天一大联考

"顶尖计划"2023届高中毕业班第一次考试

理科数学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|x=2n+3,n\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x|x^2-18x-40<0\}$，则 $A\cap B$ 中的元素个数为

A. 8　　B. 9　　C. 10　　D. 11

2. 已知复数 $z=\dfrac{3\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}^3}$，则 $|z|=$

A. 1　　B. $\dfrac{3}{5}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$　　D. 3

3. 已知非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，且 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，则 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{2\pi}{3}$　　D. $\dfrac{5\pi}{6}$

4. 某士兵进行射击训练，每次命中目标的概率均为 $\dfrac{3}{4}$，且每次命中与否相互独立，则他连续射击3次，至少命中两次的概率为

A. $\dfrac{27}{32}$　　B. $\dfrac{9}{16}$　　C. $\dfrac{27}{64}$　　D. $\dfrac{9}{32}$

5. 已知函数 $f(x)=2\sin x+3\cos x$ 在 $x=\varphi$ 处取得最大值，则 $\cos\varphi=$

A. $\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$　　C. $-\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$　　D. $-\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

6. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+f(4-x)=0$，且当 $x\in[-2,2)$ 时，$f(x)=x^2-4$，则 $f(2\,021)=$

A. -3　　B. -1　　C. 1　　D. 3

7. 我国古代经典数学名著《九章算术》中有一段表述："今有圆堡壔(dǎo)，周四丈八尺，高一丈一尺"，意思是有一个圆柱，底面周长为4丈8尺，高为1丈1尺. 则该圆柱的外接球的表面积约为(注:1丈=10尺，π取3)

A. 1 185平方尺　　B. 1 131平方尺

C. 674平方尺　　D. 337平方尺

8. 甲、乙、丙、丁、戊五名志愿者去A,B,C三个不同的小区参加新冠疫情防控志愿服务，每个小区至少去1人，每人只去1个小区，且甲、乙去同一个小区，则不同的安排方法有

A. 28种　　B. 32种

C. 36种　　D. 42种

9. 已知角α的顶点在坐标原点，始边与x轴的非负半轴重合，终边经过点$(m,-4)$，其中$m<0$，若$\cos 2\alpha=-\frac{7}{25}$，则$\tan\left(\alpha+\frac{m\pi}{2}\right)=$

A. 2　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{4}{3}$　　D. $-\frac{3}{4}$

10. 过抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点F且斜率为-1的直线交C于A,B(其中A在x轴上方)两点，交C的准线于点M，且$|AB|=16$，O为坐标原点，则$|OM|=$

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{5}$

11. 已知$f(x)=2x^3+(a-2)x^2-2x$是奇函数，则过点$P(-1,2)$向曲线$y=f(x)$可作的切线条数是

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 不确定

12. 设双曲线$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为点$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，过点$P(-2c,0)$且斜率为$\frac{1}{2}$的直线与双曲线的左、右两支分别交于$M,N$两点，若$|PN|=3|PM|$，且直线$F_2N$的斜率为3，则$\Gamma$的离心率为

A. $\frac{\sqrt{13}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{7}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

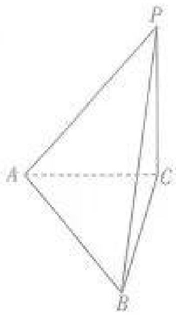
13. 已知函数$f(x)=\log_2(x-1)+a$在区间$(2,3)$上有且仅有一个零点，则实数a的取值范围为________.

14. 写出一个同时具有下列性质①②③的函数：$f(x)=$________.

①$f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$；②当$x\in(0,+\infty)$时，$f(x)$单调递减；③$f(x)$为偶函数.

15. 已知平面上的动点P到点$O(0,0)$和$A(2,0)$的距离之比为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，则点P到x轴的距离最大值为________.

16. 微型航空遥感技术以无人机为空中遥感平台，为城市经济和文化建设提供了有效的技术服务手段. 如图所示，有一架无人机在空中 P 处进行航拍，水平地面上甲、乙两人分别在 A，B 处观察该无人机（两人的身高忽略不计），C 为无人机在水平地面上的正投影. 已知甲、乙两人相距 100 m，甲观察无人机的仰角为 45°，若再测量两个角的大小就可以确定无人机的飞行高度 PC，则这两个角可以是__________.（写出所有符合要求的编号）



①$\angle BAC$ 和 $\angle ABC$；②$\angle BAC$ 和 $\angle PAB$；

③$\angle PAB$ 和 $\angle PBA$；④$\angle PAB$ 和 $\angle ABC$.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22，23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_2=1$，$S_5=15$.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）若 $\log_2\frac{b_n}{a_n}=\frac{a_n+3}{2}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

18.（12 分）

某工厂共有甲、乙两个车间，为了比较两个车间的生产水平，分别从两个车间生产的同一种零件中各随机抽取了 100 件，它们的质量指标值 m 统计如下：

质量指标值 m	[0,20)	[20,40)	[40,60)	[60,80)	[80,100]
甲车间（件）	15	20	25	31	9
乙车间（件）	5	10	15	39	31

（Ⅰ）估计该工厂生产这种零件的质量指标值 m 的平均数；（同一组中的数据用该组区间的中点值作代表）

（Ⅱ）根据所给数据，完成下面的 2×2 列联表（表中数据单位：件），并判断是否有 99% 的把握认为甲、乙两个车间的生产水平有差异.

	$m<60$	$m\geqslant60$
甲车间		
乙车间		

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

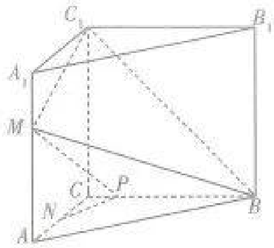
$P(K^2\geqslant k)$	0.05	0.01	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19.（12 分）

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ACB=90°$，$AA_1=2AC=BC=4$，M 为棱 AA_1 上靠近 A_1 的三等分点，N 为棱 AC 的中点，点 P 在棱 BC 上，且直线 $PN//$平面 BMC_1.

（Ⅰ）求 PC 的长；

（Ⅱ）求二面角 $P-BM-C_1$ 的余弦值.



20.（12 分）

过椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 上任意一点 P 作直线 $l:y=kx+p$.

（Ⅰ）证明：$p^2\leqslant 3+4k^2$；

（Ⅱ）若 $p\neq 0$，O 为坐标原点，线段 OP 的中点为 M，过 M 作 l 的平行线 l'，l' 与 C 交于 A，B 两点，求 $\triangle ABP$ 面积的最大值.

21.（12 分）

设函数 $f(x)=$ [illegible] e^x-m（$m\in\mathbf{R}$）.

（Ⅰ）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 有两个零点 x_1 和 x_2，设 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，证明：$f'(x_0)>0$（$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数）.

（二）选考题：共 10 分. 请考生在第 22，23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.［选修 4－4：坐标系与参数方程］（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2m(\cos\varphi-\sin\varphi),\\ y=m(\cos\varphi+\sin\varphi)\end{cases}$（$\varphi$ 为参数，$m\neq 0$），以 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\sqrt{2}\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-5=0$.

（Ⅰ）写出 l 的直角坐标方程；

（Ⅱ）若 l 与 C 只有一个公共点，求 m 的值.

23.［选修 4－5：不等式选讲］（10 分）

已知 a,b,c 均为正实数，且 $abc=1$.

（Ⅰ）求 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{4}{c}$ 的最小值；

（Ⅱ）证明：$bc+ac+ab\geqslant\frac{2}{b+c}+\frac{2}{a+c}+\frac{2}{a+b}$.

天一大联考
“顶尖计划”2023 届高中毕业班第一次考试
理科数学·答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. 答案 B

命题意图 本题考查集合的概念和运算.

解析 $B=\{x|(x+2)(x-20)<0\}=\{x|-2<x<20\}$,$A\cap B=\{3,5,7,9,11,13,15,17,19\}$,故 $A\cap B$ 中的元素个数为 9.

2. 答案 C

命题意图 本题考查复数的运算.

解析 因为 $z=\frac{3i}{2+i^3}=\frac{3i}{2-i}$,所以 $|z|=\frac{|3i|}{|2-i|}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

3. 答案 C

命题意图 本题考查平面向量的数量积运算.

解析 因为 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$,所以 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle+|\boldsymbol{b}|^2=0$,又 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,可得 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-\frac{1}{2}$,所以 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{2\pi}{3}$.

4. 答案 A

命题意图 本题考查相互独立事件的概率计算.

解析 所求概率为 $C_3^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{32}$.

5. 答案 A

命题意图 本题考查三角恒等变换与三角函数的性质.

解析 $f(x)=\sqrt{13}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\sin x+\frac{3}{\sqrt{13}}\cos x\right)=\sqrt{13}\sin(x+\theta)$,其中 $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{13}}$,$\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{13}}$,因为 $f(x)$ 在 $x=\varphi$ 处取得最大值,所以 $\varphi+\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,此时 $\cos\varphi=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi-\theta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

6. 答案 D

命题意图 本题考查函数的对称性与周期性.

解析 因为 $f(x)+f(4-x)=0$,所以 $f(x)=-f(4-x)=-f(x-4)=f(x-8)$,所以 $f(x)$ 以 8 为周期,所以 $f(2\,021)=f(252\times8+5)=f(5)=-f(1)=3$.

7. 答案 B

命题意图 本题考查简单几何体的结构特征以及有关计算.

解析 设该圆柱的底面半径为 r 尺,则 $2\pi r\approx2\times3r=48$,$r=8$,圆柱的高 $h=11$ 尺,设圆柱外接球的半径为 R 尺,则 $R=\sqrt{r^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2}=\sqrt{64+\left(\frac{11}{2}\right)^2}$,故外接球的表面积 $S=4\pi R^2\approx4\times3\times\left(64+\frac{121}{4}\right)=1\,131$ 平方尺.

8. 答案 C

命题意图 本题考查排列组合的应用.

解析 分两种情况,第一种情况:先将 5 个人按 2:2:1进行分组,甲、乙在一组,剩下 3 人中选 2 人组成一组,分

组后按3个小区进行排列,故这种情况有 $C_3^2A_3^3$ 种安排方法;第二种情况:先将5个人按照3:1:1进行分组,从甲、乙以外的3个人中选1人与甲、乙组成一组,分组后按3个小区进行排列,故这种情况有 $C_3^1A_3^3$ 种安排方法.所以总的安排方法有 $C_3^2A_3^3+C_3^1A_3^3=36$ 种.

9. **答案** D

命题意图 本题考查三角函数的概念以及恒等变换.

解析 因为 $m<0$,所以 $\cos\alpha<0$,$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}=\frac{1-\frac{7}{25}}{2}=\frac{9}{25}$,所以 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$,所以 $\cos\alpha=\frac{m}{\sqrt{m^2+16}}=-\frac{3}{5}$,解得 $m=-3$,所以 $\tan\alpha=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$,$\tan\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}{\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\frac{1}{\tan\alpha}=-\frac{3}{4}$.

10. **答案** D

命题意图 本题考查抛物线的性质.

解析 由条件知直线 AB 的倾斜角为 $135°$,则 $|AB|=\frac{2p}{\sin^2 135°}=4p=16$,所以 $p=4$,C 的方程为 $y^2=8x$,焦点 $F(2,0)$,准线为 $x=-2$,所以直线 AB 的方程为 $y=-(x-2)$,所以点 $M(-2,4)$,所以 $|OM|=2\sqrt{5}$.

11. **答案** C

命题意图 本题考查导数的几何意义.

解析 因为 $y=f(x)$ 是奇函数,所以 $a=2$,所以 $f(x)=2x^3-3x$.设切点坐标为 (x_0,y_0),切线斜率为 k,则有 $\begin{cases}y_0=2x_0^3-3x_0,\\k=f'(x_0)=6x_0^2-3,\end{cases}$ 所以切线方程为 $y-(2x_0^3-3x_0)=(6x_0^2-3)(x-x_0)$,因为切线过点 $P(-1,2)$,故将点 $P(-1,2)$ 代入切线方程可得 $4x_0^3+6x_0^2-1=0$,即 $(2x_0+1)(2x_0^2+2x_0-1)=0$,解得 $x_0=-\frac{1}{2}$ 或 $x_0=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$,所以过点 $P(-1,2)$ 向曲线 $y=f(x)$ 可作的切线条数为3.

12. **答案** B

命题意图 本题考查双曲线的性质及点差法的应用.

解析 连接 F_1M,由已知可得 $|PF_2|=3|PF_1|$,又 $|PN|=3|PM|$,所以 $F_2N/\!/F_1M$.取 MN 的中点 $Q(x_0,y_0)$,设坐标原点为 O,连接 OQ,则 $OQ/\!/NF_2$,所以直线 OQ 的斜率 $k_{OQ}=\frac{y_0}{x_0}=3$,设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则 $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$,$\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1$,两式相减,得 $\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{a^2}=\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{b^2}$,所以 $\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}=\frac{b^2}{a^2}$,其中 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k_{MN}=\frac{1}{2}$,$\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\frac{y_0}{x_0}=k_{OQ}=3$,所以 $k_{MN}\cdot k_{OQ}=\frac{3}{2}=\frac{b^2}{a^2}$,所以双曲线 Γ 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. **答案** $(-1,0)$

命题意图 本题考查函数零点的性质.

解析 易知 $f(x)=\log_2(x-1)+a$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增,要使其在区间 $(2,3)$ 上有且仅有一个零点,则 $\begin{cases}f(2)=a<0,\\f(3)=1+a>0,\end{cases}$ 所以 $-1<a<0$.

14. **答案** $-\log_2|x|$(答案不唯一,例如 $\log_{\frac{1}{2}}|x|$,$\log_{\frac{1}{2}}x^2$ 等也对)

命题意图 本题考查函数的性质.

解析 要满足条件①,可选取对数函数;要满足条件②,可令底数大于0小于1,或者底数大于1但在对数前面加上负号;要满足条件③,对自变量加上绝对值符号或进行平方运算即可.

15. **答案** $4\sqrt{3}$

命题意图 本题考查轨迹方程的应用.

解析 设 $P(x,y)$,由题意知 $\frac{|PO|}{|PA|}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以点 P 的轨迹方程为 $x^2+y^2+12x-12=0$,所以 $y^2=-x^2-12x+12=-(x+6)^2+48\leqslant 48$,所以 $y\leqslant 4\sqrt{3}$.

16. **答案** ①③④

命题意图 本题考查立体几何与解三角形的综合问题.

解析 由题意可知 $PA=\sqrt{2}AC=\sqrt{2}PC$. 若已知 AB, $\angle BAC$ 和 $\angle ABC$,则 $\triangle ABC$ 是唯一确定的,可计算出 AC,从而可得 PC,故①符合要求. 同理,若已知 AB, $\angle PAB$ 和 $\angle PBA$,则 $\triangle PAB$ 是唯一确定的,可计算出 PA,从而可得 PC,故③符合要求. 对于②,在平面 ABC 中作 $CD\perp AB$,垂足为 D,连接 PD,易知 $AB\perp$ 平面 PCD. 在 $\mathrm{Rt}\triangle PAD$ 中,$AD=PA\cos\angle PAB$,又因为 $AD=AC\cos\angle BAC=PA\cos\angle PAC\cos\angle BAC$,所以 $\cos\angle PAB=\cos\angle PAC\cos\angle BAC$,又因为 $\angle PAC=45°$,所以②中两个角知道一个即可确定另一个,测量这两个角相当于重复测量,不足以确定 PC,②不符合要求. 对于④,由前面的分析,由 $\angle PAB$ 可以确定 $\angle BAC$,再根据①可以确定 PC.

三、解答题:共70分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查等差数列的性质以及错位相减法的应用.

解析 (Ⅰ)设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,由题设可得 $\begin{cases}a_1+d=1,\\5a_1+10d=15,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=-1,\\d=2,\end{cases}$ ……(3分)

所以 $a_n=-1+(n-1)\times 2=2n-3$. ……(5分)

(Ⅱ)由条件可得 $b_n=(2n-3)\times 2^n$, ……(6分)

$T_n=-1\times 2+1\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+(2n-5)\times 2^{n-1}+(2n-3)\times 2^n$,①

$2T_n=-1\times 2^2+1\times 2^3+3\times 2^4+\cdots+(2n-5)\times 2^n+(2n-3)\times 2^{n+1}$,② ……(8分)

②-①可得:

$T_n=1\times 2-2^3-2^4-\cdots-2^{n+1}+(2n-3)\times 2^{n+1}$

$=(2n-3)\times 2^{n+1}+2-\frac{8\times(1-2^{n-1})}{1-2}$

$=(2n-5)\times 2^{n+1}+10$. ……(12分)

18. **命题意图** 本题考查统计量的计算以及独立性检验的应用.

解析 (Ⅰ)由所给数据,各组的频率分别为0.1,0.15,0.2,0.35,0.2, ……(2分)

所以该工厂生产这种零件的质量指标值 m 的平均数的估计值为

$10\times 0.1+30\times 0.15+50\times 0.2+70\times 0.35+90\times 0.2=58$. ……(5分)

(Ⅱ)2×2 列联表如下:

	$m<60$	$m\geqslant 60$
甲车间	60	40
乙车间	30	70

……(7分)

所以 $K^2=\frac{200\times(60\times 70-40\times 30)^2}{100\times 100\times 90\times 110}\approx 18.182$, ……(10分)

因为 $18.182>6.635$，所以有 99% 的把握认为甲、乙两个车间的生产水平有差异. ……………………（12 分）

19. **命题意图** 本题考查空间位置关系以及利用空间向量计算空间角.

解析 （Ⅰ）如图所示，在 CC_1 上取一点 Q，使得 $CP=CQ$，连接 PQ，NQ.

由已知得 $CC_1=CB$，所以 $PQ/\!/BC_1$. ……………………（1 分）

因为 $PQ\not\subset$ 平面 BMC_1，所以 $PQ/\!/$平面 BMC_1. ……………………（2 分）

又因为 $PN/\!/$平面 BMC_1，$PN\cap PQ=P$，

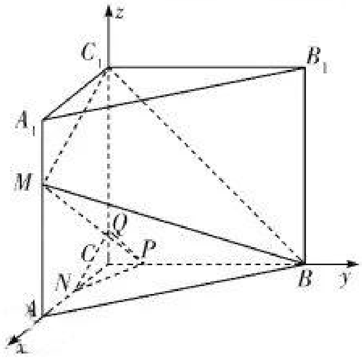
所以平面 $PQN/\!/$平面 BMC_1. ……………………（3 分）

根据面面平行的性质可知 $MC_1/\!/QN$. ……………………（4 分）

在矩形 ACC_1A_1 中，可得 $\triangle CQN\backsim\triangle A_1MC_1$，

所以 $\dfrac{CQ}{CN}=\dfrac{A_1M}{A_1C_1}=\dfrac{2}{3}$，所以 $PC=CQ=\dfrac{2}{3}CN=\dfrac{2}{3}$. ……………………（6 分）

（Ⅱ）如图所示，以 C 为坐标原点，分别以 CA，CB，CC_1 所在直线为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系.



则 $C(0,0,0)$，$C_1(0,0,4)$，$B(0,4,0)$，$M\left(2,0,\dfrac{8}{3}\right)$，$P\left(0,\dfrac{2}{3},0\right)$. ……………………（7 分）

$\overrightarrow{C_1B}=(0,4,-4)$，$\overrightarrow{C_1M}=\left(2,0,-\dfrac{4}{3}\right)$，

设平面 C_1MB 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{C_1B}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{C_1M}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}4y_1-4z_1=0,\\ 2x_1-\dfrac{4}{3}z_1=0,\end{cases}$ 取 $z_1=3$，得 $\boldsymbol{m}=(2,3,3)$. ……………………（9 分）

$\overrightarrow{BM}=\left(2,-4,\dfrac{8}{3}\right)$，$\overrightarrow{BP}=\left(0,-\dfrac{10}{3},0\right)$，

设平面 PMB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{BM}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{BP}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}2x_2-4y_2+\dfrac{8}{3}z_2=0,\\ -\dfrac{10}{3}y_2=0,\end{cases}$ 取 $z_2=-3$，得 $\boldsymbol{n}=(4,0,-3)$. ……………………（10 分）

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2\times4+3\times(-3)}{\sqrt{2^2+3^2+3^2}\times\sqrt{4^2+(-3)^2}}=-\dfrac{\sqrt{22}}{110}$，

结合图可知二面角 $P-BM-C_1$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{22}}{110}$. ……………………（12 分）

20. **命题意图** 本题考查椭圆的性质，椭圆与直线的位置关系.

解析 （Ⅰ）联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\\ y=kx+p,\end{cases}$

消去 y 整理得 $(3+4k^2)x^2+8kpx+4p^2-12=0$, ……（2 分）

因为点 P 在 C 上,所以 $\Delta=64k^2p^2-4(4p^2-12)(3+4k^2)\geqslant 0$, ……（3 分）

化简得 $p^2\leqslant 3+4k^2$. ……（4 分）

（Ⅱ）设 $l':y=kx+m$,点 $P(x_0,y_0)$,则 $M\left(\frac{x_0}{2},\frac{y_0}{2}\right)$.

由已知得 $y_0=kx_0+p$,所以 $\frac{y_0}{2}=k\cdot\frac{x_0}{2}+\frac{p}{2}$,

即点 $M\left(\frac{x_0}{2},\frac{y_0}{2}\right)$ 满足方程 $y=kx+\frac{p}{2}$,所以 $m=\frac{p}{2}$. ……（5 分）

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=kx+m,\end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$,

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=-\frac{8km}{3+4k^2}$,$x_1x_2=\frac{4m^2-12}{3+4k^2}$. ……（7 分）

所以 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{4\sqrt{3}\sqrt{4k^2+3-m^2}}{3+4k^2}$. ……（8 分）

所以 $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}|m||x_1-x_2|=\frac{2\sqrt{3}\sqrt{(4k^2+3-m^2)m^2}}{3+4k^2}=2\sqrt{3}\sqrt{\left(1-\frac{m^2}{3+4k^2}\right)\frac{m^2}{3+4k^2}}$. ……（9 分）

令 $\frac{m^2}{3+4k^2}=t$,因为 $m^2=\frac{p^2}{4}\leqslant\frac{3+4k^2}{4}$,所以 $t\in\left(0,\frac{1}{4}\right]$.

所以 $S_{\triangle ABP}=2\sqrt{3}\sqrt{-t^2+t}\leqslant 2\sqrt{3}\sqrt{-\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}$,

所以 $\triangle ABP$ 面积的最大值为 $\frac{3}{2}$. ……（12 分）

21. **命题意图** 本题考查利用导数研究函数性质.

解析 （Ⅰ）$f'(x)=m-e^x$, ……（1 分）

若 $m\leqslant 0$,则 $f'(x)<0$,函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减. ……（2 分）

若 $m>0$,令 $f'(x)=m-e^x=0$,得 $x=\ln m$,

当 $x<\ln m$ 时,$f'(x)>0$,当 $x>\ln m$ 时,$f'(x)<0$, ……（4 分）

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln m)$ 上单调递增,在 $(\ln m,+\infty)$ 上单调递减. ……（5 分）

（Ⅱ）不妨令 $x_1>x_2$,由题设可得 $\begin{cases}mx_1-e^{x_1}-m=0,\\ mx_2-e^{x_2}-m=0,\end{cases}$

两式相减整理可得 $m=\frac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}$. ……（6 分）

所以 $f'(x_0)=f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=m-e^{\frac{x_1+x_2}{2}}=\frac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}-e^{\frac{x_1+x_2}{2}}$. ……（7 分）

令 $t_1=e^{x_1}$,$t_2=e^{x_2}$,则 $\frac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}=\frac{t_1-t_2}{\ln t_1-\ln t_2}$,$e^{\frac{x_1+x_2}{2}}=\sqrt{e^{x_1}e^{x_2}}=\sqrt{t_1t_2}$,

要证 $f'(x_0)>0$,即证 $\frac{t_1-t_2}{\ln t_1-\ln t_2}-\sqrt{t_1t_2}>0$,即证 $\ln\frac{t_1}{t_2}<\sqrt{\frac{t_1}{t_2}}-\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}$. ……（8 分）

令 $h(x)=\ln x^2-x+\frac{1}{x}$,$x\in(1,+\infty)$,则 $h'(x)=-\left(\frac{1}{x}-1\right)^2<0$,

所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减. ……（10 分）

又$\sqrt{\dfrac{t_1}{t_2}}>1$，所以$h\left(\sqrt{\dfrac{t_1}{t_2}}\right)<h(1)=0$，…………（11 分）

即$\ln\dfrac{t_1}{t_2}<\sqrt{\dfrac{t_1}{t_2}}-\sqrt{\dfrac{t_2}{t_1}}$成立，所以$f'(x_0)>0$. …………（12 分）

22. **命题意图** 本题考查不同形式的方程间的互化，以及相关计算.

解析 （Ⅰ）由l的极坐标方程可得$\rho\sin\theta+\rho\cos\theta-5=0$，

故其直角坐标方程为$x+y-5=0$. …………（4 分）

（Ⅱ）由C的参数方程可得$\left(\dfrac{x}{2m}\right)^2+\left(\dfrac{y}{m}\right)^2=2$，

即C的普通方程为$x^2+4y^2-8m^2=0$. …………（6 分）

联立方程$\begin{cases}x+y-5=0,\\x^2+4y^2-8m^2=0,\end{cases}$得$5x^2-40x+100-8m^2=0$，…………（7 分）

因为l与C只有一个公共点，

所以$\Delta=40^2-4\times5\times(100-8m^2)=160m^2-400=0$，…………（9 分）

解得$m=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}$. …………（10 分）

23. **命题意图** 本题考查基本不等式的应用.

解析 （Ⅰ）由基本不等式可知$\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{4}{c}\geqslant3\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}\times\dfrac{2}{b}\times\dfrac{4}{c}}=3\sqrt[3]{8}=6$，

当且仅当$\dfrac{1}{a}=\dfrac{2}{b}=\dfrac{4}{c}$，即$a=\dfrac{1}{2}$，$b=1$，$c=2$时等号成立，

所以$\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{4}{c}$的最小值为 6. …………（4 分）

（Ⅱ）因为$abc=1$，所以$bc+ac+ab=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$.

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geqslant2\sqrt{\dfrac{1}{ab}}=\dfrac{2}{\sqrt{ab}}\geqslant\dfrac{2}{\frac{a+b}{2}}=\dfrac{4}{a+b}$. …………（6 分）

同理可得$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geqslant\dfrac{4}{b+c}$，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\geqslant\dfrac{4}{a+c}$. …………（7 分）

所以$2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\geqslant\dfrac{4}{b+c}+\dfrac{4}{a+c}+\dfrac{4}{a+b}$，当且仅当$a=b=c$时等号成立.

所以$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geqslant\dfrac{2}{b+c}+\dfrac{2}{a+c}+\dfrac{2}{a+b}$，…………（9 分）

即$bc+ac+ab\geqslant\dfrac{2}{b+c}+\dfrac{2}{a+c}+\dfrac{2}{a+b}$. …………（10 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。