高二数学考试参考答案

1. B　因为 $A=\{x|x>1\}$，$B=\{x|-5<x<3\}$，所以 $A\cap B=(1,3)$.

2. C　因为 $(a-2\mathrm{i})(3+\mathrm{i})=3a+2+(a-6)\mathrm{i}$，所以 $a-6=0$，解得 $a=6$.

3. A　$f(-x)+f(x)=x^2\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+x^2\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=x^2\ln[(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)]=0$，所以 $f(x)$ 是奇函数，排除 C，D. 当 $x>0$ 时，$\sqrt{x^2+1}<x+1$，则 $\sqrt{x^2+1}-x<1$，$\ln(\sqrt{x^2+1}-x)<0$，$f(x)<0$，排除 B. 故选 A.

4. B　设招聘 x 名硕士生，由题意可知，$x+400\times0.4=(400+80+x)\times(0.4-0.04)$，解得 $x=20$，所以本科生教师共分得树苗 $\frac{40}{400+80+20}\times1500=120$ 棵.

5. B　若 $x\cos x<1$，则 $x<\frac{1}{\cos x}$，而 $\frac{1}{\cos x}>1$，所以"$x\cos x<1$"推不出"$x<1$"；若 $x<1$，又 $0<x<\frac{\pi}{2}$，则 $0<\cos x<1$，所以 $0<x\cos x<1$，即"$x<1$"可以推出"$x\cos x<1$".

6. C　因为 $a=\log_3 0.3<0$，$b=\sin\frac{3\pi}{5}\in(0,1)$，$c=5^{0.1}>1$，所以 $a<b<c$.

7. A　因为正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，设其高为 h，$AC=BC=AB=a$，则 $3a\times h=6$，所以 $h=\frac{2}{a}$. 由底面积为 $\sqrt{3}$，得 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\sqrt{3}$，解得 $a=2$，从而 $h=1$. 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 r，则 $2r=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{3}}$，解得 $r=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 设球 O 的半径为 R，则 $R^2=r^2+\frac{h^2}{4}=\frac{4}{3}+\frac{1}{4}=\frac{19}{12}$，所以球 O 的表面积为 $4\pi\times\frac{19}{12}=\frac{19\pi}{3}$.

8. D　①若《周易》不排，共有 $A_2^2A_3^2=12$ 种安排方式.
②若排《周易》且《诗经》与《礼记》都安排，共有 $C_2^1A_2^2A_3^2-C_2^1A_2^2=20$ 种安排方式；若排《周易》且《诗经》与《礼记》只安排一个，共有 $C_2^1C_3^1A_3^3=36$ 种安排方式.
所以共有 $12+20+36=68$ 种安排方式.

9. BD　因为圆心 $C(1,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{4+6}{5}=2$，所以 A 错误，B 正确.
因为 $|EF|=2\sqrt{9-2^2}=2\sqrt{5}$，所以 C 错误，D 正确.

10. BC　$f(x)$ 的最小正周期为 π，所以 A 错误；
由 $f'(x)=\cos(2x-\frac{\pi}{6})=0$，得 $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，所以 B 正确；
将 $y=\frac{1}{2}\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到 $f(x)=\frac{1}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{6})$ 的图象，所以 C 正确；
若 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1=x_2+k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 或 $x_1=\frac{2\pi}{3}-x_2+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 D 错误.

11. ACD　由已知可得 $c=\sqrt{3}$，$b=1$，$a=\sqrt{2}$，则 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$，离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$，A 正确；

因为 $|PF_2|$ 的最小值为 $c-a=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，所以 B 错误；

设 $P(x_0,y_0)$，则 $\frac{x_0^2}{2}-y_0^2=1$，$k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{y_0}{x_0+a}\cdot\frac{y_0}{x_0-a}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$，所以 C 正确；

设 $\angle F_1PF_2=\theta$，则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\angle F_1PF_2=\frac{2\pi}{3}$，所以 D 正确.

12. BCD　由 $f(x)\geqslant a(x^2-x-x\ln x)$，得 $\mathrm{e}^{x-1}-x\geqslant a(x^2-x-x\ln x)$. 因为 $x\in(0,+\infty)$，所以 $\frac{\mathrm{e}^{x-1}}{x}-1\geqslant a(x-1-\ln x)$，即 $\mathrm{e}^{x-1-\ln x}-1\geqslant a(x-1-\ln x)(*)$. 令 $t=x-1-\ln x$，则 $t'=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，所以函数 $t=x-1-\ln x$ 在 $(0,1)$ 上为减函数，在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，所以 $t\geqslant 0$，$(*)$ 式可化为 $\mathrm{e}^t-1\geqslant at$，即 $\mathrm{e}^t-1-at\geqslant 0$. 设 $g(t)=\mathrm{e}^t-1-at$，则 $g'(t)=\mathrm{e}^t-a$，又 $t\geqslant 0$，所以 $\mathrm{e}^t\geqslant 1$.

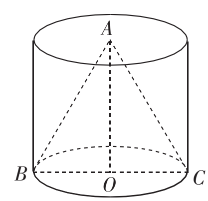
①当 $a\leqslant 1$ 时，$g'(t)=\mathrm{e}^t-a\geqslant 0$，则 $g(t)=\mathrm{e}^t-1-at$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，所以 $g(t)\geqslant g(0)=0$；

②当 $a>1$ 时，$g'(t)=\mathrm{e}^t-a$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，令 $g'(t)=\mathrm{e}^t-a=0$，得 $t=\ln a>0$，则 $g(t)=\mathrm{e}^t-1-at$ 在 $[0,\ln a)$ 上为减函数，在 $(\ln a,+\infty)$ 上为增函数，由于 $g(0)=0$，在 $[0,\ln a)$ 上，$g(t)\leqslant g(0)=0$，不符合题意. 综上，$a\leqslant 1$.

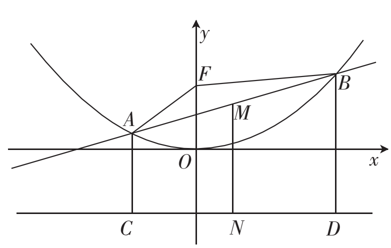
13. $\frac{3}{2}$　因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，所以 $2m-4=2(1-m)$，解得 $m=\frac{3}{2}$.

14. $-\frac{1}{9}$　由 $\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)=-\frac{2}{3}$，得 $\cos(\frac{\pi}{6}+\alpha)=-\frac{2}{3}$，所以 $\cos(2\alpha+\frac{\pi}{3})=2\cos^2(\frac{\pi}{6}+\alpha)-1=2\times\frac{4}{9}-1=-\frac{1}{9}$.

15. $\frac{1}{2\pi}$　因为圆柱母线与圆锥旋转轴平行，所以圆柱母线与圆锥母线所成角的大小等于 $\angle BAO$. 因为圆柱侧面的展开图恰好为正方形，所以 $2\pi\times BO=OA$，所以 $\tan\angle BAO=\frac{BO}{OA}=\frac{1}{2\pi}$.



16. 20　由题意知 $F(0,4)$，抛物线 C 的准线方程为 $y=-4$. 设 AB 的中点为 M，分别过点 A，B，M 作准线的垂线，垂足分别为 C，D，N，因为 M 到 x 轴的距离为 6，所以 $|MN|=6+4=10$.



由抛物线的定义知$|AC|=|AF|$,$|BD|=|BF|$,所以$2|MN|=|AC|+|BD|=|AF|+|BF|=20$. 因为$|AF|+|BF|\geqslant|AB|$,所以$|AB|\leqslant 20$.

17. 解:(1)设$\{a_n\}$的公比为q,因为$3a_3$是a_4和a_5的等差中项,所以$6a_3=a_4+a_5$, ········ 1 分

则$q^2+q-6=0$,解得$q=2$或$q=-3$. ········ 3 分

当$q=2$时,$a_n=a_1q^{n-1}=3\times 2^{n-1}$. ········ 4 分

当$q=-3$时,$a_n=a_1q^{n-1}=3\times(-3)^{n-1}=-(-3)^n$. ········ 5 分

(2)因为$a_n>0$,所以$a_n=3\times 2^{n-1}$,$b_n=n\times 2^{n-1}$. ········ 6 分

$S_n=1\times 2^0+2\times 2^1+3\times 2^2+\cdots+n\times 2^{n-1}$,

则$2S_n=1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n\times 2^n$, ········ 7 分

则$-S_n=2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}-n\times 2^n=\dfrac{2^0-2^n}{1-2}-n\times 2^n=(1-n)\times 2^n-1$. ········ 9 分

故$S_n=(n-1)\times 2^n+1$. ········ 10 分

18. (1)解:因为$\tan B=\dfrac{3}{4}$,所以$\sin B=\dfrac{3}{5}$. ········ 2 分

所以△ABC的面积$S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times 10\times 3\times\dfrac{3}{5}=9$. ········ 4 分

(2)证明:因为$a^2=b(b+c)$,$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

所以$b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+bc$,化简得$c=b(1+2\cos A)$, ········ 6 分

所以$\sin C=\sin B(1+2\cos A)$, ········ 7 分

即$\sin(A+B)=\sin B+2\sin B\cos A$,

所以$\sin(A-B)=\sin B$. ········ 9 分

因为$A-B\in(0,\pi)$,$B\in(0,\pi)$,所以$A-B=B$或$A-B=\pi-B$(舍去), ········ 11 分

所以$A=2B$. ········ 12 分

19. 解:(1)依题意,X的可能取值为0,1,2,3, ········ 1 分

所以$P(X=0)=\dfrac{C_5^4}{C_8^4}=\dfrac{1}{14}$, ········ 2 分

$P(X=1)=\dfrac{C_3^1C_5^3}{C_8^4}=\dfrac{3}{7}$, ········ 3 分

$P(X=2)=\dfrac{C_3^2C_5^2}{C_8^4}=\dfrac{3}{7}$, ········ 4 分

$P(X=3)=\dfrac{C_3^3C_5^1}{C_8^4}=\dfrac{1}{14}$, ········ 5 分

X的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{14}$	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{1}{14}$

········ 6 分

所以 $E(X)=1\times\frac{3}{7}+2\times\frac{3}{7}+3\times\frac{1}{14}=\frac{3}{2}$. ············ 7 分

(2)设 M=“A 科室任职的是女性”,N=“B 科室任职的是男性”, ············ 8 分

则 $P(M)=\frac{C_3^1A_7^3}{A_8^4}=\frac{3}{8}$, ············ 9 分

$P(MN)=\frac{C_3^1C_5^1A_6^2}{A_8^4}=\frac{15}{56}$, ············ 11 分

所以 $P(N|M)=\frac{P(MN)}{P(M)}=\frac{15}{56}\times\frac{8}{3}=\frac{5}{7}$. ············ 12 分

20. (1)证明:取 AD 的中点 O,连接 OP,OC.

因为$\triangle PAD$ 为等边三角形,所以 $PO\perp AD$. ············ 1 分

又 $PC\perp AD$,$PO\cap PC=P$,

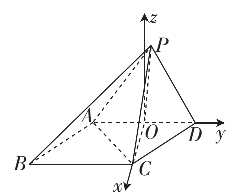
所以 $AD\perp$平面 PCO, ············ 3 分

所以 $AD\perp CO$,即 OC 是线段 AD 的中垂线,

所以 $AC=CD$. ············ 5 分

(2)解:由(1)知 $PO\perp AD$,又 $AC=CD=2$,所以 $CO\perp AD$,所以 $AD\perp$平面 PCO.

以 O 为坐标原点,分别以$\overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{OD}$的方向为 x,y 轴的正方向,建立空间直角坐标系,



则 $A(0,-1,0)$,$C(\sqrt{3},0,0)$,$D(0,1,0)$.

在$\triangle POC$ 中,$PO=OC=\sqrt{3}$,$PC=3$,所以点 P 的坐标为$(-\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{3}{2})$,

············ 6 分

所以$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=(\sqrt{3},-1,0)$,$\overrightarrow{AP}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},1,\frac{3}{2})$,$\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$. ············ 7 分

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$是平面 PAB 的法向量,可得$\begin{cases}\sqrt{3}x-y=0,\\-\frac{\sqrt{3}}{2}x+y+\frac{3}{2}z=0,\end{cases}$令 $y=3$,得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},3,-1)$. ············ 9 分

设 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$是平面 PAD 的法向量,可得$\begin{cases}2y_1=0,\\-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1+y_1+\frac{3}{2}z_1=0,\end{cases}$令 $z_1=1$,得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},0,1)$. ············ 11 分

设平面 PAB 与平面 PAD 所成的二面角为 θ,

则 $|\cos\theta|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{\sqrt{13}}{13}$. ············ 12 分

21. 解:(1)由题可知,$a=2$. ············ 1 分

当直线 l 的斜率不存在时,由 $|PQ|=3$,得$\frac{1}{4}+\frac{9}{4b^2}=1$,则 $b^2=3$, ············ 3 分

故椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………………………………… 4 分

(2)法一:当直线 l 的斜率不存在时,$\triangle APQ$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times3\times[1-(-2)]=\frac{9}{2}$. …… 5 分

当直线 l 的斜率存在时,设 l 的方程为 $y=k(x-1)$,$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$.

联立方程组$\begin{cases}y=k(x-1),\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消去 y 整理得$(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$, ……… 6 分

则 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{3+4k^2}$,$x_1x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2}$. ……………………………………………… 7 分

$|PQ|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{12(1+k^2)}{3+4k^2}$, ……………………………… 8 分

点 A 到直线 l 的距离 $d=\frac{3|k|}{\sqrt{1+k^2}}$, ……………………………………………… 9 分

则$\triangle APQ$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|PQ|d=\frac{18|k|\sqrt{1+k^2}}{3+4k^2}=\frac{9}{2}\sqrt{\frac{-3}{(3+4k^2)^2}-\frac{2}{3+4k^2}+1}$. …… 10 分

因为 $k^2>0$,所以 $0<\frac{1}{3+4k^2}<\frac{1}{3}$,

则 $0<-\frac{3}{(3+4k^2)^2}-\frac{2}{3+4k^2}+1<1$,$0<\frac{9}{2}\sqrt{\frac{-3}{(3+4k^2)^2}-\frac{2}{3+4k^2}+1}<\frac{9}{2}$. ………… 11 分

综上所述,$\triangle APQ$ 面积的取值范围为$(0,\frac{9}{2}]$. ……………………………………… 12 分

法二:依题意可设直线 l 的方程为 $x=ty+1$,$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$.

联立方程组$\begin{cases}x=ty+1,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消去 x 整理得$(3t^2+4)y^2+6ty-9=0$, ……………… 5 分

则 $y_1+y_2=-\frac{6t}{3t^2+4}$,$y_1y_2=-\frac{9}{3t^2+4}$. ……………………………………………… 6 分

$|PQ|=\sqrt{1+t^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{12t^2+12}{3t^2+4}$. ……………………………………… 7 分

点 A 到直线 l 的距离 $d=\frac{3}{\sqrt{1+t^2}}$, ……………………………………………………… 8 分

则$\triangle APQ$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|PQ|d=\frac{18\sqrt{1+t^2}}{3t^2+4}=\frac{18}{3\sqrt{1+t^2}+\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}$. …………………… 9 分

因为$\sqrt{1+t^2}\geqslant1$,所以 $3\sqrt{1+t^2}+\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\geqslant4$,所以 $0<\frac{18}{3\sqrt{1+t^2}+\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}\leqslant\frac{9}{2}$. …… 11 分

故$\triangle APQ$ 面积的取值范围为$(0,\frac{9}{2}]$. ………………………………………………… 12 分

22. 解:(1)由 $f(1)=4a$,得 $3a-b-c=0$,又 $b=-6a$,所以 $c=9a$, …………………… 1 分

则 $f(x)=ax^3-6ax^2+9ax$，所以 $f'(x)=3a(x-1)(x-3)$，$a\neq0$. ························ 3 分

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 与 $(3,+\infty)$ 上为增函数，在 $(1,3)$ 上为减函数；··············· 4 分

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 与 $(3,+\infty)$ 上为减函数，在 $(1,3)$ 上为增函数. ··············· 5 分

(2)因为 $f(x)=ax^3-6ax^2+9ax=ax(x-3)^2$，由 $F(x)=0$，

得 $ax(x-3)^2-xe^{-x}=0$，解得 $x=0$ 或 $a(x-3)^2-e^{-x}=0$.

因为 $x\in[0,3]$，所以 $x_1=0$，x_2，x_3 是 $a(x-3)^2-e^{-x}=0$ 的正根，$x_1+x_2+x_3=x_2+x_3$， ··· ·· 6 分

则 $\ln[a(x-3)^2]=\ln e^{-x}=-x$，$\ln a+2\ln(3-x_2)=-x_2$，$\ln a+2\ln(3-x_3)=-x_3$，

两式相减得 $2\ln(3-x_2)-2\ln(3-x_3)=x_3-x_2=(3-x_2)-(3-x_3)$.

令 $3-x_2=t_2$，$3-x_3=t_3$，得 $2\ln t_2-2\ln t_3=t_2-t_3$，则 $2=\dfrac{t_2-t_3}{\ln t_2-\ln t_3}$. ·················· 7 分

令 $u=\dfrac{t_2}{t_3}\in(1,+\infty)$，则 $\dfrac{t_2-t_3}{\ln t_2-\ln t_3}=\dfrac{t_3(u-1)}{\ln u}=2$，

所以 $t_3=\dfrac{2\ln u}{u-1}(u>1)$，可得 $t_2+t_3=\dfrac{2(u+1)\ln u}{u-1}$，$t_2+t_3-4=\dfrac{2\ln u}{u-1}(u+1)-4=\dfrac{2(u+1)\ln u-4(u-1)}{u-1}(u>1)$. ·· 8 分

设 $g(u)=2(u+1)\ln u-4(u-1)$，则 $g'(u)=2\left(\ln u+\dfrac{1}{u}-1\right)$，再设 $h(u)=\ln u+\dfrac{1}{u}-1$，则 $h'(u)=\dfrac{1}{u}-\dfrac{1}{u^2}=\dfrac{u-1}{u^2}>0$，$h(u)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，所以 $h(u)>h(1)=0$，即 $g'(u)=2\left(\ln u+\dfrac{1}{u}-1\right)>0$，则 $g(u)=2(u+1)\ln u-4(u-1)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，从而 $g(u)>g(1)=2(1+1)\ln 1-4(1-1)=0$， ·· 10 分

所以 $t_2+t_3-4>0$，即 $(3-x_2)+(3-x_3)-4=2-(x_2+x_3)>0$，所以 $x_2+x_3<2$，

即 $x_1+x_2+x_3=x_2+x_3<2$. ·· 12 分