山西大学附中高三月考数学试题 2023. 3. 9

一、单选题

1．i是虚数单位，$z=1-i$，则复数z的模等于（　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

【答案】B

【分析】根据复数的几何意义直接求出复数的模.

【详解】由$z=1-i$，

所以$|z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

故选：B

2.已知集合$A=\{y|y=2^x,x\in R\}$，$B=\{x|x^2\le 4\}$，则$A\cap B=$（　）

A．$[-2,2]$　　B．$[-2,0)$　　C．$[0,2]$　　D．$(0,2]$

【答案】D

【分析】首先解一元二次不等式求出集合B，再根据指数函数的性质求出集合A，最后根据交集的定义计算可得；

【详解】解：由$x^2\le 4$，即$(x-2)(x+2)\le 0$，解得$-2\le x\le 2$，所以$B=\{x|x^2\le 4\}=\{x|-2\le x\le 2\}$，又$A=\{y|y=2^x,x\in R\}=(0,+\infty)$，所以$A\cap B=(0,2]$.

故选：D

3.已知$a,b\in R$，则$a<b$是$a^2(e^a-e^b)<0$的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

【分析】根据充分条件和必要条件的定义进行判断即可.

【解答】解：由$a<b$，当$a=0$时，不能够推出a^2（e^a-e^b）<0，

故$a<b$是a^2（e^a-e^b）<0的不充分条件，

由a^2（e^a-e^b）$<0\Rightarrow e^a-e^b<0\Rightarrow e^a<e^b\Rightarrow a<b$，

故$a<b$是a^2（e^a-e^b）<0的必要条件，

综上所述：$a<b$是a^2（e^a-e^b）<0的必要不充分条件.

故选：B.

4.在下列区间中，函数$f(x)=2022\cos(x-\frac{\pi}{12})$单调递增的区间是（　　）

A．$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$　B．$\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ C．$\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ D．$\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$

解：因为f（x）$=2022\cos$（$x-\frac{\pi}{12}$），令$-\pi+2k\pi\le x-\frac{\pi}{12}\le 2k\pi$，$k\in Z$，

解得$-\frac{11}{12}\pi+2k\pi\le x\le\frac{\pi}{12}+2k\pi$，$k\in Z$，

所以函数的单调递增区间为$[-\frac{11}{12}\pi+2k\pi,\ \frac{\pi}{12}+2k\pi]$，$k\in Z$，

当 $k=1$ 时可得函数的一个单调递增区间为$[\frac{13\pi}{12}，\frac{25\pi}{12}]$，

因为 $(\frac{3\pi}{2}，2\pi)\subseteq[\frac{13\pi}{12}，\frac{25\pi}{12}]$，所以函数在 $(\frac{3\pi}{2}，2\pi)$ 上单调递增.

故选：D.

5.已知双曲线$C:\frac{x^2}{k}-\frac{y^2}{16}=1(k>0)$，若对任意实数$m$，直线$4x+3y+m=0$与$C$至多有一个交点，则$C$的离心率为（　）

A. $\frac{5}{4}$　　B. $\frac{5}{3}$　　C. $\frac{4}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{97}}{9}$

【答案】B

【分析】根据直线$4x+3y+m=0$与双曲线的渐近线$y=-\frac{4}{\sqrt{k}}x$的关系求得k，从而求得c，以及双曲线的离心率.

【详解】依题意可知直线$4x+3y+m=0$与双曲线C的渐近线$y=-\frac{4}{\sqrt{k}}x$平行或重合，则$\frac{4}{\sqrt{k}}=\frac{4}{3}$，

即$k=9$，$a=3$，从而$c=\sqrt{9+16}=5$，所以C的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$.

故选：B

6.考察下列两个问题：①已知随机变量$X\sim B(n,p)$，且$E(X)=4$，$D(X)=2$，记$P(X=1)=a$；②甲、乙、丙三人随机到某3个景点去旅游，每人只去一个景点，设A表示"甲、乙、丙所去的景点互不相同"，B表示"有一个景点仅甲一人去旅游"，记$P(A|B)=b$，则（　）

A. $a=b^3$　　B. $a=b^4$　　C. $a=b^5$　　D. $a=b^6$

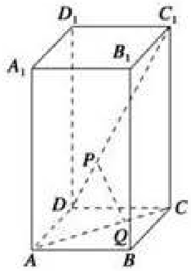
【分析】根据二项分布的期望公式和方差公式求出n，从而可求得a，再根据条件概率公式求得b，即可求出答案.

解：由$\begin{cases}E(X)=np=4\\D(X)=np(1-p)=2\end{cases}$，解得$p=\frac{1}{2}$，$n=8$，

$\therefore a=P(X=1)=C_8^1\cdot(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^7=\frac{8}{2^8}=\frac{1}{2^5}$，

$b=P(A|B)=\frac{n(AB)}{n(B)}=\frac{A_3^3}{C_3^1\times2^2}=\frac{1}{2}$，$\therefore a=b^5$．故选：$C$.

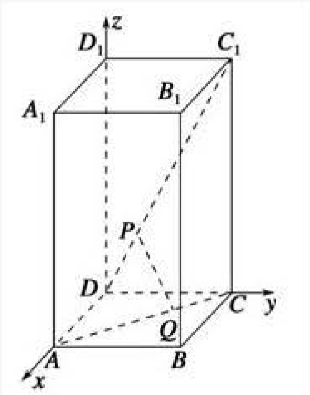
7.如图，在正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AA_1=2$，$AB=BC=1$，动点P，Q分别在线段C_1D，AC上，则线段PQ长度的最小值是(　　).



A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

【答案】C

【详解】建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$，$C(0,1,0)$，$C_1(0,1,2)$，设点 P 的坐标为 $(0,\lambda,2\lambda)$，$\lambda\in[0,1]$，点 Q 的坐标为 $(1-\mu,\mu,0)$，$\mu\in[0,1]$，

$\therefore PQ=\sqrt{(1-\mu)^2+(\lambda-\mu)^2+4\lambda^2}=\sqrt{2\mu^2+5\lambda^2-2\lambda\mu-2\mu+1}$

$=\sqrt{5(\lambda-\frac{1}{5}\mu)^2+\frac{9}{5}(\mu-\frac{5}{9})^2+\frac{4}{9}}$，当且仅当 $\lambda=\frac{1}{9}$，$\mu=\frac{5}{9}$ 时，线段 PQ 的长度取得最小值 $\frac{2}{3}$.

8. 已知 $a=\frac{3}{2\pi}$，$b=\sin\frac{1}{2}$，$c=\frac{9}{4\pi^2}$，则（　　）

A. $c<b<a$　　B. $a<b<c$　　C. $a<c<b$　　D. $c<a<b$

【分析】先判断 $0<a<\frac{1}{2}$，得出 $0<c<a$，再构造函数，判断 b 与 a 的大小.

解：因为 $a=\frac{3}{2\pi}<\frac{1}{2}$，且 $a>0$，所以 $0<a<\frac{1}{2}$，

又因为 $c=\frac{9}{4\pi^2}=a^2$，所以 $0<c<a$；

设 $f(x)=\sin x$，$g(x)=\frac{3}{\pi}x$，$x=\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，$g(x)=\frac{3}{\pi}\times\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，

所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 交于点 $(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2})$ 和原点，

又因为 $x\in(0,\frac{\pi}{6})$ 时，$\sin x>\frac{3}{\pi}x$，且 $\frac{1}{2}\in(0,\frac{\pi}{6})$，

所以 $f(\frac{1}{2})>g(\frac{1}{2})$，即 $\sin\frac{1}{2}>\frac{3}{2\pi}$，所以 $b>a$；

所以 $c<a<b$.

故选：D.

9.小明用某款手机性能测试APP对10部不同品牌的手机的某项性能进行测试，所得的分数按从小到大的顺序（相等数据相邻排列）排列为：81，84，84，87，x，y，93，96，96，99，已知总体的中位数为90，则（　）全科试题免费下载公众号《高中僧课堂》

A．$x+y=180$

B．该组数据的均值一定为 90

C．该组数据的众数一定为 84 和 96

D．若要使该总体的标准差最小，则 $x=y=90$

【答案】ABD

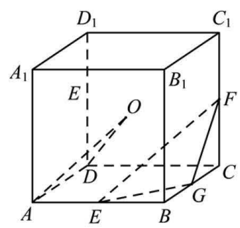
【分析】依题意可得 $x+y=180$，即可求出平均数，即可判断 A、B，再利用特殊值判断 C，利用基本不等式判断 D；

解：因为总体的中位数为 90，所以 $x+y=180$，所以该组数据的均值为

$\frac{1}{10}(81+84+84+87+x+y+93+96+96+99)=90$，故 A 正确，B 正确，当 $x=y=90$ 时，众数为 84，90，96，当 $x=87$，$y=93$ 时，众数为 84，87，93，96，故 C 错误；要使该总体的标准差最小，即方差最小，

即 $(x-90)^2+(y-90)^2$ 最小，又 $(x-90)^2+(y-90)^2\geq\frac{(x+y-180)^2}{2}=0$，当且仅当 $x-90=y-90$ 时，即 $x=y=90$ 时等号成立，故 D 正确．故选：ABD

10．如图，棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的内切球球心为 O，E、F 分别是棱 AB、CC_1 的中点，G 在棱 BC 上移动，则（　）



A．对于任意点 G，$OA//$ 平面 EFG

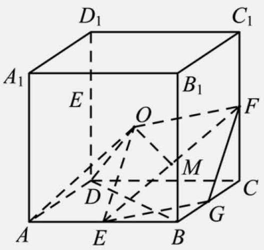
B．存在点 G，使 $OD\perp$ 平面 EFG

C．直线 EF 的被球 O 截得的弦长为 $\sqrt{3}$

D．过直线 EF 的平面截球 O 所得截面圆面积的最小值为 $\frac{\pi}{2}$

【答案】BD

【分析】A 选项，举出反例；B 选项，取 G 为 BC 的中点时，证明 $OD\perp$ 平面 EFG；C 选项，求出球心到 EF 的距离，利用垂径定理求解；D 选项，结合 C 选项中的求解得到球心 O 到截面的距离 $d\leq OM=\frac{\sqrt{2}}{2}$，从而求出截面面积最小值.



【详解】

正方体内切球的球心O即正方体的中心，且球半径$R=1$，

当G与B重合时，$A\in$平面EFB，$O\notin$平面EFB，此时直线OA与平面EFG相交，A 错误；

当G为BC的中点时，$EG\perp BD$，$EG\perp BB_1$，$BD\cap BB_1=B$，则$EG\perp$平面BB_1D_1D，因为$B_1D\subset$平面BB_1D_1D，

所以$EG\perp B_1D$；同理，$FG\perp B_1D$，因为$EG\cap FG=G$，所以$B_1D\perp$平面EFG，即$OD\perp$平面EFG，B 正确；

取EF的中点M，由对称性可知，$OE=OF$，则$OM\perp EF$.

因为$OE=\sqrt{2}$，$EM=\frac{1}{2}EF=\frac{1}{2}\sqrt{EC^2+FC^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，则$OM=\sqrt{OE^2-EM^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以直线EF的被球O截得的弦长为$2\sqrt{R^2-OM^2}=2\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$，C 错误；

设截面圆半径为r，球心O到截面的距离为d，则$r^2+d^2=R^2=1$.

因为$d\le OM=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则$r^2=1-d^2\ge\frac{1}{2}$，所以截面圆面积$S=\pi r^2\ge\frac{\pi}{2}$，D 正确，故选：BD.

11.将函数$g(x)=\frac{1}{2^{|\omega x-\varphi|}}A\sin\omega x(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的图象向左平移$\frac{\varphi}{\omega}$ 个单位后得到函数$y=f(x)$的图象，若对$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(1-x)=f(x-1)$，且$f(-1)=f(3)=0$，则ω的可能取值为（　）.

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. π　　C. $\frac{3\pi}{2}$　　D. 2π

【答案】AC

【分析】由图像平移可得$f(x)=\frac{1}{2^{|\omega x|}}A\sin(\omega x+\varphi)$，分析$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(1-x)=f(x-1)$，可得$f(x)$为偶函数，结合范围可得$\varphi=\frac{\pi}{2}$，代入$f(-1)=f(3)=0$，分析即得解

【详解】将函数$g(x)=\frac{1}{2^{|\omega x-\varphi|}}A\sin\omega x(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi)$的图象向左平移$\frac{\varphi}{\omega}$个单位后得到函数$y=f(x)$的图象，故函数$f(x)=\frac{1}{2^{|\omega x|}}A\sin(\omega x+\varphi)$

对$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(1-x)=f(x-1)$，即$\forall t\in R$，$f(t)=f(-t)$

故$f(x)$为偶函数，所以$\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，

又$0<\varphi<\pi$，所以$\varphi=\frac{\pi}{2}$，故$f(x)=\frac{1}{2^{|x|}}A\cos\omega x$

$f(-1)=\frac{1}{2}A\cos\omega=0$，所以$\omega=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，

$f(3)=\frac{1}{8}A\cos3\omega=0$，所以$3\omega=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，

可得ω和3ω均为$\frac{\pi}{2}$的奇数倍，故ω的可能取值为$\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}$．故选：AC

12.解：∵函数$f(x)=\frac{x}{e^x}$，∴$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，

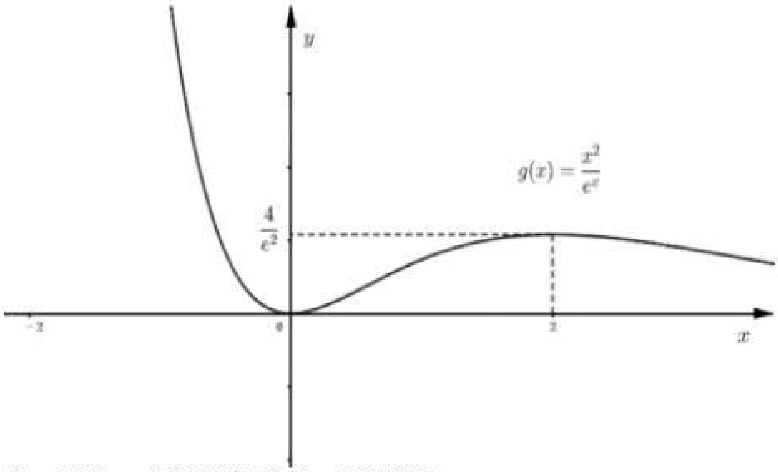
设切点坐标为（x_0，$\frac{x_0}{e^{x_0}}$），则切线的斜率为$k=f'(x_0)=\frac{1-x_0}{e^{x_0}}$，

∴切线方程为$y-\frac{x_0}{e^{x_0}}=\frac{1-x_0}{e^{x_0}}(x-x_0)$，

对于A，当$a=0$时，$b=\frac{4}{e^2}$，

设$g(x)=\frac{x^2}{e^x}$，∴$g'(x)=\frac{x(2-x)}{e^x}$，∴当$x\in(-\infty,0)$，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，

当$x\in(2,+\infty)$，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，如图，



当$x=0$时，$g(x)$取得极小值，极小值为0，

当$x=2$时，$g(x)$取得极大值，极大值为$\frac{4}{e^2}$，

若只能做两条切线，$y=b$与$g(x)=\frac{x^2}{e^x}$有且只有两个交点，则$b=\frac{4}{b^2}$，故A正确；

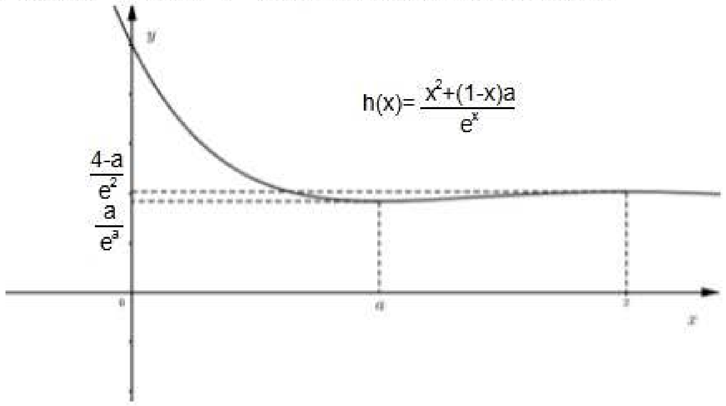
对于B，当$a=0$时，$b>\frac{4}{e^2}$时，则$y=b$与$g(x)=\frac{x^2}{e^x}$有且只有一个交点，

∴可做和一条切线，故B错误；

对于C，当$0<a<2$时，则$b=\frac{x_0^2+(1-x_0)a}{e^{x_0}}$，

设$h(x)=\frac{x^2+(1-x)a}{e^x}$，则$h'(x)=\frac{-x^2+(2+a)x-2a}{e^x}=\frac{(2-x)(x-a)}{e^x}$，

∵$0<a<2$，∴当$x\in(-\infty, a)$时，$h'(a)<0$，$h(x)$单调递减，
当$x\in(a, +\infty)$时，$h'(a)>0$，$h(x)$单调递增，如图，



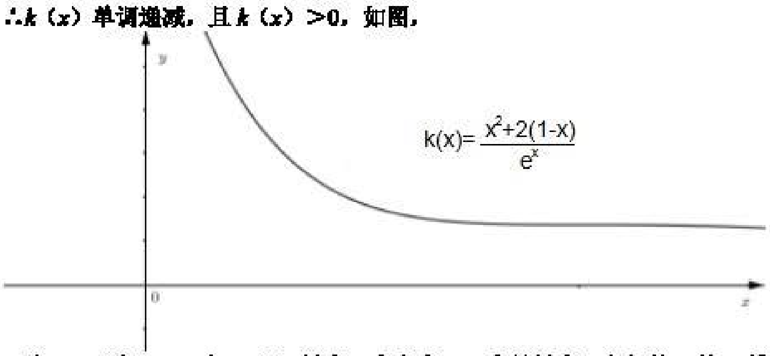
∴当$x=a$时，$h(x)$取得极小值，极小值为$\frac{a}{e^a}$，当$x=2$时，$h(x)$取得极大值，极大值为$\frac{4-a}{e^2}$，

∵当$0<a<2$时，可作三条切线，∴$y=b$与$h(x)$有3个交点，则$\frac{a}{e^a}<b<\frac{4-a}{e^2}$，故$C$正确；

对于D，当$a=2$时，$b=\frac{x_0^2+2(1-x_0)}{e^{x_0}}$，

此时，设$k(x)=\frac{x^2+2(1-x)}{e^x}$，则$k'(x)=\frac{-x^2+4x-4}{e^x}=-\frac{(x-2)^2}{e^x}\leqslant 0$，

∴$k(x)$单调递减，且$k(x)>0$，如图，



∴当$b>0$时，$y=b$与$k(x)$只有1个交点，∴有且只有1条切线，故D错误．故选：AC．

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13．已知$\alpha\in(0,\pi)$，$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，则$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=$________．

【答案】$\frac{1}{10}$##0.1

【分析】根据同角的三角函数关系式，结合降幂公式、诱导公式进行求解即可．

【详解】解：由$\alpha\in(0,\pi)$，$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，得$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$，

所以$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}{2}=\frac{1-\sin\alpha}{2}=\frac{1-\frac{4}{5}}{2}=\frac{1}{10}$．

故答案为：$\frac{1}{10}$

14.有 4 名男生和 2 名女生共 6 人组成两个志愿者队伍去两个不同的场馆，要求每队既有男生又有女生，则不同的分配方法有 _______种．(用数字表示)

15.$(x-2)^3(2x+1)^2$的展开式中 x 的奇次项的系数之和为________.

【答案】9

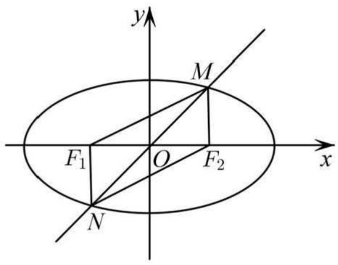
【分析】根据多项式的乘法展开即可求解.

【详解】$(x-2)^3(2x+1)^2=(x^3-6x^2+12x-8)(4x^2+4x+1)=4x^5-20x^4+25x^3+10x^2-20x-8$

展开式中x奇次项的系数之和$4+25-20=9$.

故答案为：9

16.如图所示，椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}=1$的左右焦点分别为$F_1,F_2$，直线 $y=kx$（$k>0$）与 C 相交于 M，N 两点，若M,F_1,N,F_2四点共圆（其中 M 在第一象限），且直线NF_2倾斜角不小于$\frac{\pi}{6}$，则椭圆 C 的实轴长的取值范围是（　）



A．$[\sqrt{3}+1,2\sqrt{2})$　　B．$[\sqrt{3}+1,4)$　　C．$(2,\sqrt{3}+1]$　　D．$(2,2\sqrt{2}]$

【答案】A

【分析】先求得椭圆的半焦距为c，由椭圆的中心对称性和圆的性质得到以F_1F_2为直径的圆与椭圆C有公共点，得到c和b的关系，再利用直线MF_1的倾斜角，结合椭圆的定义，得到关于a的不等关系，求解即可得到答案.

【详解】设椭圆的半焦距为c，由椭圆的中心对称性和M，F_1，N，F_2四点共圆，

则四边形MF_1NF_2为矩形，

所以以F_1F_2为直径的圆与椭圆C有公共点，

则$c>b$，

官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

所以$2c^2>a^2$，又由题意$c^2=a^2-(a^2-1)=1$，即$c=1$，

故$a^2<2$，即$a<\sqrt{2}$

因为直线NF_2倾斜角不小于$\frac{\pi}{6}$，

所以直线MF_1的倾斜角不小于$\frac{\pi}{6}$，

则$\frac{|F_2M|}{|F_1M|}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$，化简可得$|F_1M|\leqslant\sqrt{3}|F_2M|$，

因为$|F_1M|+|F_2M|=2a$，

所以$2a-|F_2M|\leqslant\sqrt{3}|F_2M|$，则$|F_2M|\geqslant(\sqrt{3}-1)a$，

又$(2a-|F_2M|)^2+|F_2M|^2=4c^2=4$，所以$|F_2M|=a-\sqrt{2-a^2}$，故$a-\sqrt{2-a^2}\geqslant(\sqrt{3}-1)a$，解得$a\geq\frac{\sqrt{3}+1}{2}$，所以$2a\geq\sqrt{3}+1$，

综上$\sqrt{3}+1\leq 2a<2\sqrt{2}$

故选：A．

17．在三角形ABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，$a=2b$，且$2c\sin B=a\cos\left(C-\frac{\pi}{6}\right)$.

(1)求角C;

(2)E为三角形ABC所在平面内的一点，$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，且$\left|\overrightarrow{AE}\right|=2$，求线段$CE$的长.

(1)

因为$a=2b$，由$2c\sin B=a\cos\left(C-\frac{\pi}{6}\right)$得，$c\sin B=b\cos\left(C-\frac{\pi}{6}\right)$，

由正弦定理得$\sin C\sin B=\sin B\cos\left(C-\frac{\pi}{6}\right)$，因为$0<B<\pi$，所以$\sin B\neq 0$，

故$\sin C=\cos\left(C-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C$，得$\frac{1}{2}\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C$，即$\tan C=\sqrt{3}$，

又$0<C<\pi$，所以$C=\frac{\pi}{3}$.

(2)由余弦定理得$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=4b^2+b^2-2b^2=3b^2$，所以$a^2=b^2+c^2$，即$A=\frac{\pi}{2}$，又因为$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，即$\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AB}$，因为$A,B,C$不共线，所以$CE//AB$且$CE=AB$，所以四边形$ABEC$是矩形，所以$BC=AE=a=2b=2$，即$b=1$，所以$CE=AB=c=\sqrt{3}b=\sqrt{3}$.

18.数学家也有一些美丽的错误,如法国数学家费马于1640年提出了以下猜想：$F_n=2^{2^n}+1\ (n\in N)$是质数.

1732年,瑞士数学家欧拉算出$F_5=641\times6700417$,该数不是质数.已知S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和,且

$S_n=\log_2(F_n-1)-1\ (n\in\mathbf{N}_+)$

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$b_n=(n+1)\log_2 a_{n+1}$,设为数列$\left\{\dfrac{2}{b_n}\right\}$的前$n$项和,求出$T_n$,并证明：对任意$n\in\mathbf{N}_+$,

【答案】（1）$a_n=2^{n-1}$（2）证明见解析

【解析】（1）根据数列的前n项和公式的性质可得$a_n=\begin{cases}S_1, & n=1\\ S_n-S_{n-1}, & n\geq 2\end{cases}(n\in N^*)$,分别代入$n=1$、$n\geq 2$,即可求得$\{a_n\}$的通项公式,需要注意验证$n=1$的情况.

（2）根据（1）得$a_n=2^{n-1}$,即可求得$a_{n+1}=2^n$,带入b_n中,整理之后,得出$\dfrac{2}{b_n}=\dfrac{2}{n(n+1)}$,利用裂项相消求和,最后分离常数,即可证明$1\leq T_n<2$.

解：（1）因为$S_n=\log_2(F_n-1)-1$, $F_n=2^{2^n}+1$,所以$S_n=\log_2\left(2^{2^n}+1-1\right)-1=2^n-1$;

当$n=1$时,$a_1=S_1=1$,当$n\geq 2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$,

$a_1=1$适合上式,故$a_n=2^{n-1}$;

（2）因为$a_n=2^{n-1}$,所以$a_{n+1}=2^n$,

所以$b_n=(n+1)\log_2 a_{n+1}=(n+1)\log_2 2^n=n(n+1)$,

故$\dfrac{2}{b_n}=\dfrac{2}{n(n+1)}=2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$,

所以$T_n=2\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$=2\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=2\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=2-\dfrac{2}{n+1}$;

因为$\dfrac{2}{b_n}=\dfrac{2}{n(n+1)}>0$,所以$T_{n+1}-T_n>0$对$\forall n\in\mathbf{N}^*$恒成立,即$T_{n+1}>T_n$,所以$T_n\geqslant T_1=1$,又因为$\dfrac{2}{n+1}>0$,

所以$T_n=2-\dfrac{2}{n+1}<2$,综上对$\forall n\in\mathbf{N}^*$,$1\leq T_n<2$ $1\leq T_n<2$.

19．在东京奥运会中，甲，乙、丙三名跳水运动员参加小组赛，已知甲晋级的概率为$p(0<p<1)$，乙、丙晋级的概率均为$q(0<q<1)$，且三人是否晋级相互独立.

(1)若甲晋级的概率与乙、丙两人均没有晋级的概率相等，与乙、丙两人有且仅有一人晋级的概率也相等，求p，q；

(2)若$p=\dfrac{1}{2}$，记三个人中晋级的人数为ξ，若$\xi=0$时的概率和$\xi=3$时的概率相等，求$E(\xi)$.

【详解】（1）乙、丙两人均没有晋级的概率为$(1-q)^2$，2 分

乙、丙两人有且仅有一人晋级的概率为$C_2^1q(1-q)$，　4 分

故$\begin{cases} p=(1-q)^2 \\ p=C_2^1q(1-q), \end{cases}$　5 分

解得$p=\frac{4}{9}$，$q=\frac{1}{3}$　6 分

（2）ξ的所有可能取值为 0，1，2，3.　7 分

$P(\xi=0)=\frac{1}{2}(1-q)^2$，　8 分

$P(\xi=3)=\frac{1}{2}q^2$，　9 分

由题知$\frac{1}{2}(1-q)^2=\frac{1}{2}q^2$，解得$q=\frac{1}{2}$，　10 分

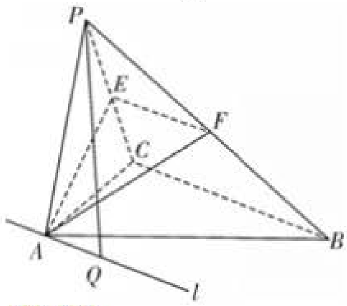
所以$\xi\sim B\left(3,\frac{1}{2}\right)$，　11 分

所以$E(\xi)=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.　12 分

20.如图，在三棱锥$P-ABC$中，侧面$PAC\perp$底面ABC，$AC\perp BC$，$\triangle PAC$是边长为 2 的正三角形，$BC=4$，E，F分别是PC，PB的中点，记平面AEF与平面ABC的交线为l.

（1）证明：直线$l\perp$平面PAC;

(2) 设点 Q 在直线 l 上，直线 PQ 与平面 AEF 所成的角为 α，异面直线 PQ 与 EF 所成的角为 θ，求当 AQ 为何值时，$\alpha+\theta=\dfrac{\pi}{2}$.



【解答】

(1) 证明：∵E，F 分别为 PB，PC 中点，

∴$BC// EF$， 1

又 $EF\subseteq$平面 EFA，$BC\subsetneq$平面 EFA，

∴$BC//$平面 EFA 2

又 $BC\subseteq$平面 ABC，平面 $EFA\cap$平面 $ABC=l$，

∴$l// BC$. 3

∵平面 $PAC\perp$平面 ABC，

∵$AC\perp BC$，

∴$BC\perp$平面 PAC， 4

∵$l// BC$ ∴直线 $l\perp$平面 PAC， 5

(2) 如图建立坐标系得出：C (0，0，0)，A (2，0，0)，

E ($\frac{1}{2}$，0，$\frac{\sqrt{3}}{2}$)，F ($\frac{1}{2}$，2，$\frac{\sqrt{3}}{2}$)，P (1，0，$\sqrt{3}$)，Q (2，y，0) 7

∴$\overrightarrow{CP}=$ (1，0，$\sqrt{3}$) 为平面 AEF 的法向量， 8

$\overrightarrow{EF}=$ (0，2，0)，$\overrightarrow{PQ}=$ (1，y，$-\sqrt{3}$)

∴$\cos<\overrightarrow{CP},\overrightarrow{PQ}>=\frac{-2}{2\sqrt{4+y^2}}=\frac{-1}{\sqrt{y^2+4}}$，$\cos<\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{EF}>=\frac{2y}{2\sqrt{4+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{4+y^2}}$， 9

设直线 PQ 分别与平面 AEF、直线 EF 所成的角分别为 α，β，$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$，

∴$\sin\alpha=|\frac{-1}{\sqrt{y^2+4}}|$，$\cos\beta=|\frac{-1+4y}{3\sqrt{y^2+4}}|$，$\sin\alpha=\cos\beta$， 10

即 $1=|y|$，求解 $y=\pm1$，$y=0$，A (2，0，0)，

存在 Q (2，1，0) 或 Q (2，-1，0)， 11

即当 $AQ=1$ 时，$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$. 12

21.已知抛物线 E：$x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F，直线 $x=4$ 分别与 x 轴交于点 P，与抛物线 E 交于点 Q，且 $|QF|=\dfrac{5}{4}|PQ|$.

（1）求抛物线 E 的方程；

（2）如图，设点 A，B，C 都在抛物线 E 上，若△ABC 是以 AC 为斜边的等腰直角三角形，求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的最小值.

解：（1）设点 Q（4，y_0），由点 Q 在抛物线 E 上，且 $|QF|=\frac{5}{4}|PQ|$ 得：$\begin{cases}2py_0=16\\ y_0+\frac{p}{2}=\frac{5}{4}y_0\end{cases}$，解得：$p=2$，

故抛物线 E 的方程为：$x^2=4y$.

（2）设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），C（x_3，y_3），（$x_1>x_2>x_3$），

设直线 AB 的斜率为 k（$k>0$），∵$AB\perp BC$，∴直线 BC 的斜率为 $-\frac{1}{k}$，

∵$|AB|=|BC|$，∴ $|x_1-x_2|\cdot\sqrt{1+k^2}=|x_2-x_3|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$，

即 $x_2-x_3=k(x_1-x_2)$ ①，

∵$k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{\frac{x_1^2}{4}-\frac{x_2^2}{4}}{x_1-x_2}=\frac{x_1+x_2}{4}$，

∴$x_1+x_2=4k$，即 $x_1=4k-x_2$②，

∵ $-\frac{1}{k}=\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}=\frac{\frac{x_2^2}{4}-\frac{x_1^2}{4}}{x_2-x_3}=\frac{x_2+x_3}{4}$，

∴$x_2+x_3=-\frac{4}{k}$，即 $x_3=-x_2-\frac{4}{k}$③，

将②③代入①得：$2x_2+\frac{4}{k}-k(4k-2x_2)=0$，

即（$k+1$）$x_2=2k^2-\frac{2}{k}=\frac{2(k^3-1)}{k}$，则 $x_2=\frac{2(k^3-1)}{k(k+1)}$，

∴ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos45^\circ=|\overrightarrow{AB}|^2=(x_1-x_2)^2(1+k^2)=(4k-2x_2)^2(1+k^2)=[4k-\frac{4(k^3-1)}{k(k+1)}]^2(1+k^2)=\frac{16(k^2+1)^3}{k^2(k+1)}$，∵$k^2+1\geqslant 2k$，则（$k^2+1$）$^2\geqslant 4k^2$，∵ $k^2+1\geqslant\frac{(k+1)^2}{2}$，

∴（k^2+1）$^3\geqslant 2k^2$（$k+1$）^{2}，∴$\frac{(k^2+1)^3}{k^2(k+1)^2}\geqslant 2$，当且仅当 $k=1$ 时取等号，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的最小值为 32.

22．已知函数 $f(x)=ax+x^2-x\ln a(a>0,a\neq1)$.

（1）求函数 $f(x)$ 的极小值；

（2）若存在 $x_1,x_2\in[-1,1]$，使得 $|f(x_1)-f(x_2)|\geq e-1$（e 是自然对数的底数），求实数 a 的取值范围.

（1）极小值 $f(0)=1$；（2）$a\in\left(0,\frac{1}{e}\right]\cup[e,+\infty)$.

【分析】（1）先求原函数的导数得：$f'(x)=a^x\ln a+2x-\ln a=2x+(a^x-1)\ln a$，再对 a 进行讨论，得到 $f'(x)>0$，从而函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

（2）$f(x)$ 的最大值减去 $f(x)$ 的最小值大于或等于 $e-1$，由单调性知，$f(x)$ 的最大值是 $f(1)$ 或 $f(-1)$，

最小值$f(0)=1$，由$f(1)-f(-1)$的单调性，判断$f(1)$ 与$f(-1)$的大小关系，再由$f(x)$的最大值减去最小值$f(0)$大于或等于$e-1$求出a的取值范围.

【详解】(1) 由于$f'(x)=a^x\ln a+2x-\ln a=2x+(a^x-1)\ln a>0$，

1° 当$a>1, y=2x$单调递增，$\ln a>0$，所以$y=(a^x-1)\ln a$单调递增，故$y=2x+(a^x-1)\ln a$单调递增，

$\therefore 2x+(a^x-1)\ln a>2\times0+(a^0-1)\ln a=0$，即$f'(x)>f'(0)$，所以$x>0$，

当$x<0$时，$f'(x)<0$，所以函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，在$(-\infty,0)$单调递减，

所以当$x=0$时，函数取得极小值，$f(0)=1$；

2° 当$0<a<1, y=2x$单调递增，$\ln a<0$，所以$y=(a^x-1)\ln a$单调递增，故$y=2x+(a^x-1)\ln a$单调递增，

$\therefore 2x+(a^x-1)\ln a>2\times0+(a^0-1)\ln a=0$，即$f'(x)>f'(0)$，所以$x>0$，

当$x<0$时，$f'(x)<0$，所以函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，在$(-\infty,0)$单调递减，

所以当$x=0$时，函数取得极小值，$f(0)=1$；

综上，函数$f(x)$的极小值$f(0)=1$.

(2) 因为存在$x_1,x_2\in[-1,1]$，使得$|f(x_1)-f(x_2)|\geq e-1$，

所以当$x\in[-1,1]$时，$|(f(x))_{max}-(f(x))_{min}|=(f(x))_{max}-(f(x))_{min}\geq e-1$，

由(1)知，$f(x)$在$[-1,0]$上递减，在$[0,1]$上递增，

所以当$x\in[-1,1]$时$(f(x))_{min}=f(0)=1,(f(x))_{max}=\max\{f(-1),f(1)\}$，

而$f(1)-f(-1)=(a+1-\ln a)-\left(\frac{1}{a}+1+\ln a\right)=a-\frac{1}{a}-2\ln a$，

记$g(t)=t-\frac{1}{t}-2\ln t(t>0)$，因为$g'(t)=1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}=\left(\frac{1}{t}-1\right)^2\geq0$（当$t=2$时取等号），

所以$g(t)=t-\frac{1}{t}-2\ln t$在$t\in(0,+\infty)$上单调递增，而$g(1)=0$.

1° 当$a>1$时，$g(a)>0$，$\therefore f(1)>f(-1)$，$\therefore$当$a>1$时，$f(1)-f(0)\geq e-1$，

即$a-\ln a\geq e-1$，易知：$y=a-\ln a$，在$a\in(1,+\infty)$上递增，$\therefore a\geq e$.

2° 当$0<a<1$时，$g(a)<0$，$\therefore f(1)<f(-1), f(-1)-f(0)\geq e-1, \frac{1}{a}+\ln a\geq e-1$，

易知 $y=\frac{1}{a}+\ln a$ 在 $a\in(0,1)$ 上递减， $\therefore a\in\left(0,\frac{1}{e}\right]$，

综上： $a\in\left(0,\frac{1}{e}\right]\cup[e,+\infty)$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。