2020～2021学年湖北省新高考模拟联考

数　学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：新高考范围。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集为U，集合A，B为U的子集，若$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$，则$A\cap B=$

A. $\complement_U B$　　B. $\complement_U A$　　C. A　　D. B

2. 在平面直角坐标系xOy中，角α的顶点为O，始边为x轴的非负半轴，若点$P(-1,2)$是角α终边上的一点，则$\tan(\pi-2\alpha)$等于

A. $-\frac{3}{4}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $-\frac{4}{3}$　　D. $\frac{4}{3}$

3. 已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{16}=1(a>0)$的一条渐近线方程为$2x-y=0$，$F_1$，$F_2$分别是双曲线$C$的左、右焦点，$P$为双曲线$C$上一点，若$|PF_1|=5$，则$|PF_2|=$

A. 1　　B. 9　　C. 1或9　　D. 3或9

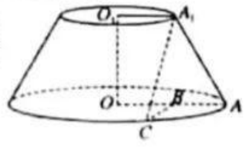
4. 已知复数$z_n=1+i+i^2+\cdots+i^n$（i为虚数单位，$n\in N^*$），若$M=\{z|z=z_s\cdot z_t(s,t=1,2,\cdots,n)\}$，从$M$中任取一个元素，其模为1的概率为

A. $\frac{3}{7}$　　B. $\frac{2}{7}$　　C. $\frac{1}{7}$　　D. $\frac{1}{n}$

5. 生物体的生长都经过发生、发展、成熟三个阶段，每个阶段的生长速度各不相同，通常在发生阶段生长速度较为缓慢、在发展阶段速度加快、在成熟阶段速度又趋于缓慢，按照上述三个阶段生长得到的变化曲线称为生长曲线. 美国生物学家和人口统计学家雷蒙德·皮尔提出一种能较好地描述生物生长规律的生长曲线，称为"皮尔曲线"，常用"皮尔曲线"的函数解析式为$f(x)=\frac{K}{1+a^{kx+b}}(K>0,a>1,k<0)$. 一种刚栽种的果树的生长曲线的函数解析式为$f(x)=\frac{10}{1+3^{kx+b}}(x\in N)$，$x$表示果树生长的年数，$f(x)$表示生长第$x$年果树的高度，若刚栽种时该果树高为1 m，经过一年，该果树高为2.5 m，则$f(4)-f(3)=$

A. 1 m　　B. 1.5 m　　C. 2 m　　D. 2.5 m

6. 如图，圆台OO_1的上底面半径为$O_1A_1=1$，下底面半径为$OA=2$，母线长$AA_1=2$，过OA的中点B作OA的垂线交圆O于点C，则异面直线OO_1与A_1C所成角的大小为



A. 90°　　B. 60°
C. 45°　　D. 30°

官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601
9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

7. “杨辉三角”是中国古代数学文化的瑰宝之一，最早在中国南宋数学家杨辉1261年所著的《详解九章算法》一书中出现，欧洲数学家帕斯卡在1654年才发现这一规律，比杨辉要晚近四百年. 在由二项式系数所构成的“杨辉三角”中(如下图)，记第2行的第3个数字为a_1、第3行的第3个数字为a_2，……，第n $(n\geq 2)$行的第3个数字为a_{n-1}，则$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=$

第0行 1
第1行 1 1
第2行 1 2 1
第3行 1 3 3 1
第4行 1 4 6 4 1
第5行 1 5 10 10 5 1
…… …… …… ……

A. 96　　B. 120　　C. 186　　D. 220

8. 已知点P在直线$x+y=4$上，过点P作圆$O:x^2+y^2=4$的两条切线，切点分别为A，B，则点$M(3,2)$到直线AB距离的最大值为

A. $\sqrt{5}$　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{2}$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 在管理学研究中，有一种衡量个体领导力的模型，称为“五力模型”，即一个人的领导力由五种能力——影响力、控制力、决断力、前瞻力和感召力构成. 右图是某企业对两位领导人领导力的测评图，其中每项能力分为三个等级，“一般”记为4分、“较强”记为5分、“很强”记为6分，把分值称为能力指标，则下列判断正确的是

A. 甲、乙的五项能力指标的均值相同

B. 甲、乙的五项能力指标的方差相同

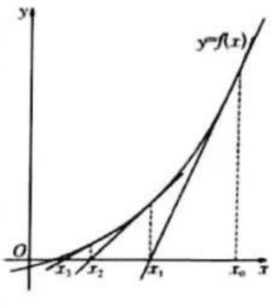
C. 如果从控制力、决断力、前瞻力考虑，乙的领导力高于甲的领导力

D. 如果从影响力、控制力、感召力考虑，甲的领导力高于乙的领导力

10. 已知两个不为零的实数x，y满足$x<y$，则下列结论正确的是

A. $xy<y^2$　　B. $3^{|x-y|}>1$　　C. $x|x|<y|y|$　　D. $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}<e^x-e^y$

11. 英国数学家牛顿在17世纪给出了一种求方程近似根的方法——牛顿迭代法，做法如下：如图，设r是$f(x)=0$的根，选取x_0作为r的初始近似值，过点$(x_0,f(x_0))$作曲线$y=f(x)$的切线l：$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，则l与x轴的交点的横坐标$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$(f'(x_0)\neq 0)$，称$x_1$是$r$的一次近似值；过点$(x_1,f(x_1))$作曲线$y=f(x)$的切线，则该切线与$x$轴的交点的横坐标为$x_2$，称$x_2$是$r$的二次近似值；重复以上过程，得$r$的近似值序列，其中$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$(f'(x_n)\neq 0)$，称$x_{n+1}$是$r$的$n+1$次近似值，这种求方程$f(x)=0$近似解的方法称为牛顿迭代法. 若使用该方法求方程$x^2=2$的近似解，则



A. 若取初始近似值为1，则该方程解的二次近似值为$\frac{17}{12}$

B. 若取初始近似值为2，则该方程解的二次近似值为$\frac{17}{12}$

C. $x_4=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}+\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}+\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$

D. $x_4=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$

官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

12. 已知函数 $f(x)=\sin^n x+\cos^n x(n\in\mathbf{N}^*)$，则

A. 对任意正奇数 n，$f(x)$ 为奇函数

B. 对任意正整数 n，$f(x)$ 的图象都关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称

C. 当 $n=3$ 时，$f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. 当 $n=4$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间是 $\left[-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$

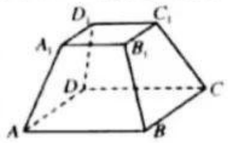
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}|\boldsymbol{a}|$，则向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为________.

14. 请写出一个函数 $f(x)=$________________，使之同时具有如下性质：① $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)=f(4-x)$，② $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x+4)=f(x)$.

15. 已知椭圆 C 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，直线 AB 过 F_1 与椭圆交于 A,B 两点，当 $\triangle F_2AB$ 为正三角形时，该椭圆的离心率为________.

16. 在上、下底面均为正方形的四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $AA_1=BB_1=CC_1=DD_1=\sqrt{2}$，$AB=2$，$A_1B_1=1$，则该四棱台的表面积为________；该四棱台外接球的体积为________.（本小题第一空 2 分，第二空 3 分）



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

在等比数列 $\{a_n\}$ 中，公比 $q>0$，其前 n 项和为 S_n，且 $S_2=6$，____________.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $b_n=\log_{a_n}2$，且数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_1=1$，$c_{n+1}-c_n=b_{n+1}b_n$，求数列 $\{c_n\}$ 的通项公式.

从① $S_4=30$，② $S_6-S_4=96$，③ a_3 是 S_3 与 2 的等差中项，这三个条件中任选一个，补充到上面问题中的横线上，并作答.

注：如果选择多个条件分别解答，按照第一个解答计分.

18.（本小题满分 12 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$b\cos C=a+\frac{\sqrt{3}}{3}c\sin B$，点 D 在边 AC 上，且 $AD=2DC$，$BD=2$.

(1)求角 B 的大小；

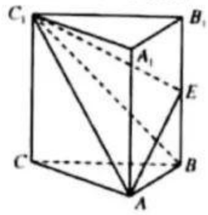
(2)求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

19.（本小题满分 12 分）

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$ 底面 ABC，$\triangle ABC$ 为正三角形，$AB=AA_1=2$，E 是 BB_1 的中点.

(1)求证：平面 $AEC_1\perp$ 平面 AA_1C_1C；

(2)求二面角 $B-AC_1-E$ 的余弦值.



官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

20.(本小题满分 12 分)

已知抛物线 $C:x^2=4y$ 的焦点为 F,准线为 l. 设过点 F 且不与 x 轴平行的直线 m 与抛物线 C 交于 A,B 两点,线段 AB 的中点为 M,过 M 作直线垂直于 l,垂足为 N,直线 MN 与抛物线 C 交于点 P.

(1)求证:点 P 是线段 MN 的中点.

(2)若抛物线 C 在点 P 处的切线与 y 轴交于点 Q,问是否存在直线 m,使得四边形 $MPQF$ 是有一个内角为 60° 的菱形?若存在,请求出直线 m 的方程;若不存在,请说明理由.

21.(本小题满分 12 分)

现代战争中,经常使用战斗机携带空对空导弹攻击对方战机,在实际演习中空对空导弹的命中率约为 20%,由于飞行员的综合素质和经验的不同,不同的飞行员使用空对空导弹命中对方战机的概率也不尽相同. 在一次演习中,红方的甲、乙两名优秀飞行员发射一枚空对空导弹命中蓝方战机的概率分别为 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{4}$,两名飞行员各携带 4 枚空对空导弹.

(1)甲飞行员单独攻击蓝方一架战机,连续不断地发射导弹攻击,一旦命中或导弹用完即停止攻击,各次攻击相互独立,求甲飞行员能够命中蓝方战机的概率?

(2)蓝方机群共有 8 架战机,若甲、乙共同攻击(战机均在攻击范围之内,每枚导弹只攻击其中一架战机,甲、乙不同时攻击同一架战机).

①若一轮攻击中,每人只有两次进攻机会,记一轮攻击中,击中蓝方战机数为 X,求 X 的分布列;

②若实施两轮攻击(用完携带的导弹),记命中蓝方战机数为 Y,求 Y 的数学期望 $E(Y)$.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=a\ln x+x+1(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)若不等式 $x^a f(x)\leqslant e^x$ 对任意的 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

官方微信公众号:zizzsw 咨询热线:010-5601 9830
官方网站:www.zizzs.com 微信客服:zizzs2018

2020～2021学年湖北省新高考模拟联考数学参考答案、提示及评分细则

1. D　因为$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$，所以$B\subseteq A$，所以$A\cap B=B$. 故选D.

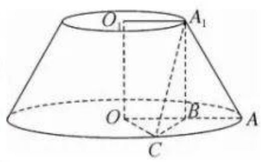
2. C　由题意，得$\tan\alpha=-2$，从而$\tan(\pi-2\alpha)=-\tan 2\alpha=-\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{2\times(-2)}{1-(-2)^2}=-\frac{4}{3}$. 故选C.

3. B　由题意知$\frac{4}{a}=2$，所以$a=2$，所以$c=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$，所以$|PF_1|=5<2+2\sqrt{5}=a+c$，所以点P在双曲线C的左支上，所以$|PF_2|-|PF_1|=4$，所以$|PF_2|=9$. 故选B.

4. A　因为$z_n=1+i+i^2+\cdots+i^n=\frac{1-i^{n+1}}{1-i}$，所以$z_n=1+i,i,0,1,1+i,i,0,1,\cdots$，即$z_n$的取值只有四个数$1+i,i,0,1$，所以$M=\{0,1,-1,i,2i,1+i,-1+i\}$，$M$中共7个元素，其中模为1的有三个元素，故所求概率为$\frac{3}{7}$. 故选A.

5. B　根据已知$f(0)=1$ m，$f(1)=2.5$ m，得$1+3^b=10$且$1+3^{k+b}=4$，得$b=2,k=-1$，所以$f(x)=\frac{10}{1+3^{-x+2}}$，从而$f(3)=\frac{10}{1+3^{-1}}=\frac{30}{4}=7.5$ m，$f(4)=\frac{10}{1+3^{-2}}=9$ m，所以$f(4)-f(3)=1.5$ m. 故选B.

6. C　在直角梯形OO_1A_1A中，因为B为OA的中点，$OA=2$，所以$O_1A_1=OB=AB=1$，连接A_1B，易证四边形OO_1A_1B为矩形，所以$OO_1\parallel A_1B$，所以$\angle BA_1C$为异面直线OO_1与A_1C所成的角，在直角三角形AA_1B中，$AA_1=2$，所以$A_1B=\sqrt{3}$；连接OC，在直角三角形OBC中，由$OB=1$，$OC=2$，得$BC=\sqrt{3}$；在直角三角形A_1BC中，$BC=A_1B$，所以$\angle BA_1C=45°$. 故选C.



7. D　$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=C_2^2+C_3^2+C_4^2+\cdots+C_{11}^2=C_3^3+C_3^2+C_4^2+\cdots+C_{11}^2=C_4^3+C_4^2+\cdots+C_{11}^2=C_5^3+C_5^2+\cdots+C_{11}^2=\cdots=C_{12}^3=\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=220$. 故选D.

8. A　设$P(a,b)$，则$a+b=4$，以OP为直径的圆的方程是$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2)$，与圆$O$的方程$x^2+y^2=4$相减，得直线$AB$的方程为$ax+by=4$，即$ax+by-4=0$，因为$a+b=4$，所以$b=4-a$，代入直线$AB$的方程，得$ax+(4-a)y-4=0$，即$a(x-y)+4y-4=0$，当$x=y$且$4y-4=0$，即$x=1,y=1$时该方程恒成立，所以直线$AB$过定点$N(1,1)$，点$M$到直线$AB$距离的最大值即为点$M,N$之间的距离，$|MN|=\sqrt{5}$，所以点$M(3,2)$到直线$AB$距离的最大值为$\sqrt{5}$. 故选A.

9. AB　甲的五项能力指标为6，5，4，5，4，平均值为$\frac{6+5+4+5+4}{5}=4.8$；

乙的五项能力指标为6，4，5，4，5，平均值为$\frac{6+4+5+4+5}{5}=4.8$，则A正确；

由于均值相同，各项指标数也相同(只是顺序不同)，所以方差也相同，则B正确；

从控制力、决断力、前瞻力考虑，甲的均值为$\frac{14}{3}$，乙的均值为$\frac{13}{3}$，所以甲的领导力高于乙的领导力，则C不正确；

从影响力、控制力、感召力考虑，甲、乙的指标均值相同，方差也相同，所以甲、乙水平相当，则D不正确. 故选AB.

10. BC　因为$x<y$，当$y>0$时，$xy<y^2$，当$y<0$时，$xy>y^2$，则A错误；因为$x<y$，所以$|x-y|>0$，所以$3^{|x-y|}>1$，则B正确；令$f(x)=x|x|$，易知$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，又$x<y$，所以$f(x)<f(y)$，即$x|x|<y|y|$，则C正确；对于D，法一：令$g(x)=\frac{1}{x}-e^x$，易知$g(x)$在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上单调递减，不妨设$0<x<y$，则$g(x)>g(y)$，即$\frac{1}{x}$

官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

$-e^x>\frac{1}{y}-e^y$,亦即$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}>e^x-e^y$,则D错误;法二:取$x=-1,y=1$,则$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=-2>e^{-1}-e$,则D错误. 故选BC.

11. ABD　构造函数$f(x)=x^2-2$,则$f'(x)=2x$,取初始近似值$x_0=1$,则$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=1-\frac{1-2}{2\times1}=\frac{3}{2}$,$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=\frac{3}{2}-\frac{\frac{9}{4}-2}{2\times\frac{3}{2}}=\frac{17}{12}$,则A正确;

取初始近似值$x_0=2$,则$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=2-\frac{4-2}{2\times2}=\frac{3}{2}$,$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=\frac{3}{2}-\frac{\frac{9}{4}-2}{2\times\frac{3}{2}}=\frac{17}{12}$,则B正确;

根据题意,可知$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$,$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$,$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$,$x_4=x_3-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$,上述四式相加,得$x_4=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$,则C不正确,D正确. 故选ABD.

12. BC　取$n=1$,则$f(x)=\sin x+\cos x$,从而$f(0)=1\neq0$,此时$f(x)$不是奇函数,则A错误;因为$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos^n x+\sin^n x=f(x)$,所以$f(x)$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{4}$对称,则B正确;

当$n=3$时,$f'(x)=3\sin^2x\cos x-3\cos^2x\sin x=3\sin x\cos x(\sin x-\cos x)$,当$x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$时,$f'(x)<0$;当$x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$时,$f'(x)>0$,所以$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$上单调递减,在$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增,所以$f(x)$的最小值为$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{2}}{2}$,故C正确;

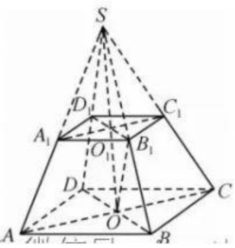
当$n=4$时,$f(x)=\sin^4x+\cos^4x=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{1-\cos 4x}{4}=\frac{1}{4}\cos 4x+\frac{3}{4}$,则$f(x)$的递增区间为$\left[-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\frac{k\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$,则D错误. 故选BC.

13. $\frac{2\pi}{3}$　设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$夹角为$\theta$,由$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}|\boldsymbol{a}|$,得$|\boldsymbol{a}|^2+4|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta+4|\boldsymbol{b}|^2=3|\boldsymbol{a}|^2$,结合$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,解得$\cos\theta=-\frac{1}{2}$,又$0\leqslant\theta\leqslant\pi$,所以$\theta=\frac{2\pi}{3}$.

14. $\cos\frac{\pi}{2}x$　性质①②分别表示$f(x)$关于直线$x=2$对称和以4为周期,答案不唯一,写出一个即可.

15. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　不妨设椭圆的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,根据椭圆定义,$|AF_1|=2a-|AF_2|$,$|BF_1|=2a-|BF_2|$,$\triangle F_2AB$为正三角形,$|AF_2|=|BF_2|$,所以$|AF_1|=|BF_1|$,即$F_1$为线段$AB$的中点,根据椭圆的对称性知$AB$垂直于$x$轴. 设$|F_1F_2|=2c$,则$|AF_1|=2c\tan30^\circ=\frac{2\sqrt{3}c}{3}$,$|AF_2|=\frac{2c}{\cos30^\circ}=\frac{4\sqrt{3}c}{3}$. 因为$|AF_1|+|AF_2|=2a$,即$2\sqrt{3}c=2a$,所以$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

16. $5+3\sqrt{7}$(2分)　$\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$(3分)　在等腰梯形DCC_1D_1中,过C_1作$C_1H\perp DC$,垂足为H,易求$CH=\frac{1}{2}$,$C_1H=\frac{\sqrt{7}}{2}$,则四棱台的表面积为$S=S_{上底}+S_{下底}+S_{侧}=1+4+4\times\frac{(1+2)}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{2}=5+3\sqrt{7}$. 设$AC\cap BD=O$,$A_1C_1\cap B_1D_1=O_1$. 由棱台的性质,可将该棱台补成四棱锥(如右图),因为$AB=2$,$A_1B_1=1$,可知$\triangle SA_1B_1$与$\triangle SAB$相似比为1∶2;则$SA=2AA_1=2\sqrt{2}$,



官方微信公众号：zizzsw
咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com
微信客服：zizzs2018

$AO=\sqrt{2}$，则 $SO=\sqrt{6}$，则 $OO_1=\frac{\sqrt{6}}{2}$，即该四棱台的高为$\frac{\sqrt{6}}{2}$. 由于上、下底面都是正方形，则外接球的球心在 OO_1 上，在平面 B_1BOO_1 上，由于 $OO_1=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$B_1O_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $OB_1=\sqrt{2}=OB$，即点 O 到点 B 与到点 B_1 的距离相等，同理 O 到 A，A_1，C，C_1，D，D_1 的距离均为$\sqrt{2}$，于是 O 为外接球的球心，且外接球的半径 $r=\sqrt{2}$，故该四棱台外接球的体积为$\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$.

17. 解：(1)若选①$S_4=30$.

由 $S_2=6$ 及 $S_4=30$，得 $a_1+a_2=6$，$a_1+a_2+a_3+a_4=30$，

两式相减，得 $a_3+a_4=24$，…… 2分

即 $q^2(a_1+a_2)=24$，所以 $q^2=4$，由 $q>0$，得 $q=2$，…… 3分

代入 $a_1+a_2=6$，得 $a_1+2a_1=6$，解得 $a_1=2$，…… 4分

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^n$. …… 5分

若②$S_6-S_4=96$.

因为 $S_6-S_4=a_5+a_6=96$，$a_1+a_2=6$，所以 $a_1q^4+a_1q^5=96$，$a_1+a_1q=6$，…… 2分

两式相除，得 $q^4=16$，结合 $q>0$，得 $q=2$，…… 3分

所以 $a_1+2a_1=6$，解得 $a_1=2$，…… 4分

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^n$. …… 5分

若选③a_3 是 S_3 与 2 的等差中项.

由 a_3 是 S_3 与 2 的等差中项，得 $2a_3=S_3+2$，

则 $2a_3=a_1+a_2+a_3+2$，

由 $a_1+a_2=6$，得 $a_3=8$，…… 2分

由通项公式，得 $a_1+a_1q=6$，$a_1q^2=8$，

消去 a_1，得 $3q^2-4q-4=0$，结合 $q>0$，解得 $q=2$，…… 3分

代入 $a_1+a_1q=6$，得 $a_1=2$，…… 4分

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^n$. …… 5分

(2)由(1)，得 $b_n=\log_{a_n}2=\frac{1}{\log_2 a_n}=\frac{1}{\log_2 2^n}=\frac{1}{n}$. …… 6分

$c_{n+1}-c_n=b_nb_{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，…… 7分

所以当 $n\geqslant 2$ 时，$c_n=c_1+(c_2-c_1)+(c_3-c_2)+(c_4-c_3)+\cdots+(c_n-c_{n-1})$

$=1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}$. …… 9分

又 $c_1=1$ 也适合上式，故数列$\{c_n\}$的通项公式是 $c_n=2-\frac{1}{n}$. …… 10分

18. 解：(1)由 $b\cos C=a+\frac{\sqrt{3}}{3}c\sin B$ 及正弦定理，得 $\sin B\cos C=\sin A+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin B$，…… 2分

又 $A=\pi-(B+C)$，所以 $\sin B\cos C=\sin(B+C)+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin B\sin C$，即 $\cos B\sin C+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin B=0$，…… 4分

因为 $0<C<\pi$，$\sin C\neq 0$，所以 $\tan B=-\sqrt{3}$，

又 $0<B<\pi$，得 $B=\frac{2\pi}{3}$. …… 6分

(2)方法1：因为点 D 在边 AC 上，且 $AD=2DC$，所以

官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, ………… 7分

$\overrightarrow{BD}^2=\frac{1}{9}\overrightarrow{BA}^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{4}{9}\overrightarrow{BC}^2$,即 $4=\frac{1}{9}c^2+\frac{4}{9}ac\cos\frac{2\pi}{3}+\frac{4}{9}a^2$,即 $4a^2+c^2-2ac=36$, ………… 8分

由 $4a^2+c^2\geqslant 4ac$,可得 $4ac-2ac\leqslant 36$,即 $ac\leqslant 18$,当且仅当 $2a=c$ 时,等号成立, ………… 10分

所以$\triangle ABC$面积的最大值为 $\frac{1}{2}\times 18\times\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$,当且仅当 $2a=c$,即 $a=3,c=6$ 时等号成立. ………… 12分

方法 2. 设 $DC=t$,则 $AD=2t$,$\angle ADB=\theta$,

在$\triangle ABD$中,由余弦定理,得 $c^2=4+4t^2-2\times 2\times 2t\cos\theta$,即 $c^2=4+4t^2-8t\cos\theta$; ①

同理,在$\triangle BCD$中,由余弦定理,得 $a^2=4+t^2+4t\cos\theta$, ②

由①②消掉 $\cos\theta$,得 $c^2+2a^2=12+6t^2$. ③ ………… 7分

在$\triangle ABC$中,由余弦定理,得 $9t^2=a^2+c^2+ac$,即 $t^2=\frac{a^2+c^2+ac}{9}$, ④

把④代入③,得 $4a^2+c^2-2ac=36$, ………… 8分

由 $4a^2+c^2\geqslant 4ac$,可得 $4ac-2ac\leqslant 36$,即 $ac\leqslant 18$,所以$\triangle ABC$面积的最大值为 $\frac{1}{2}\times 18\times\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$,当且仅当 $2a=c$,

即 $a=3,c=6$ 时等号成立. ………… 12分

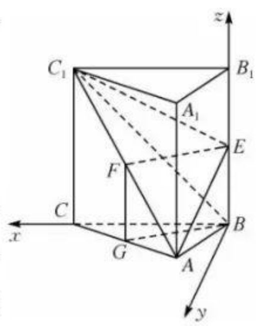
19. (1)证明:取 AC_1 的中点 F,取 AC 的中点 G,连接 EF,FG,BG.

因为 E 是 BB_1 的中点,所以 $BE/\!/CC_1$,$BE=\frac{1}{2}CC_1$. ………… 1分

因为 FG 是$\triangle ACC_1$的中位线,所以 $FG/\!/CC_1$,$FG=\frac{1}{2}CC_1$, ………… 2分

所以 $BE/\!/FG$,$BE=FG$,

所以四边形 $BEFG$ 为平行四边形,所以 $EF/\!/BG$. ………… 3分



因为$\triangle ABC$为正三角形,G 为 AC 的中点,所以 $BG\perp AC$.

因为 $AA_1\perp$底面 ABC,$BG\subset$底面 ABC,所以 $AA_1\perp BG$,

所以 $EF\perp AC$,$EF\perp AA_1$.

又 $AA_1\cap AC=A$,$A_1A,AC\subset$平面 AA_1C_1C,所以 $EF\perp$平面 AA_1C_1C, ………… 4分

又 $EF\subset$平面 AEC_1,所以平面 $AEC_1\perp$平面 AA_1C_1C. ………… 5分

(2)解:以 B 为原点,分别以 $\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{BB_1}$ 的方向为 x 轴,z 轴的正方向,建立空间直角坐标系 B-xyz(如图所示),

则 $B(0,0,0)$,$A(1,\sqrt{3},0)$,$C_1(2,0,2)$,$E(0,0,1)$, ………… 6分

从而 $\overrightarrow{AC_1}=(1,-\sqrt{3},2)$,$\overrightarrow{BA}=(1,\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{EC_1}=(2,0,1)$.

设平面 ABC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+\sqrt{3}y=0,\\ x-\sqrt{3}y+2z=0,\end{cases}$

取 $x=\sqrt{3}$,则 $\begin{cases}y=-1,\\ z=-\sqrt{3},\end{cases}$ 所以平面 ABC_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-1,-\sqrt{3})$. ………… 8分

设平面 AEC_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EC_1}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2a+c=0,\\ a-\sqrt{3}b+2c=0,\end{cases}$

取 $a=1$,则 $\begin{cases}b=-\sqrt{3},\\ c=-2,\end{cases}$ 所以平面 AEC_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,-\sqrt{3},-2)$. ………… 10分

官方微信公众号:zizzsw 咨询热线:010-5601 9830
官方网站:www.zizzs.com 微信客服:zizzs2018

设向量 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}\times2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{42}}{7}$，

由图知，二面角 $B-AC_1-E$ 为锐二面角，

所以二面角 $B-AC_1-E$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$. ……………………………… 12 分

20. (1)证明：由题意知直线 m 的斜率存在且不为 0，故设直线 m 的方程为 $y=kx+1(k\neq0)$，

代入 $x^2=4y$，并整理得 $x^2-4kx-4=0$.

所以 $\Delta=16k^2+16>0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4$. ……………… 2 分

设 $M(x_0,y_0)$，则 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=2k$，$y_0=kx_0+1=2k^2+1$，即 $M(2k,2k^2+1)$. ……………… 3 分

由 $MN\perp l$，得 $N(2k,-1)$，

所以 MN 中点的坐标为 $(2k,k^2)$.

将 $x=2k$ 代入 $x^2=4y$，解得 $y=k^2$，则 $P(2k,k^2)$，所以点 P 是 MN 的中点. ……………… 5 分

(2)解：由 $x^2=4y$，得 $y=\frac{x^2}{4}$，则 $y'=\frac{x}{2}$，

所以抛物线 C 在点 $P(2k,k^2)$ 处的切线 PQ 的斜率为 k，……………………………… 6 分

又由直线 m 的斜率为 k，可得 $m/\!/PQ$；

又 $MN/\!/y$ 轴，所以四边形 $MPQF$ 为平行四边形. ……………………………… 7 分

而 $|MF|=\sqrt{(2k)^2+(2k^2+1-1)^2}=2\sqrt{k^2(k^2+1)}$，$|MP|=|(2k^2+1)-k^2|=k^2+1$，

由 $|MF|=|MP|$，得 $2\sqrt{k^2(k^2+1)}=k^2+1$，解得 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，即当 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，四边形 $MPQF$ 为菱形，……………… 9 分

且此时 $|PF|=\sqrt{(2k-0)^2+(k^2-1)^2}=k^2+1=|MP|=|MF|$，所以 $\angle PMF=60^\circ$，

直线 m 的方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$，即 $x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}=0$，或 $x+\sqrt{3}y-\sqrt{3}=0$，……………… 11 分

所以存在直线 m，使得四边形 $MPQF$ 是有一个内角为 60° 的菱形. ……………………………… 12 分

21. 解：设甲、乙两名飞行员发射的第 i 枚导弹命中对方战机分别为事件 A_i，B_i，则 $P(A_i)=\frac{1}{3}$，$P(B_i)=\frac{1}{4}$.

(1)设甲飞行员能够击中蓝方战机为事件 M，则 $M=A_1+\overline{A_1}\cdot A_2+\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3+\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\cdot A_4$，………… 1 分

所以 $P(M)=P(A_1+\overline{A_1}\cdot A_2+\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3+\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\cdot A_4)$

$=P(A_1)+P(\overline{A_1}\cdot A_2)+P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3)+P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\cdot A_4)$

$=P(A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2)+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3)+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})P(A_4)$

$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{65}{81}$. ……………………………… 4 分

(2)①$X=0,1,2,3,4$，则

$P(X=0)=\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{4}$，……………………………… 5 分

$P(X=1)=C_2^1\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2\times C_2^1\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{5}{12}$，……………………………… 6 分

$P(X=2)=\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+C_2^1\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times C_2^1\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{37}{144}$，……………… 7 分

$P(X=3)=\left(\frac{1}{3}\right)^2\times C_2^1\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2\times C_2^1\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{72}$，……………………………… 8 分

官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

$P(X=4)=\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{144}$, ………………………………………………………… 9分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{37}{144}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{144}$

………………………………………………………………………………………… 10分

②记两轮攻击中甲命中战机数为 Y_1，则 $Y_1\sim B\left(4,\frac{1}{3}\right)$，乙命中战机数为 Y_2，则 $Y_2\sim B\left(4,\frac{1}{4}\right)$，

所以 $E(Y)=E(Y_1)+E(Y_2)=\frac{4}{3}+\frac{4}{4}=\frac{7}{3}$. ………………………………………………… 12分

22. 解：函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

(1) $f'(x)=\frac{a}{x}+1=\frac{x+a}{x}$, ………………………………………………………………… 1分

当 $a\geqslant0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增； ……………………………………… 2分

当 $a<0$ 时，若 $0<x<-a$，则 $f'(x)<0$；若 $x>-a$，则 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,-a)$ 上单调递减，在 $(-a,+\infty)$ 上单调递增. …………………………………… 4分

(2) 由 $x^e f(x)\leqslant e^x$，得 $x^e(a\ln x+x+1)\leqslant e^x$，

因为 $x>1$，所以 $a\ln x+x+1\leqslant x^{-e}e^x$，$\ln x>0$，

所以 $a\leqslant\frac{x^{-e}e^x-x-1}{\ln x}$. …………………………………………………………………… 5分

$x^{-e}e^x-x-1=e^{\ln x^{-e}}e^x-x-1=e^{x-e\ln x}-x-1$.

设 $g(x)=e^x-x-1$，则 $g'(x)=e^x-1$.

当 $x<0$ 时，$g'(x)<0$；当 $x=0$ 时，$g'(x)=0$；当 $x>0$ 时 $g'(x)>0$，

所以 $x=0$ 是 $g(x)$ 的极小值点，也是 $g(x)$ 的最小值点，

所以 $g(x)_{\min}=g(0)=0$，即对任意 $x\in\mathbf{R}$，$e^x\geqslant x+1$（当且仅当 $x=0$ 时等号成立）. …………………… 7分

所以 $e^{x-e\ln x}\geqslant x-e\ln x+1$，即 $e^{x-e\ln x}-x-1\geqslant-e\ln x$（当且仅当 $x-e\ln x=0$ 时等号成立）. ……………… 9分

令 $h(x)=x-e\ln x$，则 $h'(x)=1-\frac{e}{x}=\frac{x-e}{x}$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递减，在 $(e,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $x=e$ 是 $h(x)$ 的极小值点，也是 $g(x)$ 的最小值点，

所以 $h(x)_{\min}=h(e)=0$，即当且仅当 $x=e$ 时，$x-e\ln x=0$， ………………………………… 10分

所以 $\frac{x^{-e}e^x-x-1}{\ln x}\geqslant\frac{-e\ln x}{\ln x}=-e$，即 $\left(\frac{x^{-e}e^x-x-1}{\ln x}\right)_{\min}=-e$（当且仅当 $x=e$ 时等号成立），

所以 $a\leqslant-e$ 时，$x^e f(x)\leqslant e^x$ 对任意的 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，

故实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-e]$. ……………………………………………………………… 12分

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 ‘’ 专业、专注、有态度 ‘’ 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。