山东新高考联合质量测评12月联考高三试题

数学参考答案及评分标准

2022. 12

1－4 DACB 5－8 BACD

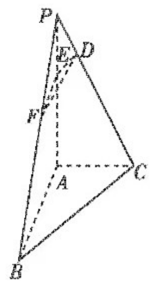
1.【解析】因为 $A=\{x|x\leqslant -2\}$，$B=\{y\in\mathbf{Z}|y\geqslant -4\}$，
所以 $A\cap B=\{-4,-3,-2\}$.
所以 $(A\cap B)$ 的子集个数是 $2^3=8$，故选 D.

2.【解析】$|z|=\dfrac{|1-\mathrm{i}|\cdot\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right|}{\left|-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right|}=\dfrac{\sqrt{2}\times 1}{1}=\sqrt{2}$，故选 A.

3.【解析】$\tan\frac{\pi}{14}+\dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{14}}=\dfrac{\sin\frac{\pi}{14}}{\cos\frac{\pi}{14}}+\dfrac{\cos\frac{\pi}{14}}{\sin\frac{\pi}{14}}=\dfrac{\sin^2\frac{\pi}{14}+\cos^2\frac{\pi}{14}}{\cos\frac{\pi}{14}\sin\frac{\pi}{14}}=\dfrac{2}{\sin\frac{\pi}{7}}=\dfrac{2}{m}$，故选 C.

4.【解析】展开式中含 x^3 项为：$\mathrm{C}_5^2\cdot x^3\cdot(-1)^2+\mathrm{C}_5^1\cdot x^4\cdot\dfrac{1}{x}=15x^3$，
所以系数为15，故选 B.

5.【解析】因为 $PD=\dfrac{1}{4}PC$ 且平面 DEF∥平面 ABC，



所以 $PE=\dfrac{1}{4}PA=1$，$DE=\dfrac{1}{4}AC=\dfrac{1}{2}=EF$，

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2=2$，$S_{\triangle DEF}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$，

$V_{P\text{-}ABC}=\dfrac{1}{3}\times 2\times 4=\dfrac{8}{3}$，

$V_{P\text{-}DEF}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{8}\times 1=\dfrac{1}{24}$，

所以 $V_{DEF-CAB}=\dfrac{8}{3}-\dfrac{1}{24}=\dfrac{63}{24}=\dfrac{21}{8}$，故选 B.

6.【解析】令 $f(x)=\mathrm{e}^x-x-1(x>0)$，则 $f'(x)=\mathrm{e}^x-1>0$，
所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，
所以 $a=\mathrm{e}^{0.1}>0.1+1=1.1>\sqrt{1.2}=b$，
由不等式 $\ln x\leqslant x-1$ 得：$c=-\ln 0.9=\ln\dfrac{1}{0.9}<\dfrac{1}{0.9}-1=\dfrac{1}{9}$，故选 A.

7.【解析】因为 $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\mathbf{0}$，所以点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，

设点 D 是 AC 的中点，则 $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$，$B$、$G$、$D$ 共线，所以 $\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+2y\overrightarrow{AD}$.

因为 B、H、D 三点共线，所以 $x+2y=1$，所以 $x^2+4y^2=x^2+(2y)^2\geqslant\frac{(x+2y)^2}{2}=\frac{1}{2}$（当且仅当 $x=2y$ 即 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{4}$ 时取等号），故选 C.

8.【解析】令 $f(x_1)=g(x_2)=m>0$，

则 $e^{2x_1}=m$，$x_2-1=m$，所以 $x_1=\frac{1}{2}\ln m$，$x_2=m+1$，$x_2-x_1=m+1-\frac{1}{2}\ln m$.

令 $h(m)=m+1-\frac{1}{2}\ln m(m>0)$，所以 $h'(m)=1-\frac{1}{2m}$，

令 $h'(m)=0$，得 $m=\frac{1}{2}$，

所以当 $m\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$h'(m)<0$，$h(m)$ 单调递减；

当 $m\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 时，$h'(m)>0$，$h(m)$ 单调递增，

所以当 $m=\frac{1}{2}$ 时，$h(m)$ 有最小值 $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$，故选 D.

9. ACD 【解析】由图可知 2020 年该地区人均 GDP 同比增长率有所下降，但 GDP 依然增加，所以 A 正确. 2012 年至 2021 年该地区人均 GDP 的 80% 分位数为 $\frac{69\ 901+72\ 151}{2}$，所以 B 不正确. 2012 年至 2021 年该地区人均 GDP 同比增长率的平均值为：$\frac{0.098+0.067+0.082+0.054+0.063+0.052+0.055+0.032+0.133}{9}\approx 0.07>0.06$，所以 C 正确（也可以直接观察判断）. 2012 年至 2021 年该地区人均 GDP 极差 $81\ 727-44\ 348<81\ 000-39\ 800$，所以 D 正确. 故选 ACD.

10. BC 【解析】$f(-x)=\sin(-x)+\frac{1}{\tan(-x)}=-\sin x-\frac{1}{\tan x}=-\left(\sin x+\frac{1}{\tan x}\right)=-f(x)$，所以 B 对 A 错.

因为 $f(x+\pi)=\sin(x+\pi)+\frac{1}{\tan(x+\pi)}=-\sin x+\frac{1}{\tan x}$ 为奇函数，

所以 $f(x)$ 的图像关于点 $(\pi,0)$ 对称，即 C 对.

因为 $f(x+3\pi)=\sin(x+3\pi)+\frac{1}{\tan(x+3\pi)}$

$=-\sin x+\frac{1}{\tan x}\neq f(x)$，所以 D 错.

11. AC 【解析】$V_{C_1-BDQ}=V_{Q-BDC_1}$，而 $S_{\triangle BDC_1}=\frac{\sqrt{3}}{4}BC_1{}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 8=2\sqrt{3}$ 为定值.

连接 BC_1，则 $AD_1/\!/BC_1$，

所以 $AD_1/\!/$ 平面 BDC_1，所以 AD_1 上所有点到平面 BDC_1 的距离不变，

所以三棱锥 $Q-BDC_1$ 的高不变，所以 $V_{C_1-BDQ}=V_{Q-BDC_1}$ 为定值，A 正确.

B. 若 $AD_1 \perp$ 平面 BQC,则 $AD_1 \perp BC$,所以 $AD_1 \perp AD$,不正确.

所以 B 错误.

C. 因为 BC 为定值，所以只要 Q 到 BC 的距离最长，过 Q 作 $QF \perp AD$ 于 F，过 F 作 $FG \perp BC$ 于 G，连接 QG，则 $QG \perp BC$. 要使 QG 最长，只需 QF 最长，即 Q 点在 D_1 时，$QG=2\sqrt{2}$最长，

此时 $S_{\triangle BQC}=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$，C 正确.

D. 当 Q 在 A 点时，$B-B_1CQ$ 为正三棱锥，

由等体积法$\dfrac{1}{3}$（$S_{\triangle B_1BC}+S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ABB_1}+S_{\triangle AB_1C}$） $\cdot r=V_{B_1-ABC}$，

所以$\dfrac{1}{3}\left(2+2+2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 8\right)\cdot r=\dfrac{1}{3}\times 2\times 2$，

所以 $r=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$，所以 D 不正确.

12. BCD 【解析】由已知有：$f(x)$ 为奇函数，所以 $g(x)=f(x)-x$ 为奇函数，故 A 选项错误；

由已知有：$f(2-x)-f(x)+2x-2=0$ 恒成立，

令 $x=2$ 时，$f(0)-f(2)+2=0$ ①，

因为$f(x)$ 为奇函数，故$f(2-x)+f(-x)+2x-2=0$，

令 $x=0$ 时，$f(2)+f(0)-2=0$ ②，

由①②解得：$f(0)=0$，$f(2)=2$，

故 B 选项正确；

由已知有：$f(2-x)-f(x)+2x-2=0$ 恒成立，

即$f(2-x)-(2-x)=f(x)-x$ 恒成立，

令 $g(x)=f(x)-x$，则 $g(x)$ 是奇函数，$g(2-x)=g(x)$ 恒成立，

则 $g(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，所以 $g(x)$ 是一个周期为 4 的周期函数，

则 $g(2\,022)=g(2)=f(2)-2=0$，

所以$f(2\,022)=g(2\,022)+2\,022=2\,022$，故 C 选项正确；

由已知有：$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导，

对$f(2-x)-f(x)+2x-2=0$ 求导有：$f'(2-x)+f'(x)-2=0$，

令 $x=1$ 时，$f'(1)+f'(1)-2=0$，则$f'(1)=1$，

因为 $g'(x)=f'(x)-1$，所以 $g'(1)=f'(1)-1=0$.

又因为 $g(x)$ 是奇函数，故 $g'(x)$ 是偶函数，所以 $g'(-1)=g'(1)=0$，

故$f'(2\,023)=g'(2\,023)+1=g'(-1)+1=1$，故 D 选项正确.

13. 答案：$-\dfrac{4}{5}$.

【解析】因为 $\sin x-\cos x=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

所以 $\sin 2x=\dfrac{4}{5}$. 所以 $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin 2x=-\dfrac{4}{5}$.

14. 答案：$\frac{7}{15}$.

【解析】设 A 表示选择甲袋，B 表示取出白球，由全概率公式得

$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{15}$.

15. 答案：230.

【解析】因为 $b_{n+1}-(-1)^{n-1}b_n=2n+1$，所以有：

$b_2-b_1=2\times1+1=3$,

$b_3+b_2=2\times2+1=5$,

$b_4-b_3=2\times3+1=7$,

$b_5+b_4=2\times4+1=9$,

$b_6-b_5=2\times5+1=11$,

$b_7+b_6=2\times6+1=13$,

$b_8-b_7=2\times7+1=15$,

…

由此可得出：$b_1+b_3=2$，$b_2+b_4=12$，$b_5+b_7=2$，$b_6+b_8=28$，…，

所以从第一项起，依次相邻两奇数项的和为 2，

从第二项起，依次相邻两偶数项的和组成以 12 为首项，16 为公差的等差数列，

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 20 项和为：$2\times5+\left(12\times5+\frac{1}{2}\times5\times4\times16\right)=230$.

16. 答案：$(e,+\infty)$

【解析】由题意：存在 $x\in(0,+\infty)$，使得不等式 $e^x-a\ln x<a\ln a$ 成立，即 $e^x<a\ln a+a\ln x=a\ln(ax)$ 成立，即 $xe^x<\ln(ax)\,e^{\ln(ax)}$ 成立．令 $h(x)=xe^x$，$x\in(0,+\infty)$，则 $h'(x)=(x+1)e^x>0$ 恒成立，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以只需 $x\in(0,+\infty)$ 时，有 $x<\ln(ax)$ 成立，即 $e^x<ax$ 成立．令 $f(x)=\frac{e^x}{x}$，则 $f'(x)=\frac{(x-1)}{x^2}e^x$，所以当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$．所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增．所以 $f(x)$ 的最小值为 e．所以 a 的取值范围是 $(e,+\infty)$.

17. 解：(1) 由题意可知 $b\sin C\cos C+c\sin C\cos B=\sqrt{3}a\cos C$.

所以 $(b\cos C+c\cos B)\sin C=\sqrt{3}a\cos C$,

所以 $a\sin C=\sqrt{3}a\cos C$ ………………………………………………… 2 分

所以 $\tan C=\sqrt{3}$. ………………………………………………………… 3 分

因为 $0<C<\pi$,

所以 $C=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………………………………… 4 分

(2) $\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin(B+C)}{\sin B}=\frac{\sin B\cdot\cos C+\cos B\cdot\sin C}{\sin B}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\tan B}$. …… 6 分

因为$\triangle ABC$为锐角三角形，

所以$\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$，

所以$\frac{\sqrt{3}}{3}<\tan B$， ………………………………………………………… 8 分

所以$\frac{1}{2}<\frac{1}{2}+\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\tan B}<2$，

即$\frac{a}{b}$的取值范围为$\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$. ……………………………………………… 10 分

18. (1) 解：因为$f'(x)=e^{\sin x}\cos x-1$，且$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=e-\frac{\pi}{2}-1$，$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$，…
……………………………………………………………………………………… 2 分

所以切线方程为$y-\left(e-\frac{\pi}{2}-1\right)=-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$， ……………………………… 3 分

即所求切线方程为：$x+y-e+1=0$. ……………………………………………… 4 分

(2) 证明：$f'(x)=e^{\sin x}\cdot\cos x-1$.

因为$x\in(-1,0]$，所以$\sin x\leqslant0$，$e^{\sin x}\leqslant1$，$0<\cos x\leqslant1$， ………………… 7 分

所以$e^{\sin x}\cdot\cos x\leqslant1$，

所以$f'(x)\leqslant0$， ……………………………………………………………… 10 分

所以$f(x)$在$(-1,0]$上是减函数，且$f(0)=0$， ………………………… 11 分

所以$f(x)$在$(-1,0]$上仅有一个零点. ……………………………………… 12 分

注：其他方法灵活给分.

19. 解：(1) 因为$2a_{n+1}+a_n\cdot a_{n-1}-2a_n=0$，

所以$\frac{2}{a_n}+1-\frac{2}{a_{n+1}}=0$，

所以$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}$（常数）， ………………………………………………… 2 分

故数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是以$\frac{1}{2}$为公差的等差数列，且首项为$\frac{1}{a_1}=\frac{1}{2}$，

所以$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{n}{2}$，故$a_n=\frac{2}{n}$. ……………………………………… 4 分

因为$b_n=a_n\cdot a_{n+1}=\frac{2}{n}\cdot\frac{2}{n+1}=\frac{4}{n(n+1)}=4\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$， ………………… 5 分

所以$S_n=4\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=4\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{4n}{n+1}$.
……………………………………………………………………………………… 6 分

(2) $C_n=\frac{2^n a_n}{b_n}=\frac{2^n a_n}{a_n a_{n+1}}=\frac{2^n}{a_{n+1}}=2^n\cdot\frac{n+1}{2}=(n+1)\cdot2^{n-1}$. ………………… 7 分

所以$T_n=1\times2+2\times3+2^2\times4+2^3\times5+\cdots+2^{n-2}\cdot n+2^{n-1}\cdot(n+1)$，

所以$2T_n=2\times2+2^2\times3+2^3\times4+2^4\times5+\cdots+2^{n-2}\cdot(n-1)+2^{n-1}\cdot n+2^n\cdot(n$

$+1)$， …………………………………………………………………………… 8 分

两式相减得，$-T_n=2+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}-2^n\cdot(n+1)$

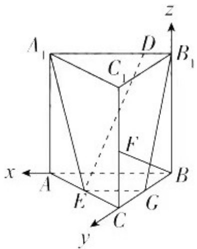
$=2+\dfrac{2-2^n}{1-2}-2^n\cdot(n+1)=-n\cdot 2^n$，…………………………………………… 10 分

所以 $T_n=n\cdot 2^n$.

由 $T_{n+1}-T_n=(n+1)\cdot 2^{n+1}-n\cdot 2^n=(n+2)\cdot 2^n>0$，知 T_n 在 $n\in\mathbf{N}^*$ 上单调递增，

所以 $T_n\geqslant T_1=2$，所以 $\lambda^2-2\lambda-1<2$，解得 $\lambda\in(-1,3)$. ………………… 12 分

20. (1) 证法一：取 BC 的中点 G，连接 EG，B_1G，



则 $A_1E\subset$ 平面 EGB_1A_1，

只需证 $BF\perp$ 平面 EGB_1A_1 即可.

因为四边形 AA_1B_1B 为正方形，$BA=BC$，所以四边形 BCC_1B_1 为正方形，

所以 $\triangle CFB\cong\triangle BGB_1$，

所以 $\angle FBG=\angle GB_1B$.

又因为 $\angle GB_1B+\angle BGB_1=90°$，

所以 $\angle FBG+\angle BGB_1=90°$，

所以 $BF\perp B_1G$. …………………………………………………………………… 2 分

又因为 $AB\perp BB_1$，$AB\perp BC$，

$B_1B\cap BC=B$，BB_1，$BC\subset$ 平面 B_1BCC_1，

所以 $AB\perp$ 平面 B_1BCC_1，

所以 $AB\perp BF$，…………………………………………………………………… 4 分

所以 $BF\perp A_1B_1$. 因为 $A_1B_1\cap B_1G=B_1$，A_1B_1，$B_1G\subset$ 平面 EGB_1A_1，………… 5 分

所以 $BF\perp$ 平面 EGB_1A_1，

所以 $BF\perp A_1E$. …………………………………………………………………… 6 分

证法二：因为 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，且 $AB=BC=2$，

所以 $\angle ABC=90°$.

又因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱，所以 $BB_1\perp$ 平面 ABC.

分别以向量 $\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BB_1}$ 的正方向为 x，y，z 轴的正方向建立空间直角坐标系，

…………………………………………………………………………………… 2 分

则 $A_1(2,0,2)$，$B(0,0,0)$，$E(1,1,0)$，$F(0,2,1)$，

所以 $\overrightarrow{A_1E}=(-1,1,-2)$，$\overrightarrow{BF}=(0,2,1)$，…………………………………… 4 分

所以 $\overrightarrow{A_1E}\cdot\overrightarrow{BF}=0+2-2=0$，所以 $BF\perp A_1E$. ………………………………… 6 分

(2) 解：设 $B_1D=t$ $(t\in[0,2])$，则 $D(t,0,2)$，$\overrightarrow{DE}=(1-t,1,-2)$.

因为 $AB\perp BC$，$AB\perp BB_1$，$BC\cap BB_1=B$，BC，$BB_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，

所以 $AB\perp$ 平面 BCC_1B_1，所以 $\overrightarrow{BA}$ 是平面 BB_1C_1C 的一个法向量且 $\overrightarrow{BA}=(2,0,0)$.

…………………………………………………………………………………… 9 分

因为直线 DE 与平面 BB_1C_1C 所成的线面角的正弦值为$\frac{\sqrt{21}}{21}$，

所以 $|\cos\langle\overrightarrow{DE},\overrightarrow{BA}\rangle|=\frac{|2-2t|}{2\times\sqrt{(1-t)^2+5}}=\frac{\sqrt{21}}{21}$，……………………… 11 分

化简得：$(1-t)^2=\frac{1}{4}$且 $t\in[0,2]$，所以 $t=\frac{1}{2}$或 $t=\frac{3}{2}$，

即 $B_1D=\frac{1}{2}$，或 $B_1D=\frac{3}{2}$. …………………………………………………… 12 分.

21. 解：（1）剂型 α_1 合格的概率为：$\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$；剂型 α_2 合格的概率为：$\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$. ……………………………………………………………… 2 分

由题意知 X 的所有可能取值为 0，1，2.

则 $P(X=0)=\left(1-\frac{3}{5}\right)\times\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{6}{25}$，$P(X=1)=\left(1-\frac{3}{5}\right)\times\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\times\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{13}{25}$，$P(X=2)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$，……………………………………… 5 分

则 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{6}{25}$	$\frac{13}{25}$	$\frac{6}{25}$

数学期望 $E(X)=0\times\frac{6}{25}+1\times\frac{13}{25}+2\times\frac{6}{25}=1$. …………………………………… 6 分

（2）检测 3 人确定“感染高危户”的概率为 $(1-p)^2p$，

检测 4 人确定“感染高危户”的概率为 $(1-p)^3p$，

则 $f(p)=(1-p)^2p+(1-p)^3p=(1-p)^2p(2-p)$. ……………………… 8 分

令 $x=1-p$，因为 $0<p<1$，所以 $0<x<1$，

原函数可化为 $g(x)=x^2(1-x^2)\ (0<x<1)$.

因为 $x^2(1-x^2)\leqslant\frac{[x^2+(1-x^2)]^2}{4}=\frac{1}{4}$，…………………………………… 10 分

当且仅当 $x^2=1-x^2$，即 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，等号成立.

此时 $p=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $p_0=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$. ………………………………………… 12 分

22. （1）解：当 $a=1$ 时，$f'(x)=x-\frac{1}{x}-\ln x$；令 $g(x)=f'(x)=x-\frac{1}{x}-\ln x$，

则$g'(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2}=\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}{x^2}>0$，所以函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

由 $g(1)=0$， ………………………………………………………………… 2分

所以 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)=g(x)<0$；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)=g(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增， …………… 4分

所以函数 $f(x)$ 有极小值为 $f(1)=\frac{3}{2}$，无极大值. ………………………… 5分

(2) ①解：由 $g(x)=f'(x)=x-\frac{1}{x}-a\ln x\ (x>0)$，

所以 $g'(x)=\frac{x^2-ax+1}{x^2}=\frac{x+\frac{1}{x}-a}{x}$. 于是，当 $a\leqslant 2$ 时，$g'(x)\geqslant 0$，函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，此时至多有一个零点，不符合.

当 $a>2$ 时，函数 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{a-\sqrt{-4+a^2}}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{a-\sqrt{-4+a^2}}{2},\frac{a+\sqrt{-4+a^2}}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{a+\sqrt{-4+a^2}}{2},+\infty\right)$ 上单调递增.

注意到 $g(1)=0$，当 $a>2$ 时，$1\in\left(\frac{a-\sqrt{-4+a^2}}{2},\frac{a+\sqrt{-4+a^2}}{2}\right)$，

所以 $g\left(\frac{a-\sqrt{-4+a^2}}{2}\right)>0$，$g\left(\frac{a+\sqrt{-4+a^2}}{2}\right)<0$.

又 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，根据零点存在定理，若 $g(x)$ 有三个零点，则 $f(x)$ 有三个极值点，所以 $a>2$. ……………………………………………………… 8分

②证明：由题意知 $0<x_1<x_2=1<x_3$，

又 $g\left(\frac{1}{x}\right)=-g(x)$，所以 $g\left(\frac{1}{x_3}\right)=-g(x_3)=0=g(x_1)$，即 $x_1x_3=1$.

当 $x>1$ 时，先证明不等式 $\ln x>\frac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$ 成立.

令 $h(x)=\ln x-\frac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$，则

$h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{12(x^2+x+1)}{(x^2+4x+1)(x^2+4x+1)}=\frac{(x-1)^4}{x(x^2+4x+1)(x^2+4x+1)}>0$，

所以函数 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，进而 $h(x)>h(1)=0$.

………………………………………………………………………………… 10分

所以当 $x>1$ 时，$\ln x>\frac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$ 恒成立.

由 $g(x_3)=x_3-\frac{1}{x_3}-a\ln x_3=0$，得

$x_3-\frac{1}{x_3}=a\ln x_3>\frac{3a(x_3{}^2-1)}{x_3{}^2+4x_3+1}$，所以 $x_3{}^2+4x_3+1>3ax_3$，进而 $x_3+4+\frac{1}{x_3}>3a$.

又 $x_1x_3=1$，所以 $x_1+x_3+4x_1x_3>3a$. ……………………………………… 12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线