2022—2023学年高中三年级摸底考试

数学试题

本试卷共4页,22题,全卷满分150分。考试用时120分钟。

注意事项:

1.答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。

2.回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1.设集合 $A=\{x\mid x^2<9\}$,$B=\{-2,0,2,3\}$,则 $A\cup B=$

A. $\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 3\}$　　B. $\{x\mid -3<x\leqslant 3\}$

C. $\{x\mid x\leqslant 3\}$　　D. $\{-2,0,2\}$

2.命题“ $\forall x>0,e^x+x>1$”的否定为

A. $\forall x>0,e^x+x\leqslant 1$　　B. $\forall x\leqslant 0,e^x+x\leqslant 1$

C. $\exists x>0,e^x+x\leqslant 1$　　D. $\exists x\leqslant 0,e^x+x\leqslant 1$

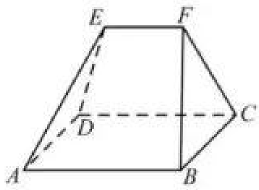
3.已知 $z(-1+\sqrt{3}i)=2$(其中i为虚数单位),则复数 $z=$

A. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$　　B. $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$　　C. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$　　D. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

4.已知函数 $f(x)=2\sin(2\omega x-\frac{\pi}{6})(\omega>0)$ 的最小正周期为 π ,则 $f(x)$ 的图象关于

A. $x=\frac{\pi}{6}$对称　　B. $x=\frac{\pi}{3}$对称　　C. $(\frac{\pi}{6},0)$对称　　D. $(\frac{\pi}{3},0)$对称

5.拟柱体(所有顶点均在两个平行平面内的多面体)可以用辛普森(Simpson)公式 $V=\frac{1}{6}h(S_1+4S_0+S_2)$ 求体积,其中 h 是高,S_1 是上底面面积,S_2 是下底面面积,S_0 是中截面(到上、下底面距离相等的截面)面积.如图所示,在五面体 $ABCDEF$ 中,底面 $ABCD$ 是边长为2的正方形,$EF=1$,且直线 EF 到底面 $ABCD$ 的距离为2,则该五面体的体积为



A. $\frac{7}{3}$　　B. $\frac{8}{3}$　　C.3　　D. $\frac{10}{3}$

6.已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{2}$，F_1,F_2 分别为 C 的左、右焦点，过 F_1 的直线与 C 的左支交于 A,B 两点，若 $|AB|$ 的最小值为 4，则 $\triangle ABF_2$ 周长的最小值为

A.8　　B.12　　C.16　　D.24

7.从装有 a 个红球和 b 个蓝球的袋中（a,b 均不小于 2），每次不放回地随机摸出一球.记"第一次摸球时摸到红球"为 A_1，"第一次摸球时摸到蓝球"为 A_2；"第二次摸球时摸到红球"为 B_1，"第二次摸球时摸到蓝球"为 B_2，则下列说法错误的是

A. $P(B_1)=\frac{a}{a+b}$　　B. $P(B_1|A_1)+P(B_2|A_1)=1$

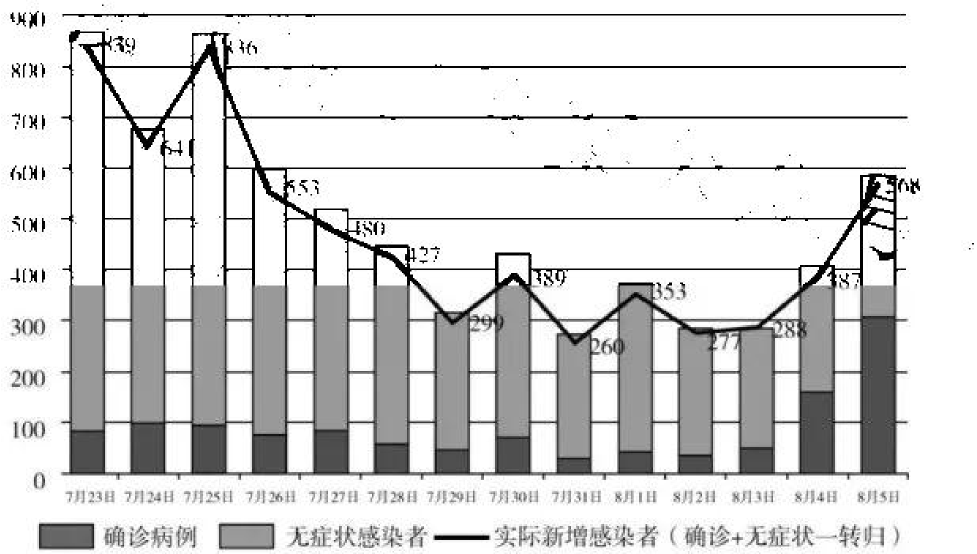
C. $P(B_1)+P(B_2)=1$　　D. $P(B_2|A_1)+P(B_1|A_2)=1$

8.定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(1-x)=f(1+x)$，$f(x-1)=f(x+1)$，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=-x+1$，则方程 $xf(x)=\ln x$ 在 $(0,4)$ 上解的个数为

A.3　　B.4　　C.5　　D.6

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9.下图为 2022 年 8 月 5 日通报的 11 天内 31 省区市疫情趋势，则下列说法正确的是



A.无症状感染者的极差大于 400　　B.确诊病例的方差大于无症状感染者的方差

C.实际新增感染者的平均数小于 389　　D.实际新增感染者的第 80 百分位数为 641

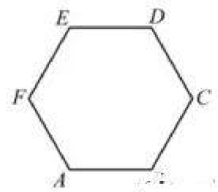
10.如图所示，在正六边形 $ABCDEF$ 中，下列说法正确的是

A. $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BF}$

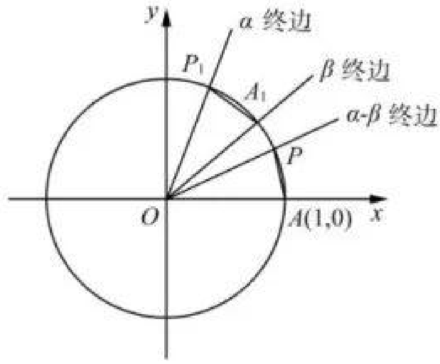
B. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$

C. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|^2$

D. $\overrightarrow{AD}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量为 $\overrightarrow{AB}$



11.如图所示,设单位圆与 x 轴的正半轴相交于点 $A(1,0)$,以 x 轴非负半轴为始边作锐角 α,β,$\alpha-\beta$,它们的终边分别与单位圆相交于点 P_1,A_1,P,则下列说法正确的是



A. $\overset{\frown}{AP}$ 的长度为 $\alpha-\beta$

B.扇形 OA_1P_1 的面积为 $\alpha-\beta$

C.当 A_1 与 P 重合时,$|AP_1|=2\sin\beta$

D.当 $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 时,四边形 OAA_1P_1 面积的最大值为 $\frac{1}{2}$

12.在正四面体 $ABCD$ 中,若 $AB=\sqrt{2}$,则下列说法正确的是

A.该四面体外接球的表面积为 3π

B.直线 AB 与平面 BCD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C.如果点 M 在 CD 上,则 $AM+BM$ 的最小值为 $\sqrt{6}$

D.过线段 AB 一个三等分点且与 AB 垂直的平面截该四面体所得截面的周长为 $\frac{2\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3}$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13.使命题"若 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$,则 $a<b$"为假命题的一组 a,b 的值分别为________.

14.$(x^2-2x+1)^3$ 的展开式中,含 x^3 项的系数为________(用数字作答).

15.过点 $P(-2,0)$ 的直线与圆 $x^2+y^2=3$ 交于 A,B 两点,则 $|PA|\cdot|PB|$ 的值为________.

16.定义在 **R** 上的可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x)-f(-x)+x(\frac{1}{e^x}+e^x)=0$,且在 $(0,+\infty)$ 上有 $f'(x)>\frac{1}{e^2}$ 成立.若实数 a 满足 $f(1-a)-f(a)+e^{a-1}-ae^{a-1}-ae^{-a}\geqslant 0$,则 a 的取值范围是________.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(10 分)

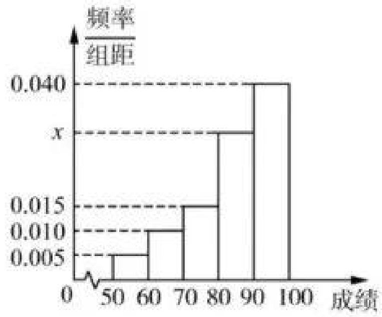
在 $\triangle ABC$ 中,$2\sin\angle ACB=\sqrt{3}\sin\angle ABC$,$AB=2\sqrt{3}$,$BC$ 边上的中线长为 $\sqrt{13}$.

(1)求 AC 的值;

(2)求 $\triangle ABC$ 的面积.

18.(12 分)

为庆祝中国共产主义青年团成立 100 周年，某校团委组织团员参加知识竞赛.根据成绩，制成如图所示的频率分布直方图.



(1)计算 x 的值；

(2)采用按比例分层抽样的方法从成绩在 $[80,90)$，$[90,100]$ 的两组中共抽取 7 人，再从这 7 人中随机抽取 3 人，记 X 为这 3 人中成绩落在 $[80,90)$ 的人数，求 X 的分布列和数学期望.

19.(12 分)

已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，且 $a_{n+1}^2-a_n\cdot a_{n+1}-a_n-1=0$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

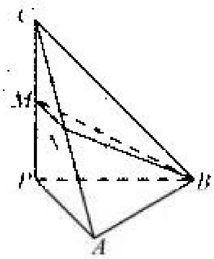
(2)求数列 $\{2^n a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

20.(12 分)

如图，正三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA=2$，M、N 分别为 PC、AC 的中点，$BM\perp MN$.

(1)求点 P 到平面 ABC 的距离；

(2)求平面 BMN 与 ABC 夹角的余弦值.



21.(12 分)

已知点 F 是抛物线 $C:x^2=4y$ 与椭圆 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的公共焦点，椭圆上的点 M 到点 F 的最大距离为 3.

(1)求椭圆的方程；

(2)过点 M 作 C 的两条切线，记切点分别为 A，B，求 $\triangle MAB$ 面积的最大值.

22.(12 分)

已知函数 $f(x)=2ax-ax\cos x-\sin x$.

(1)当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的最大值；

(2)当 $x>0$ 时，$f(x)\geqslant 0$，求 a 的取值范围.

2022-2023 学年高三年级摸底考试

数学试题参考答案

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	A	B	D	C	D	B

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11	12
答案	AD	BCD	ACD	ACD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13、1，−1（只要 $a>0,b<0$ 均可以）；14、 20；15、1；16、$a\le\frac{1}{2}$。

四、解答题：共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤

17.【解析】

（1）因为：$2\sin\angle ACB=\sqrt{3}\sin\angle ABC$， 由正弦定理得：$2AB=\sqrt{3}AC$，

又因为 $AB=2\sqrt{3}$，所以 $AC=4$；

（2）记 BC 的中点为 D，则 $AD=\sqrt{13}$，设 $BD=CD=x$，

因为 $\angle ADB+\angle ADC=\pi$，所以 $\frac{BD^2+AD^2-AB^2}{2AD\cdot BD}+\frac{CD^2+AD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}=0$

即 $\frac{x^2+13-12}{2\sqrt{13}\cdot x}+\frac{x^2+13-16}{2\sqrt{13}\cdot x}=0$，所以 $x=1$，所以 $BC=2$，

所以 $AC^2=BC^2+AB^2$，则 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2=2\sqrt{3}$.

18.【解析】

（1）由频率分布直方图知：$0.005\times10+0.010\times10+0.015\times10+10x+0.040\times10=1$，

所以 $x=0.030$.

（2）按比例分层抽样抽取 7 人，成绩在 $[80,90)$，$[90,100]$ 的人数分别为 3 人，4 人.

所以 χ 的所有可能取值为：$0,1,2,3$；

则 $P(\chi=0)=\frac{C_4^3}{C_7^3}=\frac{4}{35}$， $P(\chi=1)=\frac{C_4^2C_3^1}{C_7^3}=\frac{18}{35}$， $P(\chi=2)=\frac{C_4^1C_3^2}{C_7^3}=\frac{12}{35}$， $P(\chi=3)=\frac{C_3^3}{C_7^3}=\frac{1}{35}$；

则 χ 的分布列为：

χ	0	1	2	3
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

所以 χ 的数学期望为： $E\chi=0\times\frac{4}{35}+1\times\frac{18}{35}+2\times\frac{12}{35}+3\times\frac{1}{35}=\frac{9}{7}$.

19.【解析】

（1）由 $a_{n+1}^2-a_na_{n+1}-a_n-1=0$ 得： $(a_{n+1}+1)(a_{n+1}-a_n-1)=0$，

又因为 $a_{n+1}+1>1$，则 $a_{n+1}-a_n=1$，且 $a_1=1$，

所以 $\{a_n\}$ 是首项为 1 公差为 1 的等差数列，所以 $a_n=n$.

（2）因为， $2^na_n=n\cdot 2^n$，

所以 $S_n=1\times 2+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n\times 2^n$，

$2S_n=1\times 2^2+2\times 2^3+3\times 2^4+\cdots+n\times 2^{n+1}$，

两式相减得： $-S_n=1\times 2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot 2^{n+1}=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n\cdot 2^{n+1}$，

所以 $S_n=2+(n-1)\cdot 2^{n+1}$.

20.【解析】

（1）因为 M,N 分别为 PC,CA 的中点，所以 $MN\,//\,PA$；

因为 $BM\perp MN$，所以 $PA\perp BM$，

取 BC 中点为 D，连接 PD,AD，

因为 $P-ABC$ 为正三棱锥，所以 $BC\perp PD,BC\perp AD$，且 $PD\cap AD=D$，

所以 $BC\perp$ 平面 PAD，所以 $BC\perp PA$，又 $BM\cap BC=B$，

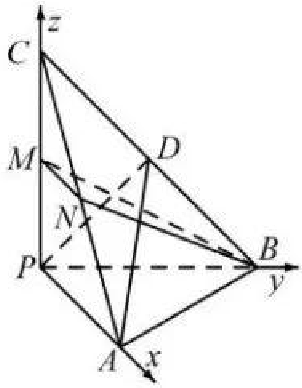
所以 $PA\perp$ 平面 PBC；所以 $V_{A-PBC}=\frac{1}{3}S_{\Delta PBC}\cdot PA=\frac{1}{3}\times 2\times 2=\frac{4}{3}$，

设点 P 到平面 ABC 的距离为 d，所以 $V_{P-ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot d=\frac{2\sqrt{3}}{3}d$，

因为 $V_{P-ABC}=V_{A-PBC}$，所以 $d=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以 点 P 到平面 ABC 的距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

（2）如图，以 P 为原点， PA， PB， PC 所在直线为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，

则 $P(0,0,0)$， $A(2,0,0)$， $B(0,2,0)$， $C(0,0,2)$， $M(0,0,1)$， $N(1,0,1)$，



所以 $\overrightarrow{MN}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{BM}=(0,-2,1)$，

设平面 BMN 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{MN}=0\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BM}=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x_1=0\\ -2y_1+z_1=0\end{cases}$，

令 $y_1=1$，得 $\boldsymbol{n}_1=(0,1,2)$，

$\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,0,2)$，

设平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}-2x_2+2y_2=0\\ -2x_1+2z_2=0\end{cases}$，令 $y_2=1$，得 $\boldsymbol{n}_2=(1,1,1)$，

设平面 BMN 与平面 ABC 的夹角为 θ，所以 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，

所以 平面 BMN 与平面 ABC 夹角为余弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$．

21.【解析】

（1）抛物线 C 的焦点为 $F(0,1)$，即 $c=1$，

椭圆上的点 M 到点 F 的最大距离为 $a+c=3$，所以 $a=2$，$b^2=3$，

所以 椭圆方程为 $\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{x^2}{3}=1$．

（2）抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$，即 $y=\dfrac{x^2}{4}$，对该函数求导得 $y'=\dfrac{x}{2}$，

设点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x_0,y_0)$，

直线 MA 的方程为 $y-y_1=\dfrac{x_1}{2}(x-x_1)$，即 $y=\dfrac{x_1x}{2}-y_1$，即 $x_1x-2y_1-2y=0$，

同理可知，直线 MB 的方程为 $x_2x-2y_2-2y=0$，

由于点 M 为这两条直线的公共点，则 $\begin{cases}x_1x_0-2y_1-2y_0=0\\ x_2x_0-2y_2-2y_0=0\end{cases}$，

所以 点 A,B 的坐标满足方程 $x_0x-2y-2y_0=0$，所以 直线 AB 的方程为 $x_0x-2y-2y_0=0$，

联立 $\begin{cases}x_0x-2y-2y_0=0\\ y=\dfrac{x^2}{4}\end{cases}$，可得 $x^2-2x_0x+4y_0=0$，由韦达定理可得 $x_1+x_2=2x_0$，$x_1x_2=4y_0$，

所以 $|AB|=\sqrt{1+\left(\dfrac{x_0}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+\left(\dfrac{x_0}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{4x_0^2-16y_0}=\sqrt{(x_0^2+4)(x_0^2-4y_0)}$，

点 M 到直线 AB 的距离为 $d=\dfrac{|x_0^2-4y_0|}{\sqrt{x_0^2+4}}$，

所以 $S_{\triangle MAB}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d=\dfrac{1}{2}\sqrt{(x_0^2+4)(x_0^2-4y_0)}\cdot\dfrac{|x_0^2-4y_0|}{\sqrt{x_0^2+4}}=\dfrac{1}{2}(x_0^2-4y_0)^{\frac{3}{2}}$，

因为 $x_0^2-4y_0=3-\dfrac{3y_0^2}{4}-4y_0=-\dfrac{3}{4}\left(y_0+\dfrac{8}{3}\right)^2+\dfrac{25}{3}$， 由已知可得 $-2\leqslant y_0\leqslant 2$，

所以 当 $y_0=-2$ 时， $\triangle MAB$ 面积的最大值为 $8\sqrt{2}$．

22.【解析】

（1）由题意知 $f(x)=2x-x\cos x-\sin x$， $f'(x)=2-2\cos x+x\sin x$，

当 $x\in[0,\pi]$ 时， $f'(x)=2(1-\cos x)+x\sin x\geqslant 0$，

所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增， 所以 $f(x)_{\max}=f(\pi)=3\pi$．

（2）注意到 $f(0)=0$， $f'(x)=2a-a(\cos x-x\sin x)-\cos x$， 则 $f'(0)=a-1$，

若 $a\geqslant 1$， $f(x)\geqslant 2x-x\cos x-\sin x$， 由（1）知， 当 $x\in[0,\pi]$ 时， $f(x)\geqslant f(0)=0$；

当 $x\in(\pi,+\infty)$ 时， $2x-x\cos x-\sin x=x(1-\cos x)+(x-\sin x)>0$，

所以 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立， 符合题意；

若 $a\leqslant 0$， $f(x)=2ax-ax\cos x-\sin x=ax(1-\cos x)+ax-\sin x$，

当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时， $f(x)<0$， 不合题意；

若 $0<a<1$， 因为 $f''(x)=(2a+1)\sin x+ax\cos x\geqslant 0$，

所以 $f'(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递增，

因为 $f'(\dfrac{\pi}{2})=(2+\dfrac{\pi}{2})a>0$， 又 $f'(0)<0$，

所以 存在 $x_0\in(0,\dfrac{\pi}{2})$， $f'(x_0)=0$，

当 $x\in(0,x_0)$ 时， $f'(x)<0$，

$f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减， $f(x)<f(0)=0$， 不合题意；

综上， $a\geqslant 1$．

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。