# 2017 中国数学奥林匹克希望联盟夏令营(三)

中图分类号:G424.79 文献标识码:A 文章编号:1005-6416(2018)03-0026-06

## 第一试

一、填空题(每小题8分,共64分)

**1.** 已知正数数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}\geqslant 2a_n+1$,且$a_n<2^{n+1}$对$n\in \mathbf{Z}_+$恒成立. 则$a_1$的取值范围是______.

**2.** 已知函数$f(x)=\log_2\frac{x-3}{x-2}+\cos \pi x$. 若$f(\alpha)=10$, $f(\beta)=-10$,则$\alpha+\beta=$______.

**3.** 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a、b>0)$的左、右焦点分别为$F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$,离心率为2. 若直线$y=2(x-c)$与双曲线交于点$A$、$B$, $\triangle AF_1F_2$、$\triangle BF_1F_2$的内心分别为$I_1$、$I_2$,且$|I_1I_2|=2\sqrt{5}$,则$a$的值为______.

**4.** 已知$f(x)$为定义在$\mathbf{R}$上的奇函数,当$x\leqslant 0$时,

$$f(x)=\left|x+\frac{1}{2}\sin\alpha\right|+\left|x+\frac{3}{2}\sin\alpha\right|-2\sin\alpha,$$

其中,$\alpha\in(-\pi,\pi)$. 若对任意实数$x$,均有$f(x)\geqslant f(x+2)$,则$\alpha$的取值范围是______.

**5.** 从集合$\{1,2,\cdots,105\}$中任取一个元素$a$,使得$x^2+ax+6a=0$只有整数解的概率为______.

**6.** 三棱锥$P-ABC$中,三个侧面与底面所成角相等,三个侧面的面积分别为3、4、5,且底面面积为6. 则三棱锥$P-ABC$的外接球的表面积为______.

**7.** 已知点$P(4,2)$,过点$P$的直线$l$与$x$轴、$y$轴的正半轴分别交于$A$、$B$两点,$O$为坐标原点. 则$\triangle AOB$周长的最小值为______.

**8.** 李老师为学生购买纪念品,商店中有书签、明信片、笔记本、签字笔四种类型纪念品各10件(每种类型纪念品完全相同),李老师计划购买25件纪念品,且每种纪念品至少购买一件. 则共有______种不同的购买方案(用数字作答).

二、解答题(共56分)

**9.** (16分)若二次函数

$f(x)=ax^2+bx+c(a、b、c>0)$

有零点,求$\min\left\{\frac{b+c}{a},\frac{c+a}{b},\frac{a+b}{c}\right\}$的最大值.

**10.** (20分)已知椭圆$\Gamma:\frac{x^2}{2}+y^2=1$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$,过点$(1,0)$的两条互相垂直的动直线的一端分别与椭圆$\Gamma$交于$P$、$Q$两点. 当$\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}$与$\overrightarrow{QF_1}+\overrightarrow{QF_2}$垂直时,求直线$PQ$的斜率.

**11.** (20分)已知非零复数$x$、$y$满足

$y^2(x^2-xy+y^2)+x^3(x-y)=0.$

求$\sum\limits_{m=0}^{29}\sum\limits_{n=0}^{29}x^{18mn}y^{-18mn}$的值.

## 加试

一、(40分)如图1,在锐角$\triangle ABC$中,$AC>AB$,$H$、$I$分别为$\triangle ABC$的垂心、内心. $\odot O$为$\triangle ABC$的外接圆,$M$为弧$\overparen{BAC}$的中点,$K$为$\odot O$上一点,且$\angle AKH=90°$,$AH$与$MI$的交

点 $N$ 在$\odot O$ 上. 证明:$\angle IKH=\angle INH$.

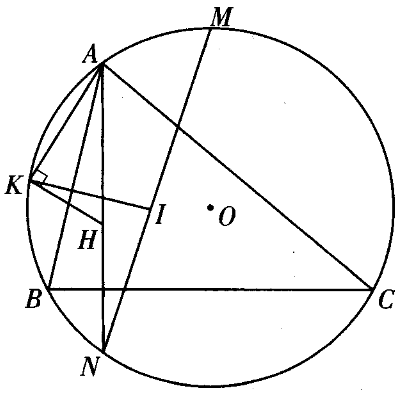


图 1

二、(40 分)设 $a_1,a_2,\cdots,a_k(k\in\mathbf{Z}_+)$ 均为大于 1 的整数,且满足

$$(a_1!)(a_2!)\cdots(a_k!)\mid 2\,017!.$$

当 $k$ 变化时,求 $\sum\limits_{i=1}^{k}a_i$ 的最大值.

三、(50 分)已知格点集

$$U=\{(x,y)\mid 0\leqslant x、y\leqslant 23,x、y\in\mathbf{Z}\}.$$

现用长为 $\sqrt{41}$ 且以格点为端点的线段顺次连接集合 $U$ 中的格点,得到一条折线. 是否存在一种连接方法,使得折线从原点出发,且恰经过集合 $U$ 中每个格点一次后回到原点?

四、(50 分)设 $P(x)$ 是最高次项系数为 1 的整系数多项式,且对任意的整数 $n$,$P(n)$ 均为完全平方数. 证明:存在整系数多项式 $Q(x)$,使得 $P(x)=Q^2(x)$.

## 参考答案

### 第一试

一、**1.** $(0,3]$.

由 $a_{n+1}+1\geqslant 2(a_n+1)$

$\Rightarrow a_n+1\geqslant(a_1+1)2^{n-1}$.

故$(a_1+1)2^{n-1}-1\leqslant a_n<2^{n+1}$

$\Rightarrow a_1+1<\dfrac{2^{n+1}+1}{2^{n-1}}=4+\dfrac{1}{2^{n-1}}$

$\Rightarrow a_1+1\leqslant 4$

$\Rightarrow 0<a_1\leqslant 3$.

**2.** 5.

易知,$f(x)$定义域为$(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$.

则$f(5-x)=\log_2\dfrac{5-x-3}{5-x-2}+\cos(5-x)\pi$

$=-f(x)$.

故$f(x)$关于点$\left(\dfrac{5}{2},0\right)$中心对称.

又当 $x>3$ 时,

$$f(x)=\log_2\left(1-\frac{1}{x-2}\right)+\cos x\pi,$$

于是,$f(x)$在区间$(3,4)$上单调递增,且 $f(4)=0$.

由 $\log_2\left(1-\dfrac{1}{x-2}\right)$的单调性,知当 $x>4$ 时,

$$f(x)>\log_2\frac{1}{2}-1=-2.$$

从而,$\beta\in(3,4)$且是唯一的.

类似地,$\alpha$ 也是唯一的.

因此,$\alpha+\beta=\dfrac{5}{2}\times 2=5$.

**3.** 2.

易知,$I_1I_2$ 垂直于 $x$ 轴且垂足为右顶点.

在梯形 $I_1I_2SQ$ 中,有

$$\sin\angle QI_1I_2=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

故 $2a=|I_1I_2|\sin\angle QI_1I_2=2\sqrt{5}\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}=4$

$\Rightarrow a=2$.

**4.** $\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]\cup\left[\dfrac{5\pi}{6},\pi\right)$.

由$f(x)$为 $\mathbf{R}$ 上奇函数,知$f(0)=0$,即

$2|\sin\alpha|-2\sin\alpha=0$

$\Rightarrow \sin\alpha\geqslant 0$.

当 $x\leqslant 0$ 时,

$$f(x)=\begin{cases}-2x-4\sin\alpha, & x\leqslant-\dfrac{3}{2}\sin\alpha;\\ -\sin\alpha, & -\dfrac{3}{2}\sin\alpha<x<-\dfrac{1}{2}\sin\alpha;\\ 2x, & -\dfrac{1}{2}\sin\alpha\leqslant x\leqslant 0.\end{cases}$$

由对称性可作出函数图像,如图 2.

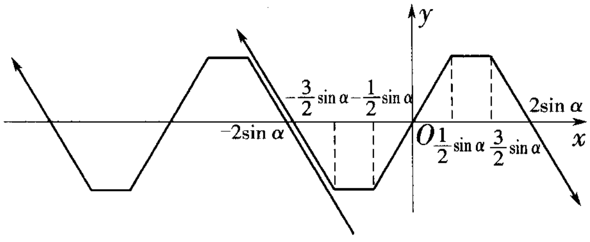


图 2

要使得对任意的 $x\in\mathbf{R}$,均有

$f(x)\geqslant f(x+2)$,

即将 $f(x)$ 向左平移两个单位后不在 $f(x)$ 的上方.

则 $2\sin\alpha-(-2\sin\alpha)\leqslant 2$

$\Rightarrow \sin\alpha\leqslant\frac{1}{2}$.

综上,$\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right)$.

**5.** $\frac{1}{21}$.

设方程 $x^2+ax+6a=0$ 的整数解为 $m$、$n$ $(m\leqslant n)$. 由韦达定理得

$m+n=-a, mn=6a$

$\Rightarrow mn=-6(m+n)$

$\Rightarrow (m+6)(n+6)=36$.

由 $36=1\times36=2\times18$

$=3\times12=4\times9=6\times6$,

知满足 $m\leqslant n$ 的解 $(m,n)$ 为

$(-42,-7)$、$(-24,-8)$、$(-18,-9)$、$(-15,-10)$、$(-12,-12)$、$(-5,30)$、$(-4,12)$、$(-3,6)$、$(-2,3)$、$(0,0)$,

对应的 $a=-(m+n)$ 的值为 49、32、27、25、24、$-25$、$-8$、$-3$、$-1$、0.

故满足 $a\in\{1,2,\cdots,105\}$ 的有 5 个.

因此,所求概率为 $\frac{5}{105}=\frac{1}{21}$.

**6.** $\frac{79\pi}{3}$.

设侧面与底面所成的角均为 $\theta$. 由面积射影定理知

$$\cos\theta=\frac{6}{3+4+5}=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=60^\circ.$$

易知,$P$ 在底面上的射影恰为 $\triangle ABC$ 的内心,记为 $I$.

由于三个侧面的面积分别为 3、4、5,于是,$\triangle ABC$ 的三边之比为 3∶4∶5.

注意到,由 $\triangle ABC$ 的面积为 6,知 $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 1.

从而,三棱锥 $P-ABC$ 的高为 $\sqrt{3}$.

设三棱锥 $P-ABC$ 的外接球球心为 $O$、半径为 $R$. 由 $\triangle ABC$ 是边长为 3、4、5 的直角三角形,知 $\triangle ABC$ 内心 $I$ 与外心 $O'$ 的距离为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$. 由于球心在三棱锥 $P-ABC$ 的外面,构造直角三角形易得

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{R^2-\frac{25}{4}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=R^2$$

$$\Rightarrow R^2=\frac{79}{12}.$$

故外接球的表面积 $S=4\pi R^2=\frac{79\pi}{3}$.

**7.** 20.

如图 3,作 $\triangle AOB$ 的旁切圆 $\odot O_1$ 与直线 $l$ 切于点 $K$.

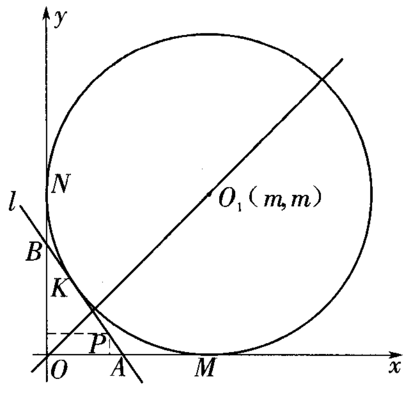


图 3

于是,$|BK|=|BN|$, $|AM|=|AK|$.

设圆心 $O_1(m,m)$. 则 $\triangle AOB$ 周长为

$|OM|+|ON|=2|OM|=2m$.

若使点 $P$ 满足条件,只需点 $P(4,2)$ 不在 $\odot O_1$ 内部,即

$|O_1P|\geqslant m$

$\Rightarrow (4-m)^2+(2-m)^2\geqslant m^2$

$\Rightarrow m\leqslant 2$(舍)或$m\geqslant 10$.

当$m=10$时,$\triangle AOB$周长的最小值为20. 此时,直线$l$方程为$3x+4y-20=0$,$P$为切点.

**8.** 592.

只需计算$f(x)=(x+x^2+\cdots+x^{10})^4$中$x^{25}$的系数.

注意到,

$$f(x)=\left(\sum_{i=1}^{10}x^i\right)^4=x^4\cdot\frac{(1-x^{10})^4}{(1-x)^4}$$

$$=x^4(1-4x^{10}+6x^{20}-4x^{30}+x^{40})\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{C}_{n+3}^3x^n.$$

故$x^{25}$的系数为$\mathrm{C}_{24}^3-4\mathrm{C}_{14}^3+6\mathrm{C}_4^3=592$.

二、**9.** 不妨取$b=2$.

由二次函数$f(x)=ax^2+bx+c$有零点,知$ac\leqslant 1$.

则$\min\left\{\frac{b+c}{a},\frac{c+a}{b},\frac{a+b}{c}\right\}$

$$=\min\left\{\frac{2+c}{a},\frac{c+a}{2},\frac{a+2}{c}\right\}.$$

注意到,$a$与$c$对称,不妨设$a\leqslant c$.

于是,$0<a\leqslant 1$,且$\frac{2+c}{a}\geqslant\frac{a+2}{c}$.

故$\min\left\{\frac{2+c}{a},\frac{c+a}{2},\frac{a+2}{c}\right\}$

$$=\min\left\{\frac{c+a}{2},\frac{a+2}{c}\right\}.$$

进而,当$c\geqslant 2$时,

$$\min\left\{\frac{c+a}{2},\frac{a+2}{c}\right\}=\frac{a+2}{c}\leqslant\frac{\frac{1}{2}+2}{2}=\frac{5}{4}.$$

当$a\leqslant c<2$时,

$$\min\left\{\frac{c+a}{2},\frac{a+2}{c}\right\}=\frac{c+a}{2},$$

此时,若$0<a\leqslant\frac{1}{2}$,则

$$\frac{c+a}{2}<\frac{2+\frac{1}{2}}{2}=\frac{5}{4};$$

若$\frac{1}{2}<a\leqslant 1$,则

$$\frac{c+a}{2}\leqslant\frac{a+\frac{1}{a}}{2}<\frac{5}{4}.$$

综上,当$a:b:c=1:4:4$或$4:4:1$时,所求的最大值为$\frac{5}{4}$.

**10.** 由$\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}$与$\overrightarrow{QF_1}+\overrightarrow{QF_2}$垂直得$OP\perp OQ$.

又$CP\perp CQ$,则$PQ$为Rt$\triangle POQ$、Rt$\triangle PCQ$的公共斜边. 故线段$PQ$的中点到点$O$、$C$的距离相等,即线段$PQ$中点的横坐标为$\frac{1}{2}$.

设直线$PQ$的方程为$y=kx+b$.

代入椭圆方程得

$(1+2k^2)x^2+4kbx+2b^2-2=0$.

设$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$. 则

$$x_1+x_2=-\frac{4kb}{1+2k^2},x_1x_2=\frac{2b^2-2}{1+2k^2}.$$

又$x_1+x_2=1$,于是,

$1+2k^2=-4kb$. ①

故$y_1y_2=k^2x_1x_2+kb(x_1+x_2)+b^2$

$$=\frac{2k^2b^2-2k^2}{1+2k^2}+kb+b^2.$$

因为$x_1x_2+y_1y_2=0$,所以,

$$\frac{2b^2-2}{1+2k^2}+\frac{2k^2b^2-2k^2}{1+2k^2}+kb+b^2=0$$

$\Rightarrow 4k^2b^2+2k^3b-2k^2+3b^2+kb-2=0$. ②

由式①、②消去$b$得

$-20k^4-20k^2+3=0$

$$\Rightarrow k=\pm\sqrt{\frac{-5+2\sqrt{10}}{10}}.$$

**11.** 将已知等式两边同除以$y^4$,

$$\left(\frac{x}{y}\right)^4-\left(\frac{x}{y}\right)^3+\left(\frac{x}{y}\right)^2-\left(\frac{x}{y}\right)+1=0.$$

令$\frac{x}{y}=\omega$,则

$\omega^4-\omega^3+\omega^2-\omega+1=0$

$\Rightarrow\omega^5=-1\Rightarrow\omega^{10}=(\omega^2)^5=1$.

于是,$\omega^2$为1的五次单位根.

令$z=x^{18}y^{-18}=\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)^9=(\omega^2)^9$仍为1

的五次单位根.

又$\sum_{m=0}^{29}\sum_{n=0}^{29}x^{18mn}y^{-18mn}=\sum_{m=0}^{29}\sum_{n=0}^{29}z^{mn}$,

当$5\mid m$时,$z^{mn}=1$;

当$5\nmid m$时,$z^{m}$仍为1的五次单位根,且

$\sum_{k=0}^{4}z^{km}=0$,

故 $\sum_{m=0}^{29}\sum_{n=0}^{29}z^{mn}=\sum_{5\mid m}\sum_{n=0}^{29}z^{mn}+\sum_{5\nmid m}\sum_{n=0}^{29}z^{mn}$

$=6\times30+0=180.$

## 加　试

一、如图4,设$AI$、$KH$分别与$\odot O$交于点$P$、$Q$. 于是,$AQ$为$\odot O$的直径.

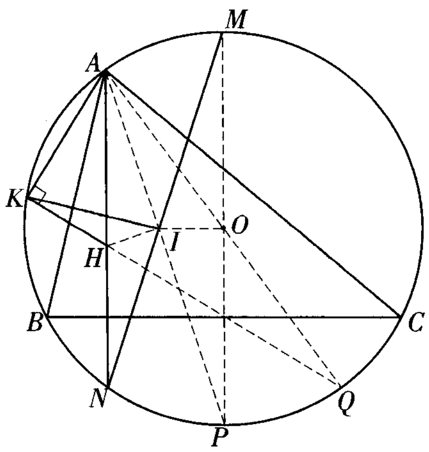


图4

设$\angle ABC=\beta$,$\angle ACB=\gamma$,$\angle BAC=\alpha$,$\odot O$的半径为$R$.

注意到,$N$、$H$关于$BC$对称,

$\angle NAP=\frac{1}{2}\angle NAQ=\frac{\beta-\gamma}{2}=\angle ANM$,

$AH=2R\cos\alpha,AI=\frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}=4R\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$.

则$IA=IN,IM=IP=BP=2R\sin\frac{\alpha}{2}$.

故$OP=IP\cos\angle MPA$

$=2R\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=R(\cos\beta+\cos\gamma)$

$\Rightarrow\cos\beta+\cos\gamma=1$

$\Rightarrow1+\cos\alpha=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$

$=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$

$\Rightarrow\cos\alpha=4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$

$=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$.

又$\frac{AI}{AH}=\frac{2\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\alpha}=\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$

$=\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=\cos\angle HAI$,

则$\angle AIH=90°$

$\Rightarrow A$、$I$、$H$、$K$四点共圆

$\Rightarrow\angle IKH=\angle IAH=\angle INH$.

二、设$a_i$中有$k$个2、$l$个3,其余数之和为$S$. 记$v_p(n)$为$n!$中$p$的幂次.

对任意的$x\in\mathbf{Z}_+(x\geqslant4)$,有

$v_2(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{x}{2^k}\right]>\left[\frac{x}{2}\right]+1>\frac{x}{2}$,

其中,$[x]$表示不超过实数$x$的最大整数.

则$k+l+\frac{S}{2}\leqslant v_2((a_1!)(a_2!)\cdots(a_n!))$

$\leqslant v_2(2\,017!)=2\,010$,　①

$l\leqslant v_3((a_1!)(a_2!)\cdots(a_n!))$

$\leqslant v_3(2\,017!)=1\,004$.　②

$2\times$①$+$②得

$\sum_{i=1}^{n}a_i=2k+3l+S\leqslant5\,024$.

当$a_1=a_2=\cdots=a_{1\,006}=2,a_{1\,007}=a_{1\,008}=\cdots=a_{2\,010}=3$时,$\sum_{i=1}^{k}a_i$取得最大值5 024.

三、称横坐标相同、纵坐标之差的绝对值为1的两个格点或纵坐标相同、横坐标之差的绝对值为1的两个格点为“相邻格点”.

集合$U$即为$24\times24$的正方形格点阵,对$U$中格点进行黑白相间染色,每个格点只染一色,于是,相邻格点颜色不同,不妨设原点为白色.

因为$41=4^2+5^2$,所以,题中每一条线段只能为一个$4\times5$矩形的对角线. 每连接一次,线段两个端点颜色不同,这条折线上每条

线端点的颜色顺序为:白黑白黑…白.

将集合 $U$ 中纵坐标为 0、1、2、7、8、9、14、15、16、21、22、23 的点划归 $A$ 组,其余点划归 $B$ 组. 显然,每条折线段的两个端点所在组分别为 $AB$、$BA$、$BB$.

由于 $A$、$B$ 两组方格数相同,若能实现题中要求的连线方程,折线两个端点只能为 $AB$ 或 $BA$. 这条折线上每条线端点的分组顺序为 $ABAB\cdots A$.

从而,同组格点的颜色应该相同,这是不可能的.

因此,题中要求的连线过程无法实现.

**四**、当 $P(x)$ 为常数时,结论成立.

当 $P(x)$ 不为常数时,对任意整数 $n$,$P(n)\geqslant 0$,则 $P(x)$ 的最高次数一定为偶数.

设 $P(x)=\sum\limits_{i=0}^{2m} a_ix^i$,$Q(x)=\sum\limits_{i=0}^{m} b_ix^i$,满足

$$a_{2m}=1,a_{m+k}=\sum_{i=0}^{m-k} b_{m-i}b_{k+i}(k=0,\cdots,m-1).$$

易解出 $b_m,b_{m-1},\cdots,b_0$ 且均为有理数.

从而,存在 $M$,使得 $MQ(x)$ 的系数均为整数.

记 $R(x)=M^2P(x)-M^2Q^2(x)$.

则 $R(x)$ 的次数小于 $m$.

故存在正整数 $N$,使得当 $n>N$ 时,

$$|R(n)|<\frac{n^m}{2},MQ(n)>\frac{n^m}{2},$$

且 $$|M\sqrt{P(n)}-MQ(n)|=\frac{|R(n)|}{M\sqrt{P(n)}+MQ(n)}<1.$$

由已知 $M\sqrt{P(n)}-MQ(n)$ 为整数,则必有 $M\sqrt{P(n)}-MQ(n)=0$.

于是,当 $n>N$ 时,

$$\sqrt{P(n)}=Q(n),P(n)=Q^2(n).$$

从而,$P(x)-Q^2(x)=0$ 有无穷多个实根,即 $P(x)=Q^2(x)$ 恒成立.

又 $P(x)$ 为整系数的,$Q(x)$ 为有理系数的,因此,$Q(x)$ 也为整系数的.

(命题组 提供)

# 征 稿 启 事

本刊是以报道中学数学课外活动和数学竞赛为中心内容的专业刊物。欢迎作者为数学活动课程讲座、命题与解题、从高考到竞赛、赛题另解、学生习作、初等数学研究、数海拾贝、课外训练、数学奥林匹克问题等栏目撰稿。来稿请注意:

**1.** 内容要新颖,形式要活泼,提倡短小精悍,讲清一、两个问题,不要“大而全”。稿件一般不超过 3 000 字,长文不超过 4 000 字。

**2.** 讲座稿应附有相应的练习题(5 ~7 个),并随练习题给出提示。

**3.** 文中例题最好选用国内外的竞赛试题,并标出竞赛全称、届次和时间。

**4.** 凡为本刊课外训练和数学奥林匹克问题栏目提供的稿件,请注意:试题内容范围以中国数学会普及工作委员会制定的《数学竞赛大纲》为准;题目要有新意(不能用成题),要注明是自编或改编,改编题需注明原题出处。

**5.** 来稿可用 16 开稿纸誊写,字迹清晰,电子稿排版格式规范,插图力求准确并随文绘出,外文字母的正斜体、大小写、上下角标清楚,准确无误。

**6.** 参考文献用顺序编码制,在正文引用处注明。

**7.** 本刊已加入多个数据库并在网上发行,如作者不同意所著文章被数据库收录,请在来稿时声明。来稿三个月未收到录用通知可自行处理,恕不退稿。为联系方便,请注明联系电话、邮箱。

**来稿寄至**:300074,天津市河西区吴家窑大街 57 号增 1 号《中等数学》编辑部,也可将稿件电子版发至 zdsxlx@163.com。