

浙江省十校联盟 2023 届高三第三次联考

数学参考答案

1. 【答案】A

【解析】 $\because B = \{x | 3^x < 1\} = \{x | x < 0\}$, 因此, $A \cap B = \{-2, -1\}$.

2. 【答案】B

【解析】 $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{10}$

3. 【答案】B

【解析】图象过点 $(1, 0), (2, 0)$, $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$

4. 【答案】C

【解析】 $(\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 + 9 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
又 $|3\vec{a} - \vec{b}|^2 = 9\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} = 18$, 因此 $|3\vec{a} - \vec{b}| = 3\sqrt{2}$.

5. 【答案】D

【解析】 $n=1, T_1=2, T_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$, 则 $a_n = \frac{T_n}{T_{n-1}} (n \geq 2)$, 代入 $\frac{1}{T_n} + \frac{1}{a_n} = 1$,
化简得: $T_n - T_{n-1} = 1$, 则 $T_n = n+1, T_{10} = 11$, 故选 D.

6. 【答案】D

【解析】当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 时, $\omega x + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\omega + \frac{\pi}{4}\right)$,

$\because f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增, $\therefore \frac{\pi}{4}\omega + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$, 解得: $\omega \leq 1$, 即 $0 < \omega \leq 1$,

$\therefore \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} < \pi\omega + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2} < \left(\frac{\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4}\right) + \left(\pi\omega + \frac{\pi}{4}\right) \leq 2\pi$

则由 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi)$ 得: $\left(\frac{\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4}\right) + \left(\pi\omega + \frac{\pi}{4}\right) = \pi$, 解得: $\omega = \frac{1}{3}$.

当 $\omega = \frac{1}{3}$ 时, $f(x) = \sin\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{4}\right)$ 满足题目要求

7. 【答案】C

【解析】A 菜有 2 人选用有 C_3^2 种, 比如甲、乙选用了 A 菜,

①甲、乙之中有 1 人选用了 B 菜, 有 C_2^1 种, 比如甲用了 B 菜, 则乙从 C, D, E 中任意选用 1 种, 有 C_3^1 种, 丙从 C, D, E 中任意选用 2 种, 有 C_3^2 种, 故共有 $C_3^2 C_2^1 C_3^1 C_3^2 = 54$

②丙选用了 B 菜, 丙再从 C, D, E 中任意选用 1 种, 有 C_3^1 种, 甲、乙再从 C, D, E 中各任

意选用1种, 有 $C_3^1 C_3^1$ 种, 故共有 $C_3^2 C_3^1 C_3^1 C_3^1 = 81$

由①②可知所有情形是 $54 + 81 = 135$

8. 【答案】 A

【解析】 由 $f(2-x) + f(x) = 2$, $f(4-x) + f(x) = 4$, 知函数关于 $(1,1), (2,2)$ 点对称. $f(x)$ 为向上攀爬的类周期函数, $f(k) = k$, $f'(k + \frac{1}{2}) = f'(\frac{1}{2}) = 1$,

$$\text{所以 } \sum_{k=1}^{10} \left[f(k) + f'(k + \frac{1}{2}) \right] = (1 + 2 + \cdots + 10) + 10 = 65$$

9. 【答案】 AC

【解析】 对于 A, $f(x) = x^4 - 3$, 定义域为 $\mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^4 - 3 = x^4 - 3 = f(x)$

所以, $f(x)$ 为偶函数,

又 $f(1) = -2 < 0$, 故 A 正确

对于 B, $f(x) = 2^x - 2^{-x} > 0$ 为奇函数, 故 B 错误

对于 C, $f(x) = \log_2 |x|$, 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $f(-x) = \log_2 |-x| = \log_2 |x| = f(x)$,

所以, $f(x)$ 为偶函数,

又 $f(\frac{1}{2}) = -1 < 0$, 故 C 正确

对于 D, 因为 $f(x) = \cos x - 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上分区间单调, 故 D 错误

10. 【答案】 AD

【解析】 $P(X=k) = C_{1001}^k (\frac{1}{2})^{1001}$, 所以 A 对,

因为 $C_{1001}^k = C_{1001}^{1001-k}$, 所以 $P(X \leq 301) = P(X \geq 700)$, 所以 B 错

$$\text{因为 } \sum_{k=0}^{1001} P(X=k) = 1, \sum_{k=0}^{500} C_{1001}^k = \sum_{k=501}^{1001} C_{1001}^k = 2^{1000},$$

$$\text{所以 } \sum_{k=0}^{500} P(X=k) = \sum_{k=501}^{1001} P(X=k) = \frac{1}{2}, \quad P(X > E(X)) = \frac{1}{2}, \text{ 所以 C 错}$$

C_{1001}^k 先从 $k=0$ 递增到 $k=500$, 从 $k=501$ 递减到 $k=1001$,

$C_{1001}^{500} = C_{1001}^{501}$ 达到最大, 所以 $P(X=k)$ 最大时 $k=500$ 或 501 , D 对

11. 【答案】 BCD

【解析】 $|OM| = 3$, $|PF_2| = 6$, 所以 $|PF_1| = 4$, $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $8\sqrt{2}$, B 对

$|MF_1| = 2$, 过 O 作 $OH \perp MF_1$ 于 H , $|OH| = 2\sqrt{2}$, D 对

则 H 为 MF_1 中点, $k_{PF_1} = \tan \angle HFO = \frac{|OH|}{|HF_1|} = 2\sqrt{2}$, 故 C 对

设椭圆的上顶点为 B , $k_{BF_1} = \frac{4}{3} < k_{PF_1}$, 所以点 P 在第二象限, A 错

12. 【答案】 ACD

【解析】 $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2x_{3-2^1} = 2$, $x_4 = 2x_{4-2^1} = 2x_2 = 4$, $x_5 = 2x_{5-2^2} = 2x_1 = 2$

$x_6 = 2x_{6-2^2} = 2x_2 = 4$, $x_7 = 2x_{7-2^2} = 2x_3 = 4$, $x_8 = 2x_{8-2^2} = 2x_4 = 8 \dots$,

$$\begin{aligned}
 a_{2^n} &= 2a_{2^{n-1}} = \cdots = 2^{n-1}a_{2^1} = 2^{n-1} \times 2 = 2^n \\
 2023 &= 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 \\
 x_{2023} &= 2x_{2023-2^{10}} = 2x_{999} = 4x_{999-2^9} = 4x_{487} = 8x_{487-2^8} \\
 &= 8x_{231} = 16x_{103} = 32x_{39} = 64x_7 = 128x_3 = 256, \text{ 故 B 错} \\
 S_{2^1} &= 3, S_{2^2} = 3S_{2^1} = 9, \dots, \text{ 当 } 1 \leq k \leq 2^n \text{ 时, } S_{2^{n+1}} = S_{2^n+2^n} = S_{2^n} + 2S_{2^n} = 3S_{2^n}, \\
 \text{所以 } S_{2^n} &= S_{2^1} \cdot 3^{n-1} = 3^n, \text{ 故 C 对} \\
 \text{当 } 1 \leq k \leq 2^n \text{ 时, } S_{2^n-k} &= S_{2^n} + 2S_k \\
 S_{2^{10}+2^5+2^2} &= S_{2^{10}} + 2S_{2^5+2^2} = S_{2^{10}} + 2(S_{2^5} + 2S_{2^2}) = S_{2^{10}} + 2S_{2^5} + 2^2S_{2^2}, \text{ 故 D 对}
 \end{aligned}$$

13. 【答案】 -40

【解析】 $(1+x)\left(\frac{2}{x}-x\right)^5 = \left(\frac{2}{x}-x\right)^5 + x\left(\frac{2}{x}-x\right)^5$

$\left(\frac{2}{x}-x\right)^5$ 展开式通项 $T_{r+1} = C_5^r \left(\frac{2}{x}\right)^{5-r} (-x)^r = C_5^r 2^{5-r} (-1)^r x^{2r-5}$ 不含 x^2 项, 令 $r=3$,

得 $T_4 = C_5^3 2^2 (-1)^3 x = -40x$, $(1+x)\left(\frac{2}{x}-x\right)^5$ 展开式中 x^2 项为 $-40x^2$, 系数为 -40

14. 【答案】 $\frac{7}{16}$

【解析】 依题意得 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{3}{4}$, 所以 $P(AB) = \frac{3}{4}P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$

故 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{16}$, 所以 $P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A) = \frac{7}{16}$.

15. 【答案】 104

【解析】 以 E 为坐标原点, $\overrightarrow{EC}$ 为 x 轴正方向, 建立直角坐标系, 则 $B(-4,0), C(4,0)$,
 设 $A(x,y)$, 则 A 在圆 $(x-2)^2 + (y-\sqrt{5})^2 = 9$ 上,
 $AB^2 + AC^2 = (x+4)^2 + y^2 + (x-4)^2 + y^2 = 2(x^2 + y^2) + 32$
 $= 2|EA|^2 + 32 \leq 2 \times 6^2 + 32 = 104$
 法 2: $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, $AE^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})$,
 $\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 = 4\overrightarrow{AE}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AE}^2 - 2(\overrightarrow{AE}^2 - \overrightarrow{BE}^2) = 2\overrightarrow{AE}^2 + 2\overrightarrow{BE}^2$
 $\leq 2 \times 6^2 + 32 = 104$, 当且仅当 AE 为圆直径时等号成立.

16. 【答案】 $\frac{9}{2}\pi; \frac{2}{3}\pi$

【解析】 因为每组对棱棱长相等, 所以可以把三棱锥 $ABCD$ 放入长方体中, 设长宽高分别为 x, y, z , 则 $\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{2}$, $\sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{5}$, $\sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{5}$

则 $x=2$, $y=2$, $z=1$, 外接球半径 $2R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 3$, $R = \frac{3}{2}$

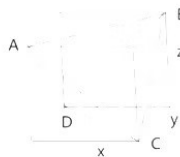
在三棱锥 $ABCD$ 的体积 $V = xyz - \frac{1}{6}xyz \times 4 = \frac{1}{3}xyz = \frac{4}{3}$

三棱锥 $ABCD$ 的每个面的三边分别为 $\sqrt{5}, \sqrt{5}, 2\sqrt{2}$,

每个面的面积为 $\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{表面积}} \times r, \text{ 所以 } r = \frac{3V}{S_{\text{表面积}}} = \frac{4}{4 \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

所以该三棱锥的外接球体积为 $\frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{9}{2} \pi$, 内切球表面积为 $4\pi r^2 = \frac{2}{3} \pi$.



17. 【答案】(1) $\hat{y} = 0.5x + 3.3$; (2) 7.8 万吨

【解析】

(1) 已知 $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6+7}{7} = 4$,1 分

$$\bar{y} = \frac{2.9+3.3+3.6+4.4+4.8+5.2+5.9}{7} = 5.3, \text{2 分}$$

$$\text{又 } \sum_{i=1}^7 x_i y_i = 162.4, \sum_{i=1}^7 x_i^2 = 140, \text{3 分}$$

$$\text{所以 } \hat{b} = \frac{162.4 \cdot 4 - 7 \times 4 \times 5.3}{140 - 7 \times 4^2} = 0.5, \text{5 分}$$

$$\text{则 } \hat{a} = 5.3 - 0.5 \times 4 = 3.3,$$

所以回归方程为 $\hat{y} = 0.5x + 3.3$;7 分

(2) 由回归方程可知, 过去七年中, 生活垃圾无害化处理量每年平均增长 0.5 万吨,

当 $x = 9$ 时, $y = 4.5 + 3.3 = 7.8$,

即 2024 年该地区生活垃圾无害化处理量约为 7.8 万吨.10 分

18. 【答案】(1) $\angle ADC = 120^\circ$; (2) $\frac{245}{12} \sqrt{3}$

【解析】

$$(1) \text{ 在 } \triangle ADC \text{ 中, } \cos \angle ADC = \frac{AD^2 + DC^2 - AC^2}{2AD \cdot DC} = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \times 3 \times 5} = -\frac{1}{2}, \text{2 分}$$

又 $0^\circ < \angle ADC < 180^\circ$

所以 $\angle ADC = 120^\circ$ 4 分

$$(2) \text{ 在 } \triangle ADC \text{ 中, } \frac{DC}{\sin \angle DAC} = \frac{AC}{\sin \angle ADC},$$

$$\text{则 } \sin \angle DAC = \frac{DC \sin \angle ADC}{AC} = \frac{3\sqrt{3}}{14} \text{5 分}$$

$$\text{因为 } \angle DAC = \angle ABC, \text{ 所以 } \sin \angle ABC = \frac{3\sqrt{3}}{14}$$

$$\text{在 } \triangle ABD \text{ 中, } \frac{AD}{\sin \angle ABC} = \frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{AB}{\sin \angle ADC},$$

$$AB = \frac{AD \sin \angle ADC}{\sin \angle ABC} = \frac{35}{3} \text{7 分}$$

$$\sin \angle BAD = \sin(\angle ABC + \angle ADB) = \sin(\angle ABC + 60^\circ)$$

$$= \sin \angle ABC \cos 60^\circ + \cos \angle ABC \sin 60^\circ = \frac{4\sqrt{3}}{7} \dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{在 } \triangle ABD \text{ 中, } \frac{AD}{\sin \angle ABC} = \frac{BD}{\sin \angle BAD}, \quad BD = \frac{AD \sin \angle BAD}{\sin \angle ABC} = \frac{40}{3}$$

$$\text{所以 } BC = BD + DC = \frac{49}{3} \dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{故 } \triangle ABC \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \times \frac{35}{3} \times \frac{49}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{14} = \frac{245}{12} \sqrt{3} \dots\dots 12 \text{ 分}$$

法 2: 因为 $\angle DAC = \angle ABC$, $\angle ACD = \angle ACB$, 所以 $\triangle ACD \sim \triangle BCA$,6 分

$$\text{所以 } \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{DC}, \text{ 则 } \frac{AB}{7} = \frac{5}{3}, \text{ 得 } AB = \frac{35}{3} \dots\dots 9 \text{ 分}$$

因为 $\angle ADC = 120^\circ$, 所以 $\angle BAC = 120^\circ$

$$\text{故 } \triangle ABC \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \times \frac{35}{3} \times 7 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{245}{12} \sqrt{3} \dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 【答案】(1) $q_n = \frac{n+1}{n}$, (2) 略

【解析】

$$(1) \text{ 由 } q_{n+1} = 2 - \frac{1}{q_n} \text{ 知 } q_{n+1} = \frac{2q_n - 1}{q_n}$$

$$\text{故 } \frac{1}{q_{n+1} - 1} = \frac{1}{\frac{2q_n - 1}{q_n} - 1} = \frac{q_n}{q_n - 1} = 1 + \frac{1}{q_n - 1}$$

$$\text{即 } \frac{1}{q_{n+1} - 1} - \frac{1}{q_n - 1} = 1, \text{ 数列 } \left\{ \frac{1}{q_n - 1} \right\} \text{ 成等差数列, } \dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \frac{1}{q_n - 1} = \frac{1}{q_1 - 1} + (n-1) \times 1 = n, \text{ 所以 } q_n = \frac{n+1}{n} \dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 } \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = q_n, \text{ 得 } \frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} = q_n^2 = \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{于是 } a_{2n+1} = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} \cdot \frac{a_{2n-1}}{a_{2n-3}} \cdots \frac{a_3}{a_1} \cdot a_1 = \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \cdot \left(\frac{n}{n-1} \right)^2 \cdots \left(\frac{2}{1} \right)^2 \cdot 1 = (n+1)^2$$

$$\text{所以 } a_{2n} = \frac{a_{2n+1}}{q_n} = n(n+1), \dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{2n-1}} + \frac{1}{a_{2n}} &= \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{2n-1}} \right) + \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4} + \cdots + \frac{1}{a_{2n}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right) + \left(\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right) \\ &< \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} \right) + \left(\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right) \end{aligned}$$

$$= 2 - \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n+1} = 3 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

所 以

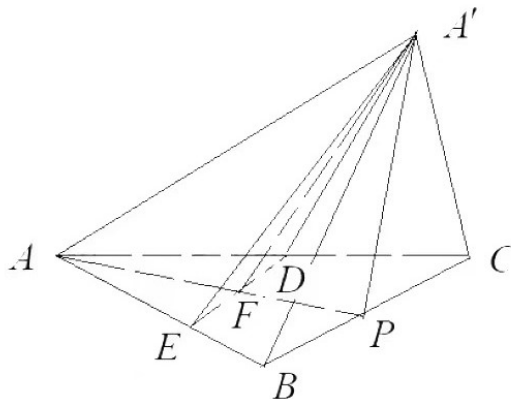
$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{2n-1}} + \frac{1}{a_{2n}} < 3 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \dots\dots 12$$

分

20. 【答案】(1) 略; (2) $\frac{2\sqrt{290}}{145}$

【解析】

- (1) 因为 $AD = AE = A'D = A'E = 2$,
 所以 $\triangle ADE, \triangle A'DE$ 都是等腰三角形
 因为 $AP \perp DE$ 于 F , 所以 F 为 DE 的中点
 则 $DE \perp AF, DE \perp A'F$ 2 分
 所以 $DE \perp$ 平面 $AA'P$
 又 $DE \subset$ 平面 $A'DE$
 所以平面 $AA'P \perp$ 平面 $A'DE$ 5 分



- (2) 因为 $BE = 1, BC = 5$, 所以 $AB = 3, AC = 4, BC = 5$

$$\text{所以 } \cos \angle BAC = \frac{3^2 + 4^2 - 5^2}{2 \times 3 \times 4} = 0, \quad \angle BAC = 90^\circ$$

$$DE = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

由 (1) 知 $\angle A'FP$ 为二面角 $A'-DE-P$ 的平面角

$$\text{所以 } \cos \angle A'FP = \frac{3}{5}, \sin \angle A'FP = \frac{4}{5}$$

如图建立空间直角坐标系

$$\text{由 } A'F = \sqrt{2}, \text{ 知 } A'(0, \frac{3}{5}\sqrt{2}, \frac{4}{5}\sqrt{2}) \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$x_B = \sqrt{2} + BE \cos \angle AED = \frac{3}{2}\sqrt{2}, \quad y_B = BE \sin \angle AED = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{所以 } B \text{ 点坐标为 } B(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

设 $A'DE$ 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$, $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{FE} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{FA'} = 0 \end{cases}$,

所以 $\begin{cases} x = 0 \\ \frac{3\sqrt{2}}{5}y + \frac{4\sqrt{2}}{5}z = 0 \end{cases}$, 令 $z = -3$, 则 $y = 4$

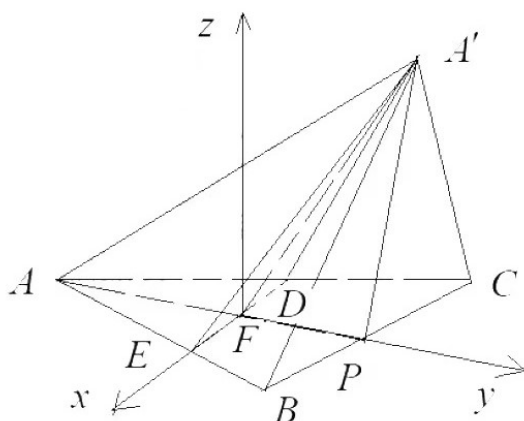
所以 $\vec{n} = (0, 4, -3)$ 10 分

又 $\vec{BA'} = (-\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{4\sqrt{2}}{5})$

设直线 $A'B$ 与平面 $A'DE$ 所成角为 θ

$$\sin \theta = |\cos \langle \vec{BA'}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{BA'} \cdot \vec{n}|}{|\vec{BA'}| |\vec{n}|} = \frac{2\sqrt{290}}{145}$$

所以直线 $A'B$ 与平面 $A'DE$ 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{290}}{145}$ 12 分



21. 【答案】(1) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$; (2) (i) 1 (ii) 略

【解析】

(1) 因为 F 到其中一条渐近线的距离 b , 所以 $b = 2$ 1 分

又 $a^2 + b^2 = 9$, 所以 $a = 5$ 2 分

所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ 3 分

(2) 设 AB 直线方程为 $x = my + 3$, 则 $y_M = -\frac{4}{3m}$

代入双曲线方程得: $(4m^2 - 5)y^2 + 24my + 16 = 0$ 。

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = \frac{-24m}{4m^2 - 5}$, $y_1 y_2 = \frac{16}{4m^2 - 5}$ 4 分

$$(i) \frac{|AF| \cdot |BM|}{|AM| \cdot |BF|} = \frac{|y_1| \cdot |y_2 - y_M|}{|y_M - y_1| \cdot |y_2|} = \frac{|y_1 y_2 - y_1 y_M|}{|y_2 y_M - y_2 y_1|}$$

$$\text{而 } (y_1 y_2 - y_1 y_M) - (y_2 y_M - y_2 y_1) = 2y_1 y_2 - y_M(y_1 + y_2)$$

$$= \frac{32}{4m^2 - 5} - \frac{-24m}{4m^2 - 5} \cdot \left(-\frac{4}{3m}\right) = 0$$

$$\text{所以 } y_1 y_2 - y_1 y_M = y_2 y_M - y_2 y_1, \text{ 则 } |y_1 y_2 - y_1 y_M| = |y_2 y_M - y_2 y_1|$$

$$\text{所以 } \frac{|AF| \cdot |BM|}{|AM| \cdot |BF|} = 1 \dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$(ii) \text{ 过 } M \text{ 平行于 } OA \text{ 的直线方程为 } y + \frac{4}{3m} = \frac{y_1}{my_1 + 3} \left(x - \frac{5}{3}\right)$$

$$\text{直线 } OB \text{ 方程为 } y = \frac{y_2}{my_2 + 3}x \text{ 与 } y + \frac{4}{3m} = \frac{y_1}{my_1 + 3} \left(x - \frac{5}{3}\right) \text{ 联立}$$

$$\text{得 } y + \frac{4}{3m} = \frac{y_1}{my_1 + 3} \left(\frac{my_2 + 3}{y_2}y - \frac{5}{3}\right),$$

$$\text{即 } y_2(my_1 + 3)y + \frac{4}{3m}(my_1 + 3)y_2 = y_1(my_2 + 3)y - \frac{5}{3}y_1 y_2$$

$$\text{则 } 3(y_2 - y_1)y = -3y_1 y_2 - \frac{4}{m}y_2$$

$$\text{所以 } y_p = \frac{-3y_1 y_2 - \frac{4}{m}y_2}{3(y_2 - y_1)} \dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{由 } y_1 + y_2 = \frac{-24m}{4m^2 - 5}, y_1 y_2 = \frac{16}{4m^2 - 5} \text{ 两式相除得}$$

$$\frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2} = \frac{2}{-3m}, \text{ 则 } y_1 y_2 = -\frac{2}{3m}(y_1 + y_2)$$

$$\text{所以 } y_p = \frac{-3y_1 y_2 - \frac{4}{m}y_2}{3(y_2 - y_1)} = \frac{\frac{2}{m}(y_1 + y_2) - \frac{4}{m}y_2}{3(y_2 - y_1)} = \frac{\frac{2}{m}(y_1 - y_2)}{3(y_2 - y_1)} = -\frac{2}{3m} \dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } y_Q = 0, \text{ 所以 } y_p = \frac{y_M + y_Q}{2},$$

$$\text{故 } P \text{ 为线段 } MQ \text{ 的中点, 所以 } |MP| = |PQ|. \dots\dots 12 \text{ 分}$$

22. 【答案】(1) 单调递减区间为 $(0, a-1)$, 单调递增区间为 $(a-1, +\infty)$

$$f(x) \text{ 的极小值 } f(a-1) = -1 - (a-1) \ln \frac{a-1}{a}, \text{ 无极大值}$$

(2) 略

【解析】

$$(1) \text{ 因为 } f(x) = x - a - (a-1) \ln \frac{x}{a}, x > 0$$

$$\text{所以 } f'(x) = 1 - \frac{a-1}{x} = \frac{x - (a-1)}{x}, \dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{当 } 0 < x < a-1 \text{ 时, } g'(x) < 0; \text{ 当 } x > a-1 \text{ 时, } g'(x) > 0$$

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, a-1)$, 单调递增区间为 $(a-1, +\infty)$

故 $f(x)$ 有极小值 $f(a-1) = -1 - (a-1)\ln \frac{a-1}{a}$, 无极大值.....5 分

(2) 因为当 $x > 0$ 时, $\ln x > 1 - \frac{1}{x}$,

所以 $\ln \frac{a-1}{a} > 1 - \frac{a}{a-1}$,

所以 $f(a-1) = -1 - (a-1)\ln \frac{a-1}{a} < -1 - (a-1)(1 - \frac{a}{a-1}) = 0$

又 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$

所以 $f(x)$ 有两个零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 6 分

法 1: 下面证明 $f(a-2) > 0, f(a-2 + \frac{1}{a}) < 0$

$f(a-2) = -2 - (a-1)\ln \frac{a-2}{a} > 0 \Leftrightarrow \ln \frac{a-2}{a} + \frac{2}{a-1} < 0$

设 $g(a) = \ln \frac{a-2}{a} + \frac{2}{a-1}$,

则 $g'(a) = \frac{a}{a-2} \left(\frac{a-2}{a} \right)' - \frac{2}{(a-1)^2} = \frac{2}{a^2 - 2a} - \frac{2}{(a-1)^2} > 0$

所以 $g(a) = \ln \frac{a-2}{a} + \frac{2}{a-1}$ 在 $(2, +\infty)$ 上递增

又 $a \rightarrow +\infty$ 时, $g(a) = \ln \frac{a-2}{a} + \frac{2}{a-1} \rightarrow 0$,

所以 $g(a) = \ln \frac{a-2}{a} + \frac{2}{a-1} < 0$ 对 $a > 2$ 成立

所以 $f(a-2) > 0$ 得证.....8 分

$f(a-2 + \frac{1}{a}) = -2 + \frac{1}{a} - (a-1)\ln \frac{a-2 + \frac{1}{a}}{a} < 0 \Leftrightarrow \ln \frac{a-2 + \frac{1}{a}}{a} > \frac{-2 + \frac{1}{a}}{a-1}$

$\Leftrightarrow \ln \left(1 - \frac{1}{a} \right) > \frac{-2 + \frac{1}{a}}{a-1}$

令 $1 - \frac{1}{a} = x$, 则 $\frac{1}{a} = 1 - x$, $a = \frac{1}{1-x} > 2$, $\frac{1}{2} < x < 1$

$\Leftrightarrow \ln x^2 > x - \frac{1}{x} \Leftrightarrow 2\ln x > x - \frac{1}{x}$

设 $h(x) = 2\ln x - x + \frac{1}{x}, \frac{1}{2} < x < 1$

则 $h'(x) = \frac{2}{x} - 1 - \frac{1}{x^2} = -(1 - \frac{1}{x})^2 < 0$

所以 $h(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 上递减,

所以 $h(x) > h(1) = 0$,

所以 $2\ln x > x - \frac{1}{x}$

所以 $f(a-2+\frac{1}{a}) < 0$ 得证.....10 分

因为函数 $f(x)$ 区间 $(0, a-1)$ 单调递减

又 $f(a-2) > 0, f(a-2+\frac{1}{a}) < 0, f(x_1) = 0, a-2, x_1, a-2+\frac{1}{a} \in (0, a-1)$

所以 $a-2 < x_1 < a-2+\frac{1}{a}$ 12 分

法 2: 下面证明当 $0 < x < 1$ 时, $\frac{x-1}{\sqrt{x}} < \ln x < \frac{2(x-1)}{x+1}$

设 $g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}} - \ln x, 0 < x < 1$

$$g'(x) = \frac{\sqrt{x} - (x-1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} - \frac{1}{x} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}} > 0$$

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增,

所以 $g(x) < g(1) = 0$, 所以 $\frac{x-1}{\sqrt{x}} < \ln x$ 8 分

再设 $h(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}, 0 < x < 1$

$$h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2(x+1) - 2(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} > 0$$

所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增,

所以 $h(x) < h(1) = 0$, 所以 $\ln x < \frac{2(x-1)}{x+1}$

综上, 当 $0 < x < 1$ 时, $\frac{x-1}{\sqrt{x}} < \ln x < \frac{2(x-1)}{x+1}$ 10 分

现有 $0 < \frac{x_1}{a} < 1$, 所以 $\frac{\frac{x_1}{a}-1}{\sqrt{\frac{x_1}{a}}} < \ln \frac{x_1}{a} < \frac{2(\frac{x_1}{a}-1)}{\frac{x_1}{a}+1}$

故 $0 = f(x_1) = x_1 - a - (a-1) \ln \frac{x_1}{a} > x_1 - a - (a-1) \frac{2(\frac{x_1}{a}-1)}{\frac{x_1}{a}+1}$ 得 $x_1 > a-2$

故 $0 = f(x_1) = x_1 - a - (a-1) \ln \frac{x_1}{a} < x_1 - a - (a-1) \frac{\frac{x_1}{a}-1}{\sqrt{\frac{x_1}{a}}}$ 得 $x_1 < a-2+\frac{1}{a}$

所以 $a-2 < x_1 < a-2+\frac{1}{a}$ 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线