a<1$，故 $f(b)<f(a)$，即 $\dfrac{\ln b}{b}<\dfrac{\ln a}{a}$，

故 $b\ln a>a\ln b$，D 正确，

故选：BCD

12. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，并且对 $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $f(-x)=f(x+2)=-f(2-x)$，则下列说法正确的是（　　）

A. $y=f(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称

B. 函数 $f(x)$ 为偶函数

C. $\sum\limits_{k=1}^{2024}f(k)=0$

D. 若 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)=\log_2(x+1)$，则 $x\in(3,4)$ 时，$f(x)=-\log_2(5-x)$

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据所给性质，利用函数对称性判断 AB，根据性质求出周期判断 C，根据图象的对称性求解析式

判断 D.

【详解】由 $f(-x)=f(x+2)$ 可知函数关于直线 $x=1$ 轴对称，故 A 正确；

由 $f(-x)=-f(2-x)$ 可得 $f(x)=-f(2+x)$，又 $f(-x)=f(x+2)$，

所以 $f(-x)=-f(x)$，故函数 $f(x)$ 为奇函数，故 B 错误；

因为 $f(x)=-f(2+x)$，所以 $f(x+4)=-f(2+x)=f(x)$，故 4 为函数周期，

又 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=f(1)+f(2)-f(1)-f(2)=0$，

所以 $\sum_{k=1}^{2024} f(k)=506\times[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]=0$，故 C 正确；

由 $f(x+2)=-f(2-x)$ 知函数关于 $(2,0)$ 成中心对称，

当 $x\in(3,4)$ 时，设 $P(x,y)$ 为函数 $f(x)$ 图象上任意一点，

则 $P'(4-x,-y)$ 在函数 $f(x)$ 图象上，且 $4-x\in(0,1)$，

所以 $-y=\log_2(4-x+1)$，即 $y=-\log_2(5-x)$，故 D 正确.

故选：ACD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 函数 $f\left(x\right)=e^x+x$ 在 $x=0$ 处的切线的方程为______.

【答案】$y=2x+1$

【解析】

【分析】首先求出导函数 $f'\left(x\right)=e^x+1$，从而可求 $f'\left(0\right)=e^0+1=2$，再求出切点 $\left(0,1\right)$，利用点斜式即可求解.

【详解】由 $f\left(x\right)=e^x+x$，所以 $f'\left(x\right)=e^x+1$，所以 $f'\left(0\right)=e^0+1=2$，

当 $x=0$ 时，则 $f\left(0\right)=1$，

所以在 $x=0$ 处的切线的方程为：$y-1=2\left(x-0\right)$，即 $y=2x+1$.

故答案为：$y=2x+1$

【点睛】本题主要了导数的几何意义、基本初等函数的导数公式以及导数的运算法则，属于基础题.

14. 若 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+2x-1$ 在 $(1,2)$ 内存在极值，则实数 a 的取值范围是________.

【答案】$\left(2\sqrt{2},3\right)$

【解析】

【分析】求出函数的导数，问题转化为 $f'(x)=x^2-ax+2$ 在 $(1,2)$ 内有变号零点，利用二次函数的性质求出 a 的取值范围.

【详解】$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+2x-1$ 在 $(1,2)$ 内存在极值，则 $f'\left(x\right)=x^2-ax+2$ 在 $(1,2)$ 内有变号零点，

$f'\left(1\right)=3-a$，$f'\left(2\right)=6-2a=2f'\left(1\right)$，$f'\left(1\right)$ 与 $f'\left(2\right)$ 同号，

则有 $\begin{cases}\Delta=a^2-8>0\\ 3-a>0\\ 1<\dfrac{a}{2}<2\end{cases}$，解得 $2\sqrt{2}<a<3$，即实数 a 的取值范围是 $\left(2\sqrt{2},3\right)$.

故答案为：$\left(2\sqrt{2},3\right)$

15. 已知 $m>1$，$n>0$，$m^2-3m+n=0$，则 $\frac{4}{m-1}+\frac{m}{n}$ 的最小值为________.

【答案】$\frac{9}{2}$##4.5

【解析】

【分析】根据条件消去 n，再利用“1”的变形技巧，结合均值不等式求解即可.

【详解】由 $m^2-3m+n=0$ 可得 $n=3m-m^2>0$，解得 $0<m<3$，

又 $m>1$，所以 $1<m<3$，

则 $\frac{4}{m-1}+\frac{m}{n}=\frac{4}{m-1}+\frac{1}{3-m}=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{m-1}+\frac{1}{3-m}\right)(m-1+3-m)$

$=\frac{1}{2}\left(5+\frac{4(3-m)}{m-1}+\frac{m-1}{3-m}\right)\geq\frac{1}{2}\left(5+2\sqrt{4}\right)=\frac{9}{2}$，

当且仅当 $\frac{4(3-m)}{m-1}=\frac{m-1}{3-m}$，即 $m=\frac{7}{3},n=\frac{14}{9}$ 时等号成立.

故答案为：$\frac{9}{2}$

16. 不等式 $xe^{x}+\dfrac{a\ln x}{x^{a}}\geq 0(a<0)$ 对 $\forall x\in(1,+\infty)$ 都成立，则实数 a 的取值范围是________.

【答案】$-\mathrm{e}\leq a<0$

【解析】

【分析】将不等式等价变形为 $xe^{x}\geq -a\ln x\cdot e^{-a\ln x}$，构造函数 $f(x)=xe^{x}$，进而问题转化成 $x\geq -a\ln x$，构造 $g(x)=-\dfrac{x}{\ln x}$，利用导数求解单调性进而得最值.

【详解】由 $xe^{x}+\dfrac{a\ln x}{x^{a}}\geq 0$ 可得 $xe^{x}\geq -\dfrac{a\ln x}{x^{a}}=-a\ln xe^{-a\ln x}$，

令 $f(x)=xe^{x}$，则 $f'(x)=(x+1)e^{x}>0\ (x>0)$，

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $a<0$，$x\in(1,+\infty)$，则 $-a\ln x>0$，

则 $f(x)\geq f(-a\ln x)$，可得 $x\geq -a\ln x$，

即 $a\geq -\dfrac{x}{\ln x}$ 对 $\forall x\in(1,+\infty)$ 恒成立，

令 $g(x)=\dfrac{x}{\ln x},x>1$，则 $g'(x)=\dfrac{\ln x-1}{\ln^{2}x}$，

由 $g'(x)=0$ 可得 $x=\mathrm{e}$，故当 $1<x<\mathrm{e}$ 时，$g'(x)<0$，当 $\mathrm{e}<x$ 时，$g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(1,\mathrm{e})$ 上单调递减，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x)_{\min}=g(\mathrm{e})=\mathrm{e}$，得 $a\geq(-\dfrac{x}{\ln x})_{\max}=-\mathrm{e}$.

故答案为：$-\mathrm{e}\leq a<0$.

【点睛】关键点睛：本题将不等式 $xe^{x}+\dfrac{a\ln x}{x^{a}}\geq 0$ 变形为 $xe^{x}\geq -\dfrac{a\ln x}{x^{a}}=-a\ln xe^{-a\ln x}$ 是解题的关键，这样就可以构造函数利用单调性求解.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，对于 $\forall x$，$y\in(0,+\infty)$，$f(xy)=f(x)+f(y)$，且当 $x>1$ 时，$f(x)<0$.

（1）证明：$f(x)$ 为减函数；

（2）若 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$，求不等式 $f(x)+f(x-1)+2>0$ 的解集.

【答案】（1）证明见解析

（2）$(1,2)$

【解析】

【分析】(1)根据函数单调性的定义及当函数中 $x>1$ 时，$f(x)<0$ 的性质即可证明;

(2)由抽象函数的性质化简，结合函数单调性及定义域列出不等式组可得解.

【小问1详解】

设 $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

则 $\frac{x_2}{x_1}>1$，$f(\frac{x_2}{x_1})<0$，

因为 $f(x_2)-f(x_1)=f(\frac{x_2}{x_1}\cdot x_1)-f(x_1)=f(\frac{x_2}{x_1})<0$，

所以 $f(x_2)<f(x_1)$，

即 $f(x)$ 为减函数.

【小问2详解】

因为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$，

所以 $f(x)+f(x-1)+2=f(x)+f(x-1)+f(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x)>0$，

令 $x=y=1$，则 $f(1)=f(1)+f(1)$，即 $f(1)=0$，

所以 $f\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x\right)>f\left(1\right)$，

又因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $\begin{cases}x>0\\x-1>0\\0<\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x<1\end{cases}$，解得 $1<x<2$，

所以不等式的解集为 $(1,2)$.

18. 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=2$，$a_{n+1}^2=a_n\left(a_{n+1}+2a_n\right)$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)若 $b_n=1+a_n\cdot\sin\frac{n\pi}{2}\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，记数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求 T_{2024}.

【答案】(1) 2^n

（2）$T_{2024}=2024-\frac{2\times16^{506}-2}{5}$

【解析】

【分析】（1）根据 $a_{n+1}^2=a_n\left(a_{n+1}+2a_n\right)$，两边同除 a_n^2 从而得到 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$，则得到其通项；

（2）根据正弦型函数的周期性，再进行分组求和，最后利用等比数列前 n 项和公式即可.

【小问 1 详解】

因为 $\left\{a_n\right\}$ 各项为正数，$a_{n+1}^2=a_n\left(a_{n+1}+2a_n\right)$，

所以上式两边同时除以 a_n^2，得 $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2=\frac{a_{n+1}}{a_n}+2$，

令 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=x\left(x>0\right)$，则 $x^2=x+2$，即 $x^2-x-2=0$，解得 $x=2$（负值舍去），

所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$，又 $a_1=2$，

所以 $\left\{a_n\right\}$ 是以 $a_1=2$，$q=2$ 的等比数列，

故 $a_n=2\times2^{n-1}=2^n$.

【小问 2 详解】

$b_n=1+2^n\cdot\sin\frac{n\pi}{2}\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，

当 $n=1$ 时，$\sin\frac{\pi}{2}=1$，当 $n=2$ 时，$\sin\frac{2\pi}{2}=0$，当 $n=3$ 时，$\sin\frac{3\pi}{2}=-1$，

当 $n=4$ 时，$\sin\frac{4\pi}{2}=0$，根据三角函数周期性知 $\sin\frac{n\pi}{2}$ 的周期为 4，

则 $T_{2024}=b_1+b_2+\cdots+b_{2024}=2024+2^1-2^3+\cdots+2^{2021}-2^{2023}$

$=2024+2^1-2^3+\cdots+2^{2021}-2^{2023}$

$=2024+\left(2^1+2^5+\cdots+2^{2021}\right)-\left(2^3+2^7+\cdots+2^{2023}\right)$

$=2024+\frac{2\left(1-16^{506}\right)}{1-16}-\frac{8\left(1-16^{506}\right)}{1-16}$

$=2024+\frac{2\left(16^{506}-1\right)}{15}-\frac{8\left(16^{506}-1\right)}{15}=2024-\frac{2\times16^{506}-2}{5}$

19. 吉林省从 2021 年开始，高考取消文理分科，实行“3+1+2”的模式，其中的“1”表示每位学生必须从物

理、历史中选择且只能选择一个科目．某校高一年级有 2000 名学生（其中女生 900 人），该校为了解高一年级学生对物理、历史的选科情况，采用比例分配的分层抽样的方法抽取了 200 名学生进行问卷调查，其中选择历史的男生有 40 人，选择物理的女生有 30 人．

（1）利用以上信息完成下面的2×2列联表，根据小概率值$\alpha=0.005$的独立性检验，能否认为学生性别与选择科目有关？

性别	选择物理	选择历史	总计
男生			
女生			
总计			

（2）某个外语学习小组共有 7 人，其中有 3 人选择了历史，4 人选择了物理，随机抽取 4 人进行对话练习，用X表示抽中的 4 人中，选择历史的同学人数，求X的分布列及期望．

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$

α	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

【答案】（1）列联表见解析；能认为学生性别与选择科目有关

（2）分布列见解析；$E(X)=\dfrac{12}{7}$

【解析】

【分析】（1）根据分层抽样得到抽取男生和女生的人数，进而得到列联表，求出χ^2的值比较即可；

（2）根据排列组合的知识求出X各值时的概率即可，写出分布列，求出期望即可．

【小问 1 详解】

根据采用比例分配的分层抽样得其中抽取男生的人数为$200\times\dfrac{1100}{2000}=110$人，则抽取女生人数为$90$人，

则列联表如下：

性别	选择物理	选择历史	总计

男生	70	40	110
女生	30	60	90
总计	100	100	200

则 $\chi^2=\dfrac{200\times(70\times60-40\times30)^2}{100\times100\times110\times90}\approx18.18>7.879$，

$\therefore$能认为学生性别与选择科目有关；

【小问 2 详解】

X 可能取值为0，1，2，3，

$P(X=0)=\dfrac{C_3^0C_4^4}{C_7^4}=\dfrac{1}{35},P(X=1)=\dfrac{C_3^1C_4^3}{C_7^4}=\dfrac{12}{35}$，

$P(X=2)=\dfrac{C_3^2C_4^2}{C_7^4}=\dfrac{18}{35},P(X=3)=\dfrac{C_3^3C_4^1}{C_7^4}=\dfrac{4}{35}$，

则 X 的分布列如：

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{35}$	$\dfrac{12}{35}$	$\dfrac{18}{35}$	$\dfrac{4}{35}$

$\therefore E(X)=0\times\dfrac{1}{35}+1\times\dfrac{12}{35}+2\times\dfrac{18}{35}+3\times\dfrac{4}{35}=\dfrac{12}{7}$.

20. 长方形 $ABCD$ 中，$AB=2AD=2\sqrt{2}$，点 E 为 CD 中点（如图 1），将点 D 绕 AE 旋转至点 P 处，使平面 $PAE\perp$平面 $ABCE$（如图 2）.

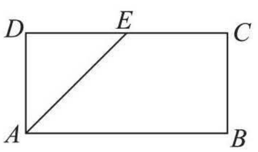


图1

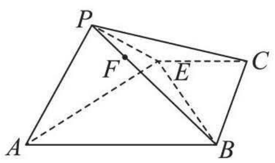


图2

（1）求证：$PA\perp PB$；

（2）点 F 在线段 PB 上，当二面角 $F-AE-P$ 大小为$\dfrac{\pi}{4}$时，求四棱锥 $F-ABCE$ 的体积.

【答案】（1）证明见详解

（2）$\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】（1）由已知条件，先证明$BE \perp AE$，再利用平面$PAE \perp$平面$ABCE$，可证$BE \perp$平面PAE，得到$PA \perp BE$，又$PA \perp PE$，可得$PA \perp$平面PBE，从而可证$PA \perp PB$；

（2）由题意，建立空间直角坐标系，由向量法求出平面FAE和平面PAE的法向量，进而求出F点坐标，确定F点位置，求出四棱锥$F-ABCE$的体积.

【小问1详解】

证明：在长方形$ABCD$中，$AB=2AD=2\sqrt{2}$，E为CD中点，

$\therefore AE=BE=2$，

$\therefore AE \perp BE$，

$\because$平面$PAE \perp$平面$ABCE$，平面$PAE \cap$平面$ABCE=AE$，

$BE \subset$平面$ABCE$，

$\therefore BE \perp$平面PAE，$AP \subset$平面PAE，

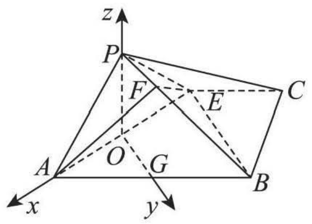
$\therefore BE \perp PA$，又$PA \perp PE$，$BE \subset$平面PBE，$PE \subset$平面PBE，

$PE \cap BE=E$，

$\therefore PA \perp$平面PBE，$PB \subset$平面PBE，

$\therefore PA \perp PB$.

【小问2详解】



如图，取AE的中点O，AB的中点G，连接OP,OG，

由题意可得OP,OG,OA两两互相垂直，

以O为坐标原点，以OA，OG，OP分别为x，y，z轴建立空间直角坐标系，

则$A(1,0,0)$，$E(-1,0,0)$，$B(-1,2,0)$，$P(0,0,1)$，

设$\overrightarrow{PF}=\lambda\overrightarrow{PB}$，则$F(-\lambda,2\lambda,1-\lambda)$，

设平面FAE的一个法向量为$\overrightarrow{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{AF}=0\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}-2x=0\\ (-\lambda-1)x+2\lambda y+(1-\lambda)z=0\end{cases}$，

令$y=1$，得$z=\dfrac{2\lambda}{\lambda-1}$，

$\therefore\overrightarrow{m}=\left(0,1,\dfrac{2\lambda}{\lambda-1}\right)$，

又$BE\perp$平面PAE，$\therefore\overrightarrow{n}=\overrightarrow{EB}=(0,2,0)$是平面$PAE$的一个法向量，

$\therefore\cos\left\langle\overrightarrow{m},\overrightarrow{n}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{m}\right|\left|\overrightarrow{n}\right|}=\dfrac{2}{2\times\sqrt{1+\dfrac{4\lambda^2}{\lambda^2-2\lambda+1}}}$，

令$\dfrac{2}{2\times\sqrt{1+\dfrac{4\lambda^2}{\lambda^2-2\lambda+1}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，解得$\lambda=\dfrac{1}{3}$或$\lambda=-1$（舍）.

即F为PB的靠近P的三等分点时，二面角$F-AE-P$的平面角为$\dfrac{\pi}{4}$，

$\because PO\perp$平面$ABCE$，且$PO=1$，

$\therefore F$到平面$ABCE$的距离为$\dfrac{2}{3}$，又四边形$ABCE$的面积为3，

$\therefore$四棱锥$F-ABCE$的体积$V_{F-ABCE}=\dfrac{1}{3}S_{ABCE}\cdot h=\dfrac{1}{3}\times3\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$.

21. 椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，过椭圆焦点并且垂直于长轴的弦长度为1.

（1）求椭圆C的标准方程；

(2)若直线l与椭圆C相交于A，B两点，与y轴相交于$M(0,m)$点，若存在实数m，使得$\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=4\overrightarrow{OM}$，求$m$的取值范围.

【答案】(1) $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

(2) $\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$

【解析】

【分析】(1) 根据椭圆离心率公式，结合椭圆垂直于长轴的弦长公式进行求解即可；

(2) 根据直线l是否存在斜率，结合平面向量的坐标运算公式、一元二次方程根与系数关系分类讨论进行

求解即可.

【小问 1 详解】

因为该椭圆的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以有$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{1}{4}(1)$，

在方程$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$中，令$x=\pm c$，解得$y^2=b^2\left(1-\dfrac{c^2}{a^2}\right)=\dfrac{b^4}{a^2}\Rightarrow y=\pm\dfrac{b^2}{a}$，

因为过椭圆焦点并且垂直于长轴的弦长度为 1，

所以有$\dfrac{b^2}{a}-\left(-\dfrac{b^2}{a}\right)=1(2)$，由$(1),(2)$可得：$\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$，

所以椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$；

【小问 2 详解】

当直线l不存在斜率时，由题意可知直线与椭圆有两个交点，与纵轴也有两个交点不符合题意；

当直线l存在斜率时，设为k，所以直线l的方程设为$y=kx+m$，

于是有$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\y=kx+m\end{cases}\Rightarrow\left(1+4k^2\right)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

因为该直线与椭圆有两个交点，所以一定有$\Delta=64k^2m^2-4\left(1+4k^2\right)\left(4m^2-4\right)>0$，

化简，得$4k^2-m^2+1>0$，

设$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，于是有$x_1+x_2=-\dfrac{8km}{1+4k^2},x_1x_2=\dfrac{4m^2-4}{1+4k^2}$，

因为$\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=4\overrightarrow{OM}$，

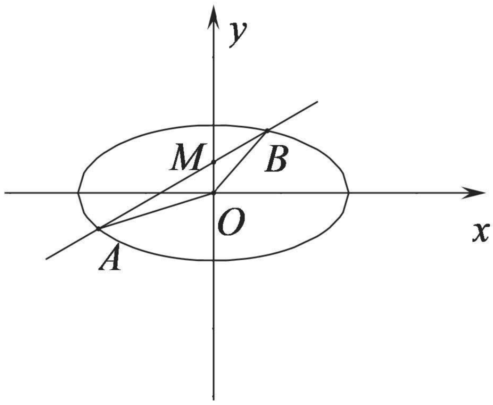
所以$\left(x_1,y_1\right)+3\left(x_2,y_2\right)=4(0,m)\Rightarrow x_1+3x_2=0\Rightarrow x_1=-3x_2$，

代入$x_1+x_2=-\dfrac{8km}{1+4k^2}$中，得$-3x_2+x_2=-\dfrac{8km}{1+4k^2}\Rightarrow x_2=\dfrac{4km}{1+4k^2}$，

于是有$\left(-3x_2\right)\cdot x_2=\dfrac{4m^2-4}{1+4k^2}\Rightarrow-3\left(\dfrac{4km}{1+4k^2}\right)^2=\dfrac{4m^2-4}{1+4k^2}$，

化简，得$k^2=\dfrac{m^2-1}{4-16m^2}$，代入$4k^2-m^2+1>0$中，得

$4\cdot\dfrac{m^2-1}{4-16m^2}-m^2+1>0\Rightarrow\dfrac{1}{4}<m^2<1\Rightarrow m\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$.



【点睛】关键点睛：本题的关键是由向量等式$\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=4\overrightarrow{OM}$得到$x_1=-3x_2$.

22. 已知函数$f(x)=\ln x-kx+1$.

（1）讨论函数$f(x)$的单调性；

（2）若函数$g(x)=\dfrac{e^x}{ax}$，求证：当$a\in\left(0,\dfrac{e^2}{2}\right]$时，$g(x)>f(x)+kx-1$.

【答案】（1）答案见解析

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）求导后，分别在$k\le 0$和$k>0$的情况下，由$f'(x)$正负确定$f(x)$单调性；

（2）通过分析法将所证不等式转化为$e^x>ax\ln x$；当$0<x\le 1$，由$e^x>0\ge ax\ln x$可知不等式成立；当$x>1$时，采用放缩法将所证不等式转化为$\dfrac{2e^{x-2}}{x}-\ln x>0$，构造函数$g(x)=\dfrac{2e^{x-2}}{x}-\ln x(x>1)$，利用导数，结合零点存在定理的知识，可求得$g(x)$单调性和最小值，由此可得结论.

【小问1详解】

由题意知：$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-k=\dfrac{1-kx}{x}$；

①当 $k\le 0$ 时，$f'(x)=\frac{1}{x}-k>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

\ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

②当 $k>0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得：$x=\frac{1}{k}$，

$\therefore$ 当 $x\in\left(0,\frac{1}{k}\right)$ 时，$f¢(x)>0$；当 $x\in\left(\frac{1}{k},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$；

\ $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{k}\right)$ 上单调递增；在 $\left(\frac{1}{k},+\infty\right)$ 上单调递减；

综上所述：当 $k\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；当 $k>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{k}\right)$ 上单调递增；在 $\left(\frac{1}{k},+\infty\right)$ 上单调递减.

【小问 2 详解】

要证 $g(x)>f(x)+kx-1$，只需证 $\frac{e^x}{ax}>\ln x$，

又 $a\in\left(0,\frac{e^2}{2}\right]$，$x\in(0,+\infty)$，则只需证 $e^x>ax\ln x$；

①当 $0<x\le 1$ 时，$e^x>1$，$ax\ln x\le 0$，$\therefore e^x>ax\ln x$ 恒成立；

②当 $x>1$ 时，$\because x\ln x>0$，$a\in\left(0,\frac{e^2}{2}\right]$，$\therefore ax\ln x\le\frac{e^2}{2}x\ln x$，

则只需证 $e^x>\frac{e^2}{2}x\ln x$，即证 $\frac{2e^{x-2}}{x}-\ln x>0$，

令 $g(x)=\frac{2e^{x-2}}{x}-\ln x\ (x>1)$，则 $g'(x)=\frac{2(x-1)e^{x-2}}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{2(x-1)e^{x-2}-x}{x^2}$，

令 $h(x)=2(x-1)e^{x-2}-x\ (x>1)$，则 $h'(x)=2xe^{x-2}-1$，

令 $m(x)=h'(x)$，则 $m'(x)=(2+2x)e^{x-2}>0$，

$\therefore m(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，即 $h'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

$\because h'(1)=\frac{2}{e}-1<0$，$h'(2)=4e^0-1=3>0$，

$\therefore\exists x_0\in(1,2)$，使得 $h'(x_0)=0$，且当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x_0)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h'(x_0)>0$；

$\therefore h(x)$在$(1,x_0)$上单调递减，在$(x_0,+\infty)$上单调递增，

又$h(1)=-1<0$，$\therefore h(x)_{\min}=h(x_0)<0$，又$h(2)=2-2=0$，

$\therefore$当$x\in(1,2)$时，$h(x)<0$，即$g'(x)<0$；当$x\in(2,+\infty)$时，$h(x)>0$，即$g'(x)>0$；

$\therefore g(x)$在$(1,2)$上单调递减，在$(2,+\infty)$上单调递增，

$\therefore g(x)\geq g(2)=\dfrac{2e^0}{2}-\ln 2=1-\ln 2>0$，即$\dfrac{2e^{x-2}}{x}-\ln x>0$；

综上所述：当$a\in\left(0,\dfrac{e^2}{2}\right]$时，$e^x>ax\ln x$恒成立，即$g(x)>f(x)+kx-1$.

【点睛】关键点点睛：本题考查讨论含参数函数的单调性、利用导数证明不等式的问题；本题证明不等式的关键是能够通过分析法将所证不等式进行转化，再利用放缩法去除变量a，将问题进一步转化为函数最值的求解问题.