# 湖南师大附中2023届模拟试卷(二)

**一、单项选择题:本大题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.**

1. 已知复数$z$满足: $\bar{z}(2+\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$, 则$z$在复平面内对应的点在第象限.

A. 一　　B. 二　　C. 三　　D. 四

2. 已知$p$: 方程$x^2-4x+4a=0$有实根;$q$: 函数$f(x)=(2-a)^x$为增函数, 则$p$是$q$的 ______ 条件.

A. 充分不必要;　　B. 必要不充分　　C. 充要　　D. 既不充分也不必要

3. 设$a=0.3^{0.4}, b=0.4^{0.3}, c=\log_{0.4}0.3$, 则$a,b,c$的大小顺序为

A. $a<b<c$

B, $a<c<b$

C. $b<a<c$

D. $c<a<b$

4. 在$\triangle ABC$中, 点$D$是边$BC$上任意一点, $M$是线段$AD$的中点, 若存在实数$\lambda$和$\mu$. 使得$\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$, 则$\lambda+\mu$等于

A. $\frac{1}{2}$　　B. 2　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $-2$

5. 下列关于统计概率知识的判断, 正确的是

A. 将总体划分为2层, 通过分层随机抽样, 得到两层的样本平均数和样本方差分别为$\bar{x}_1,\bar{x}_2$和$s_1^2,s_2^2$, 且已知$\bar{x}_1=\bar{x}_2$, 则总体方差$s^2=\frac{1}{2}(s_1^2+s_2^2)$

B. 在研究成对数据的相关关系时, 相关关系越强, 相关系数$r$越接近于1

C. 已知随机变量$X$服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$, 若$P(X\geqslant-1)+P(X\geqslant5)=1$, 则$\mu=2$

D. 按从小到大顺序排列的两组数据: 甲组:27,30,37,$m$,40,50 ,乙组:24,$n$,33,44,48,52, 若这两组数据的第30百分位数、第50百分位数都分别对应相等,则$m+n=67$

6. 已知函数$f(x)=(\sqrt{3}\sin x+a\cos x)\cos x$的图像关于点$\left(-\frac{\pi}{6},\frac{3}{2}\right)$对称,则下列结论正确的是

A. $f(x)$的最小正周期是$\frac{\pi}{2}$

B. $f(x)$在$\left[\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$上单调递增

C. $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$是函数$f(x)$的一个对称中心

D. 先将$f(x)$图像上各点的横坐标压缩为原来的$\frac{1}{2}$, 再将所得的函数图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度, 得到函数$g(x)=\sqrt{3}\cos\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{3}{2}$的图像

7. 已知函数$f(x)$是定义在$R$上的偶函数, $f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减, 且$f(3)=0$, 则不等式$(2x-5)f(x-1)<0$的解集为 

A. $(-\infty,-2)\cup\left(\frac{5}{2},4\right)$　　B. $(4,+\infty)$

C. $\left(-2,\frac{5}{2}\right)\cup(4,+\infty)$　　D. $(-\infty,-2)$

8. 四棱锥 $P-ABCD$ 体积为 $V$，其外接球表面积为 $S$，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$PA=4$，$\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$，且 $\frac{4\sqrt{3}}{3}\leqslant V$，则 $S$ 的取值范围是

A. $S\geqslant 10\pi$　　B. $S\geqslant 20\pi$　　C. $S\geqslant 10\sqrt{3}\pi$　　D. $S\geqslant 20\sqrt{3}\pi$

**二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分．**

9. 三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 中，所有棱长均为 2，顶点 $A$ 在底面 $A'B'C'$ 上的投影为棱 $A'C'$ 的中点，$D$ 为 $AC$ 的中点，$E$ 是 $BD$ 上的动点，则

A. 三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 的体积为 1

B. $AC'$ 与平面 $A'B'C'$ 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$

C. $C'E\perp AC$

D. 异面直线 $AA'$ 与 $BE$ 所成角为 $\frac{\pi}{3}$

10. 定义：设 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，$f''(x)$ 是函数 $f'(x)$ 的导数，若方程 $f''(x)=0$ 有实数解 $x_0$，则称点 $(x_0,f(x_0))$ 为函数 $y=f(x)$ 的"拐点"．经过探究发现：任何一个三次函数都有"拐点"且"拐点"就是三次函数图象的对称中心．已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+\frac{5}{3}(ab\neq 0)$ 图象的对称中心为 $(1,1)$，则下列说法中正确的有

A. $a=\frac{1}{3}$，$b=-1$

B. 函数 $f(x)$ 既有极大值又有极小值

C. 函数 $f(x)$ 有三个零点

D. $y=f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上单调递减

11. 已知点 $P$ 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上任意一点，$F_1$、$F_2$ 为其左、右焦点，$O$ 为坐标原点．过点 $P$ 向双曲线两渐近线作垂线，设垂足分别为 $M$、$N$，则下列所述正确的是

A. $|PM|\cdot|PN|$ 为定值

B. $O$、$P$、$M$、$N$ 四点一定共圆

C. $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的最小值为 $-b^2$

D. 存在点 $P$ 满足 $P$、$M$、$F_1$ 三点共线时，$P$、$N$、$F_2$ 三点也共线

12. 若直线 $x=a$ 与两曲线 $y=e^x$，$y=\ln x$ 分别交于 $A$，$B$ 两点，且曲线 $y=e^x$ 在 $A$ 点处的切线为 $m$，曲线 $y=\ln x$ 在 $B$ 点处的切线为 $n$，则下列结论正确的有

A. 存在 $a\in(0,+\infty)$，使 $m\parallel n$

B. 当 $m\parallel n$ 时，$|AB|$ 取得最小值

C. $|AB|$ 没有最小值

D. $|AB|>\ln 2+\log_2 e$

**三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．**

13. 已知 $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中各项系数的和为 243，则这个展开式中 $x^3$ 项的系数是______

14. 已知直线 $l$ 经过点 $P(4,-2)$ 且被圆 $x^2+y^2=25$ 截得的弦长为 6，则直线 $l$ 的方程是______

15. 若曲线 $C_1$：$f(x)=x^2+a$ 和曲线 $C_2$：$g(x)=2\ln x$ 恰好存在两条公切线，则实数 $a$ 的取值范围为______

16. 已知直线 $4x-y+1=0$ 过抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 的焦点 $F$，设抛物线的准线 $l$ 与 $y$ 轴的交点为 $P$，过 $F$ 的直线与抛物线交于 $A$，$B$ 两点，若以线段 $BP$ 为直径的圆过点 $A$，则 $|AB|=$______

## 四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（本小题满分10分）

若数列$\{A_n\}$满足$A_{n+1}=A_n^2$，则称数列$\{A_n\}$为“平方递推数列”．已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=9$，点$(a_n,a_{n+1})$在函数$f(x)=x^2+2x$的图象上，其中$n$为正攻数．来源：高三答案公众号

(1) 证明：数列$\{a_n+1\}$是“平方递推数列”，且数列$\{\lg(a_n+1)\}$为等比数列；

(2) 设$b_n=\lg(a_n+1)$，$c_n=2n+4$，定义$a*b=\begin{cases}a,a\leqslant b\\ b,a>b\end{cases}$，且记$d_n=b_n*c_n$，求数列$\{d_n\}$的前$n$项和$S_n$．

18．（本小题满分12分）

某高中学校开展生涯规划教育，对今年的1200名考生（其中女生540人）进行调查、统计知：有意向报考师范专业的学生有200人（其中女生120人）．

(1) 完成下面的列联表，并根据小概率值$\alpha=0.001$的独立性检验分析判断报考师范专业意向是否与性别有关？

| 报考意向 | 报考意向人数 | | 合计 |
|---|---|---|---|
| | 师范专业 | 非师范专业 | |
| 男生 | | | |
| 女生 | | | |
| 合计 | | | |

(2) 对有报考师范专业意向的学生按男女分层抽样得一个容量为10的样本．从样本中任意抽取5人．记抽取到的男生人数为$X$．求$X$的分布列与期望值．附：

| $\alpha$ | 0.15 | 0.10 | 0.05 | 0.025 | 0.010 | 0.005 | 0.001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_\alpha$ | 2.072 | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 | 10.828 |

$$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}\text{（其中}n=a+b+c+d\text{）}.$$

19．（本小题满分12分）

在$\triangle ABC$中，内角$A$、$B$、$C$的对边分别为$a$、$b$、$c$，已知边$c=6$，且$\sin A+\sin B=2\sin C$．

(1) 求$\triangle ABC$面积的最大值；

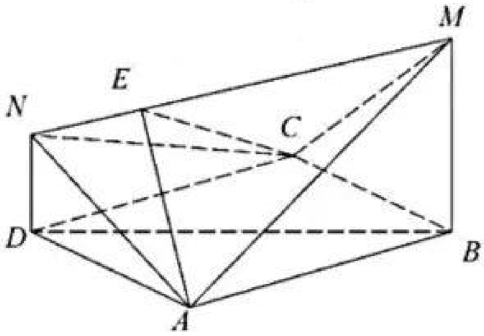
(2) 设当$\triangle ABC$的面积取最大值时的内角$C$为$\varphi$，已知函数$f(x)=\sin(\omega x-\varphi)(\omega>0)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上恰有三个零点和两个极值点，求$\omega$的取值范围．

20. (本小题满分 12 分)

如图，已知多面体 $MNABCD$ 的一个面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，且 $\angle ABC=60^\circ$，$BM\perp$ 平面 $ABCD$，$BM\parallel DN$，$BM=2DN$，点 $E$ 是线段 $MN$ 上任意一点.

(1) 证明：平面 $EAC\perp$ 平面 $BMND$

(2) 若 $\angle AEC$ 的最大值是 $\frac{2\pi}{3}$，求三棱锥 $M-NAC$ 的体积.

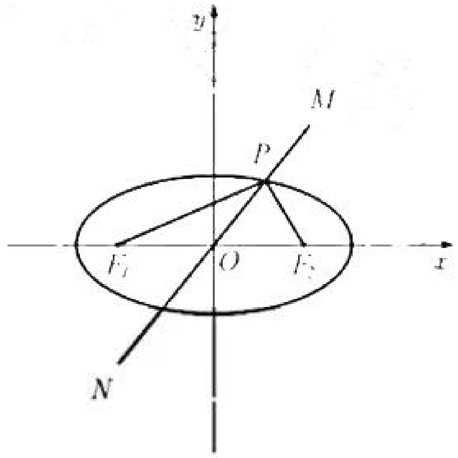



21. (本小题满分 12 分)

如图，椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1(a>2)$，圆 $O:x^2+y^2=a^2+4$，椭圆 $C$ 的左、右焦点分别为 $F_1,F_2$.

(1) 过椭圆上一点 $P$ 和原点 $O$ 作直线 $l$ 交圆 $O$ 于 $M,N$ 两点，若 $|PF_1|\cdot|PF_2|=6$，求 $|PM|\cdot|PN|$ 的值.

(2) 过圆 $O$ 上任意点 $R$ 引椭圆 $C$ 的两条切线，求证：两条切线相互垂直.




22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=1+k\left(\ln x-\frac{1+\ln x}{x}\right)(k\neq 0)$.

(1) 若 $f(x)$ 存在最大值 $M$，证明：$M+k>1$；

(2) 在 (1) 的条件下，设函数 $g(x)=xe^{x+\frac{M-1}{k}}-x$，求 $g(x)$ 的最小值（用含 $M,k$ 的代数式表示）.

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。