

湖北省部分市州 2023 年 7 月高一年级联合调研考试 · 数学

参考答案、提示及评分细则

1. 【答案】B
2. 【答案】D
3. 【答案】B
4. 【答案】A
5. 【答案】C
6. 【答案】D
7. 【答案】D
8. 【答案】B
9. 【答案】ABC
10. 【答案】BD
11. 【答案】ABC
12. 【答案】BCD

【详解】平面 $ABCD$ 中, $AM = \sqrt{5}$, $BM = \frac{1}{2}$, $AO = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $OM = \frac{\sqrt{5}}{10}$,

$$BO = \frac{\sqrt{5}}{5}, OD = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

选项 A, 假设 $NC \parallel$ 平面 $A'OM$, 取 OD 中点 E 连接 NE , CN 则 $NE \parallel A'O$

则 $NE \parallel$ 平面 $A'OM$, 又 $\because CN \parallel$ 平面 $A'OM$, $CN \cap NE = N$

$\therefore$ 平面 $A'OM \parallel$ 平面 CEN ,

又 $\because$ 平面 $BCD \cap$ 平面 $A'OM = OM$, 平面 $BCD \cap$ 平面 $NCE = EC$.

$\therefore CE \parallel OM$, 则 $CE \perp BD$, 则在 $Rt\triangle DCE$ 中 $EC = \frac{\sqrt{5}}{5}$

事实上 $Rt\triangle BCD$ 中高 $CE = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 矛盾, 故 A 错;

选项 B, $\because A'O \perp BD$, $OM \perp BD$, $OA' \cap OM = M$,

$\therefore BD \perp$ 平面 $A'OM$, $\therefore BD \perp A'M$, 故 B 对;

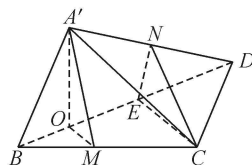
选项 C, 由 B 知, $\angle A'OM$ 即二面角平面角, $\therefore \angle A'OM = \frac{\pi}{3}$, $\therefore \triangle A'OM$ 中由余弦定

$$\text{理知 } A'M = \frac{\sqrt{65}}{10}, \text{ 在 } \triangle A'BM \text{ 中, 由余弦定理知 } \cos \angle A'BM = \frac{1 + \frac{1}{4} - \left[\frac{\sqrt{65}}{10} \right]^2}{2 \times 1 \times \frac{1}{2}} \quad ①$$

$$\text{在 } \triangle A'BC \text{ 中, 由余弦定理知, } \cos \angle A'BC = \frac{1 + 4 - A'C^2}{2 \times 1 \times 2} \quad ②$$

由①②解得 $A'C = \frac{\sqrt{65}}{5}$, 故 C 对.

选择 D: 当 $A'O \perp$ 平面 BCD 时, 体积最大. $V_{A'-BCD} = 1 \times \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{5}}{15}$.



当 $A'M \perp$ 平面 BCD 时, 体积最小. 在 $Rt\triangle A'MB$ 中, $A'M = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$V_{A'-BCD} = \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}, \text{ 故 } \frac{\sqrt{3}}{6} < V_{A'-BCD} < \frac{2\sqrt{5}}{15}, \text{ 故 D 对.}$$

13. 【答案】-2

14. 【答案】20

15. 【答案】 $\sqrt{3}$

16. 【答案】 18π

【详解】底面半径为 3, 高为 3 的圆柱中, 去掉一个底面半径为 3, 高为 3 的圆锥, 故 $V = 18\pi$.

17. 【答案】(1) 因为 $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$. 所以, 所以 $\overrightarrow{CP} - \overrightarrow{CB} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB})$ (2 分)

$$\text{所以 } \overrightarrow{CP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}. \text{ (4 分)}$$

$$\text{所以 } x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{3}. \text{ 所以 } (x-y) = \frac{1}{3}. \text{ (5 分)}$$

$$(2) \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{AB} = (\frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}) \cdot (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}). \text{ (7 分)}$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}^2 - \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}^2 = \frac{1}{3} \times 6 \times 3 \times \cos \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{3} \times 9 - \frac{2}{3} \times 36. \text{ (9 分)}$$

$$= -24. \text{ (10 分)}$$

18. 【详解】(1) $a = \frac{1 - (0.05 + 0.1 + 0.2 + 0.25 + 0.1)}{10} = 0.03$ (3 分)

众数为 75 (6 分)

(2) 落在 $[50, 60]$ 与 $[70, 80]$ 的人数比为 $0.01 : 0.03 = 1 : 3$.

$$\bar{z} = \frac{\bar{z}_1 + 3\bar{z}_2}{4} = \frac{56 + 3 \times 76}{4} = 71 \text{ (9 分)}$$

$$s^2 = \frac{[s_1^2 + (\bar{z}_1 - \bar{z})^2] + 3[s_2^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z})^2]}{4} = \frac{[9 + (56 - 71)^2] + 3[5 + (76 - 71)^2]}{4} = 81$$

..... (12 分)

19. 【详解】(1) 如图, 连接 AD_1, D_1F, BC_1 ,

$\because E, F$ 分别为棱 BC, CC_1 的中点, 则 $EF \parallel BC_1$,

又 $\because AB \parallel C_1D_1$, 且 $AB = C_1D_1$, 则 ABC_1D_1 为平行四边形,

$\therefore AD_1 \parallel BC_1$, 可得 $EF \parallel AD_1$, 故则过点 A, E, F 的截面即为截面 $AEFD_1$, (2 分)

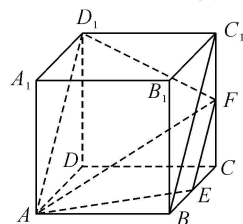
设点 A_1 到截面的距离为 d , 在截面 EFD_1A 中, $EF = \sqrt{2}, D_1A =$

$$2\sqrt{2}, D_1F = AE = \sqrt{5}, \text{ 高为 } \frac{3\sqrt{2}}{2}, S_{\triangle AD_1F} = 3,$$

$$\text{又 } \because V_{A_1-AFD_1} = V_{F-A_1D_1A} \therefore d \cdot S_{\triangle AFD_1} = 2 \times 2 = 4, \therefore d = \frac{4}{S_{\triangle AFD_1}} = \frac{4}{3}. \text{ (6 分)}$$

(2) 由(1)知截面将正方体分成上、下两部分, 其中下部分 ADD_1-ECF 为三棱台, 且三棱台 ADD_1-ECF 的高为 DC (8 分)

$$\text{正方体的棱长为 } 2, \text{ 则 } S_{\triangle ADD_1} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2, S_{\triangle ECF} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}, \text{ (10 分)}$$



则三棱台 ADD_1-ECF 的体积 $V_{ADD_1-ECF} = \frac{1}{3} \times 2 \times \left[2 + \frac{1}{2} + \sqrt{2 \times \frac{1}{2}} \right] = \frac{7}{3}$ (12分)

20.【详解】(1) 因为 $A(1, 2), B(1+\sqrt{2}, 2-2\sqrt{2})$, 所以 $\overrightarrow{AB} = (\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$,

所以 $x=\sqrt{2}, y=-2\sqrt{2}$, 依据题设定义得 $\varphi = \frac{\pi}{4}$, (2分)

所以 $\overrightarrow{AP} = \left(\sqrt{2} \times \cos \frac{\pi}{4} + 2\sqrt{2} \times \sin \frac{\pi}{4}, \sqrt{2} \times \sin \frac{\pi}{4} - 2\sqrt{2} \times \cos \frac{\pi}{4} \right) = (3, -1)$,

设点 P 的坐标为 (x_0, y_0) , 则有 $\overrightarrow{AP} = (x_0 - 1, y_0 - 2)$,

从而 $\begin{cases} x_0 - 1 = 3 \\ y_0 - 2 = -1 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x_0 = 4 \\ y_0 = 1 \end{cases}$,

所以点 $P(4, 1)$; (5分)

(2) $\because \overrightarrow{AQ} = (\sqrt{2} \cos \varphi + 2\sqrt{2} \sin \varphi, \sqrt{2} \sin \varphi - 2\sqrt{2} \cos \varphi)$

$\therefore |\mathbf{b}|^2 = \left| \frac{\overrightarrow{AQ} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \right|^2 = (\sqrt{2} \sin \varphi - 2\sqrt{2} \cos \varphi)^2$ (7分)

$|\mathbf{b}|^2 + \cos 2\varphi - m > 0$ 即 $m < |\mathbf{b}|^2 + \cos 2\varphi$

即 $m < 2\sin^2 \varphi + 8\cos^2 \varphi - 8\sin \varphi \cos \varphi + \cos 2\varphi$

即 $m < 5 - 4\sin 2\varphi + 4\cos 2\varphi$, 即 $m < 5 - 4\sqrt{2} \sin \left(2\varphi - \frac{\pi}{4} \right)$ (9分)

又 $\because 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $\therefore -\frac{\pi}{4} \leq 2\varphi - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$

$\therefore$ 当 $2\varphi - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 时, $\left[5 - 4\sqrt{2} \sin \left(2\varphi - \frac{\pi}{4} \right) \right]_{\min} = 5 - 4\sqrt{2}$, $\therefore m < 5 - 4\sqrt{2}$ (12分)

21.【详解】(1) 解法一: 由正弦定理有 $\frac{\sin A + \sin B}{\sin A + \sin C} = \frac{\sin \frac{C-A}{2}}{\sin \frac{C+A}{2}}$

则 $\frac{\sin A + \sin B}{2\sin \frac{C+A}{2} \cos \frac{C-A}{2}} = \frac{\sin \frac{C-A}{2}}{\sin \frac{C+A}{2}}$

则 $\sin A + \sin B = 2\sin \frac{C-A}{2} \cos \frac{C-A}{2} = \sin(C-A)$ (3分)

则 $\sin A + \sin(C+A) + \sin(A-C) = 0$

则 $\sin A + 2\sin A \cos C = 0$

则 $\cos C = -\frac{1}{2}$ (5分)

又 $\because 0 < C < \pi$, $\therefore C = \frac{2\pi}{3}$ (6分)

解法二: $\frac{\sin \frac{C-A}{2}}{\sin \frac{C+A}{2}} = \frac{2\cos \frac{C-A}{2} \cdot \sin \frac{C-A}{2}}{2\cos \frac{C-A}{2} \cdot \sin \frac{C+A}{2}} = \frac{\sin(C-A)}{\sin C + \sin A}$, 又 $\because \frac{a+b}{a+c} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin C + \sin A}$,

$\therefore \frac{\sin(C-A)}{\sin C + \sin A} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin C + \sin A}$, $\therefore \sin(C-A) = \sin A + \sin B$, (3分)

又 $\because \sin B = \sin(A+C)$, $\therefore \sin(C-A) = \sin A + \sin(A+C)$ (5 分)
展开得 $\sin A + 2\sin A \cos C = 0$, 又 $\sin A \in (0, 1)$,

$\therefore \cos C = -\frac{1}{2}$, 又 $\because 0 < C < \pi$, 故 $C = \frac{2\pi}{3}$ (6 分)

(2) 解法一: 由等面积知, $S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD} = S_{\triangle ABC}$ (7 分)

即 $\frac{1}{2} \cdot b |CD| \cdot \sin \angle ACD + \frac{1}{2} \cdot a \cdot |CD| \cdot \sin \angle BCD = \frac{1}{2} ab \sin \angle ACB = \frac{\sqrt{3}}{4} ab$...
..... (9 分)

即 $\frac{\sin \angle ACD}{a} + \frac{\sin \angle BCD}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2|CD|}$, $\therefore |CD| = 1$ (12 分)

解法二:

(2) 在 $\triangle BCD$ 中, 由正弦定理得 $\frac{\sin \angle BCD}{BD} = \frac{\sin B}{CD}$, 则 $\sin \angle BCD = \frac{BD \cdot \sin B}{CD}$;
..... (7 分)

在 $\triangle ACD$ 中, 由正弦定理得 $\frac{\sin \angle ACD}{AD} = \frac{\sin A}{CD}$, 则 $\sin \angle ACD = \frac{AD \cdot \sin A}{CD}$,
 $\therefore \frac{\sin \angle BCD}{b} + \frac{\sin \angle ACD}{a} = \frac{BD \cdot \sin B}{CD \cdot b} + \frac{AD \cdot \sin A}{CD \cdot a} = \frac{BD \cdot \sin A}{CD \cdot a} + \frac{AD \cdot \sin A}{CD \cdot a} = \dots$
..... (9 分)

$\frac{(BD+AD) \cdot \sin A}{CD \cdot a} = \frac{c \cdot \sin A}{CD \cdot a} = \frac{a \cdot \sin C}{CD \cdot a} = \frac{\sin C}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2CD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore |CD| = 1$
..... (12 分)

22. 【详解】(1) 由题意知, $\triangle A'AB \cong \triangle A'AD$,

所以得到 $A'D = A'B$, 连接 $A'O$, 则 $BD \perp A'O$,

又 $\because BD \perp AO$, 且 $A'O \cap AO = O$, $\therefore BD \perp$ 平面 $ACC'A'$; ... (5 分)

(2) 过 O' 作底面 $ABCD$ 的垂线 $O'H$, H 为垂足, 由第(1)可知, H 点必在 AC 上,

过 H 点作 $HM \perp l$, 连接 $O'M$, 则易证 $l \perp O'M$,

所以 $\angle O'MH$ 为二面角 $A'-l-D$ 的平面角 (7 分)

$\therefore$ 在 $Rt\triangle O'MH$ 中 $\tan \theta = \frac{O'H}{HM}$, 又 $HM = OB = 3$,

$\therefore \tan \theta = \frac{O'H}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, 故 $O'H = 2\sqrt{6}$, 在平行四边形 $ACC'A'$ 中,

由余弦定理得 $\cos \angle A'AO = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\therefore \sin \angle A'AO = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

又 $O'H = AA' \times \sin \angle A'AO$, 解得 $a = 6$, (9 分)

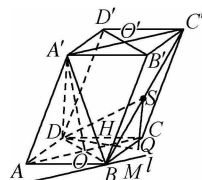
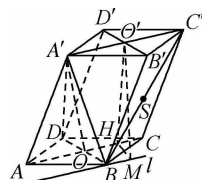
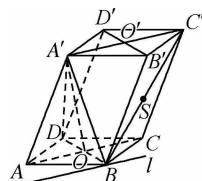
连接 DS , 过 S 点作 SQ 垂直平面 $ABCD$, 连接 DQ , 则 $\angle SDQ$ 即为所求,

又 S 点为 BC' 的中点, $\therefore SQ = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} = \sqrt{6}$.

在 $\triangle BDC'$ 中, $BD = 6$, $BC' = 6\sqrt{3}$, $DC' = 6\sqrt{3}$,

由余弦定理得 $DS = 3\sqrt{5}$ (或者由中线定理计算 DS), (11 分)

$\therefore \sin \angle SDQ = \frac{SQ}{SD} = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{15}$ (12 分)



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线