

上海 2022 届高三开学考模拟试卷 (一)

2021.08

一. 填空题 (1~6 题每小题 4 分, 7~12 题每小题 5 分, 本大题满分 54 分)

1. 已知集合  $A = \{x | x^2 - 3x - 4 = 0\}$ ,  $B = \{x | mx + 1 = 0, m \in \mathbf{R}\}$ , 且  $A \cup B = A$ , 则所有满足条件的  $m$  构成的集合为 \_\_\_\_\_.
2. 设  $a, b \in \mathbf{R}$ , 则“ $b = \tan \alpha$ ”是“ $\alpha = \arctan b$ ”的 \_\_\_\_\_ 条件.
3.  $z + 2\bar{z} = 9 + 4i$  ( $i$  为虚数单位), 则  $|z| =$  \_\_\_\_\_.
4. 若  $\triangle ABC$  中,  $a + b = 4$ ,  $C = 30^\circ$ , 则  $\triangle ABC$  面积的最大值是 \_\_\_\_\_.
5. 设直线  $l$  过点  $P(-4, 0)$ , 且与直线  $m: 3x - y + 1 = 0$  的夹角为  $\arccos \frac{3\sqrt{10}}{10}$ , 则直线  $l$  的方程是 \_\_\_\_\_.
6. 设常数  $a > 0$ ,  $\left(x + \frac{a}{\sqrt{x}}\right)^9$  展开式中  $x^6$  的系数为 4, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a + a^2 + \dots + a^n) =$  \_\_\_\_\_.
7. 已知  $y = f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 且当  $x > 0$  时,  $f(x) = -\frac{1}{4^x} + \frac{1}{2^x} + 1$ , 则此函数的值域为 \_\_\_\_\_.
8. 已知函数  $f(x) = \log_8(x + 8 - \frac{a}{x})$  在  $[2, +\infty)$  上是增函数, 则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.
9. 奇函数  $y = f(x)$  满足对任意  $x \in \mathbf{R}$  都有  $f(2+x) + f(2-x) = 0$ , 且  $f(1) = 9$ , 则  $f(2016) + f(2017) + f(2018)$  的值为 \_\_\_\_\_.
10. 在直角坐标系中, 已知  $A(1, 0)$ ,  $B(4, 0)$ , 若直线  $x + my - 1 = 0$  上存在点  $P$ , 使得  $|PA| = 2|PB|$ , 则实数  $m$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.
11. 下列命题:
  - ①关于  $x, y$  的二元一次方程组  $\begin{cases} mx + y = -1 \\ 3mx - my = 2m + 3 \end{cases}$  的系数行列式  $D = 0$  是该方程组有解的必要非充分条件;
  - ②已知  $E, F, G, H$  是空间四点, 命题甲:  $E, F, G, H$  四点不共面, 命题乙: 直线  $EF$  和  $GH$  不相交, 则甲成立是乙成立的充分非必要条件;
  - ③“ $a < 2$ ”是“对任意的实数  $x, |x+1| + |x-1| \geq a$  恒成立”的充要条件;
  - ④“ $p = 0$  或  $p = -4$ ”是“关于  $x$  的方程  $\frac{p}{x} = x + p$  有且仅有一个实根”的充要条件;
 其中, 真命题序号是 \_\_\_\_\_.



三. 解答题 (本大题满分 76 分, 小题分数为 14+14+14+16+18)

17. 关于  $x$  的不等式  $\left| \frac{x+a}{1} - \frac{2}{x} \right| < 0$  的解集为  $(-1, b)$ .

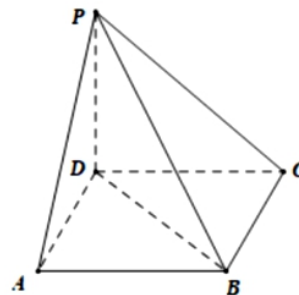
(1) 求实数  $a, b$  的值;

(2) 若  $z_1 = a + bi, z_2 = \cos\alpha + i\sin\alpha$ , 且  $z_1 z_2$  为纯虚数, 求  $\tan\alpha$  的值.

18. 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PD \perp$  底面  $ABCD$ , 且底面  $ABCD$  为平行四边形, 若  $\angle DAB = 60^\circ, AB = 2, AD = 1$ .

(1) 求证:  $PA \perp BD$ ;

(2) 若  $\angle PCD = 45^\circ$ , 求点  $D$  到平面  $PBC$  的距离  $h$ .



19. 如果一条信息有  $n$  ( $n > 1, n \in \mathbb{N}$ ) 种可能的情形 (各种情形之间互不相容), 且这些情形发生的概率分别为  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , 则称  $H = f(p_1) + f(p_2) + \dots + f(p_n)$  (其中  $f(x) = -x \log_2 x, x \in (0, 1)$ ) 为该条信息的信息熵. 已知  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ .

(1) 若某班共有 32 名学生, 通过随机抽签的方式选一名学生参加某项活动, 试求“谁被选中”的信息熵的大小;

(2) 某次比赛共有  $n$  位选手 (分别记为  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ) 参加, 若当  $k = 1, 2, \dots, n-1$  时, 选手  $A_k$  获得冠军的概率为  $2^{-k}$ , 求“谁获得冠军”的信息熵  $H$  关于  $n$  的表达式.

20. 双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $b > 0$ ) 的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 直线  $l$  过  $F_2$  且与双曲线交于  $A, B$  两点.

(1) 若  $l$  的倾斜角为  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\triangle F_1AB$  是等边三角形, 求双曲线的渐近线方程;

(2) 设  $b = \sqrt{3}$ , 若  $l$  的斜率存在, 且  $(\overline{F_1A} + \overline{F_1B}) \cdot \overline{AB} = 0$ , 求  $l$  的斜率.

21. 若定义在  $\mathbb{R}$  上的函数  $y = f(x)$  满足: 对于任意实数  $x, y$ , 总有  $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$  恒成立, 我们称  $f(x)$  为“类余弦型”函数.

(1) 已知  $f(x)$  为“类余弦型”函数, 且  $f(1) = \frac{5}{4}$ , 求  $f(0)$  和  $f(2)$  的值;

(2) 在 (1) 的条件下, 定义数列  $a_n = 2f(n+1) - f(n)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). 求

$\log_2 \frac{a_1}{3} + \log_2 \frac{a_2}{3} + \dots + \log_2 \frac{a_{2017}}{3} + \log_2 \frac{a_{2018}}{3}$  的值.

(3) 若  $f(x)$  为“类余弦型”函数, 且对于任意非零实数  $t$ , 总有  $f(t) > 1$ , 证明: 函数  $f(x)$  为偶函数, 设有理数  $x_1, x_2$  满足  $|x_1| < |x_2|$ , 判断  $f(x_1)$  和  $f(x_2)$  的大小关系, 并证明你的结论.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料:

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》