

2024 届高三开学摸底联考 全国卷 理科数学试题

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为 120 分钟, 满分 150 分

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \left\{x \mid \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}\right\}$, 则 $A \cap B =$

A. $\{1\}$ B. $\{3, 4\}$ C. $\{2, 3, 4\}$ D. $\{1, 2, 3, 4\}$

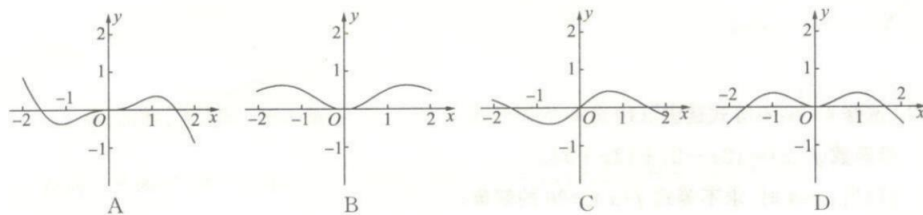
2. 已知复数 $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (i 是虚数单位), 则 $\frac{z^2}{z}$ =

A. 1 B. i C. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ D. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

3. 已知 $\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha = \frac{8}{5}$, 则 $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) =$

A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $-\frac{3}{5}$ D. $-\frac{4}{5}$

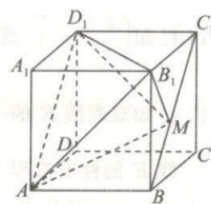
4. 函数 $f(x) = \frac{2x \sin x}{e^x + e^{-x}}$ (e 为自然对数的底数) 在 $[-2, 2]$ 的大致图象是



5. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均为等差数列, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $\frac{a_n}{b_n}$ 为定值, $S_5 = 45$, $b_3 = 6$, $b_7 = 14$, 则 $a_5 =$

A. 15 B. 56 C. 72 D. 104

6. 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 M 在对角线 BC_1 上移动, 则三棱锥 $M-AB_1D_1$ 的体积为



- A. $\frac{8}{3}$ B. 8
C. $\frac{4}{3}$ D. 4

7. 已知椭圆 $\frac{x^2}{10-t} + \frac{y^2}{t-4} = 1$ 的焦点在 y 轴上, 若焦距为 4, 则该椭圆的离心率为

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

8. 已知实数 m, n 满足 $0 < m < \frac{1}{2}, 1 < n < 2$, 则下列关系中正确的是

- A. $mn^2 > 1$ B. $\sin m > \sin \frac{1}{n}$ C. $m^n < n^m$ D. $\log_m n < \log_n m$

9. 某冷饮店有“桃喜芒芒”“草莓啾啾”“蜜桃四季春”“芋圆葡萄”四种饮品可供选择, 现有四位同学到店每人购买一杯饮品, 则恰有两种饮品没人购买的概率为

- A. $\frac{21}{64}$ B. $\frac{9}{64}$ C. $\frac{15}{16}$ D. $\frac{15}{32}$

10. “三分损益法”是古代中国发明的制定音律时所用的生律法. 例如: 假设能发出第一个基准音的乐器的长度为 36, 那么能发出第二个基准音的乐器的长度为 $36 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 24$, 能发出第三个基准音的乐器的长度为 $24 \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) = 32, \dots$, 也就是依次先减少三分之一, 后增加三分之一, 以此类推. 现有一兴趣小组采用此规律构造了一个共 12 项的数列 $\{a_n\}$ 用来研究数据的变化, 已知 $a_8 = 192$, 则 $a_5 =$

- A. 324 B. 297 C. 256 D. 168

11. 已知随机变量 ξ_i 服从两点分布, 且 $P(\xi_i = 1) = p_i (i = 1, 2)$, 若 $\frac{1}{2} < p_1 < p_2 < 1$, 则下列判断正确的是

- A. $E(\xi_2) < D(\xi_2)$ B. $E(\xi_1) > E(\xi_2)$ C. $E(\xi_1) < D(\xi_1)$ D. $D(\xi_1) > D(\xi_2)$

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x, & x < 0, \\ 2^x - 2, & x \geq 0, \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f^2(x) - (2a + 1)f(x) + a^2 + a = 0$ 有

6 个不同的实根, 则实数 a 的取值范围为

- A. $(-1, 0)$ B. $(-1, 2)$ C. $[0, 1)$ D. $(0, 1)$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知 t 为实数, $a = (2, t), b = (3, 0)$, 则向量 a 在向量 b 方向上的投影为 _____.

开学摸底联考 全国卷 理科数学试题 第 2 页 (共 4 页)

14. 已知 $(\frac{2}{x} + x^2)^6$ 的展开式中的常数项为 _____.

15. 已知双曲线 E 的一个焦点为 F , 点 F 到双曲线 E 的一条渐近线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 的距离为 1, 则双曲线 E 的标准方程是 _____.

16. 已知在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA+BC=4, AB \perp AC, PA \perp$ 平面 ABC , 则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球表面积的最小值为 _____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答。

(一) 必考题: 60 分。

17. (12 分) 某厂家为增加销售量特举行有奖销售活动, 即每位顾客购买该厂生产的产品后均有一次抽奖机会, 在一个不透明的盒子中放有四个大小、质地完全相同的小球分别标有 1, 2, 3, 5 四个数字, 抽奖规则为: 每位顾客从盒中一次性抽取两个小球, 记下小球上的数字后放回, 记两个小球上的数字分别为 ξ, η , 若 $|\xi - \eta|$ 为奇数即为中奖。

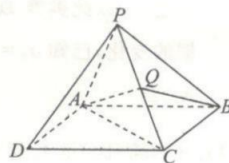
(1) 求某顾客甲获奖的概率;

(2) 求随机变量 $X = |\xi - \eta|$ 的分布列与数学期望 $E(X)$ 。

18. (12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面四边形 $ABCD$ 为矩形, 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD, PA \perp PB, AB = \sqrt{5}, PB = BC = 2$, 点 Q 为 PC 的中点。

(1) 求证: 平面 $ABQ \perp$ 平面 PAC ;

(2) 求二面角 $A-PC-D$ 的余弦值。

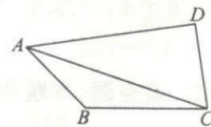


19. (12 分) 如图, $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\triangle ABC$ 外一点 D (D 与 $\triangle ABC$

在同一平面内) 满足 $\angle BAC = \angle DAC, AB = CD = 2, \sin \angle ACB + \cos \angle ACB = \frac{\sqrt{2}c + a}{b}$.

(1) 求 B ;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 2, 求线段 AD 的长。



20.(12分)已知函数 $f(x) = x^2 - mx \ln x + 1, m \in \mathbf{R}$ 且 $m \neq 0$.

(1)当 $m=1$ 时,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2)若关于 x 的不等式 $f(x) \geq \frac{2}{e}x$ 恒成立,其中 e 是自然对数的底数,求实数 m 的取值范围.

21.(12分)已知点 F 为抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点,点 $P(2,1), Q(0,1)$,且 $|PF| = |QF|$.

(1)求抛物线 C 的标准方程;

(2)若斜率存在的直线 l 过点 P 且交抛物线 C 于 M, N 两点,若直线 MF, NF 交抛物线于 A, B 两点(M, N 与 A, B 不重合),求证:直线 AB 过定点.

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.[选修 4-4:坐标系与参数方程](10分)

在平面直角坐标系 xOy 中,射线 l 的方程为 $y = \sqrt{3}x (x \geq 0)$,曲线 C 的方程为 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$.以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系.

(1)求射线 l 和曲线 C 的极坐标方程;

(2)若射线 l 与曲线 C 交于点 P ,将射线 OP 绕极点按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$ 交 C 于点 Q ,求 $\triangle POQ$ 的面积.

23.[选修 4-5:不等式选讲](10分)

设函数 $f(x) = |2x-2| + |2x+a|$.

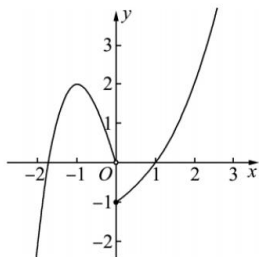
(1)当 $a=4$ 时,求不等式 $f(x) \geq 26$ 的解集;

(2)若 $a > 0, b > 0, f(x)$ 的最小值为 m ,且 $m+b=6$,求证: $\frac{1}{a+4} + \frac{1}{4b} \geq \frac{9}{32}$.

2024 届高三开学摸底联考 全国卷

理科数学参考答案及评分意见

- 1.C 【解析】因为 $B = \{x | x < 0 \text{ 或 } x \geq 2\}$, 又 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 由交集的运算可知: $A \cap B = \{2, 3, 4\}$. 故选 C.
- 2.A 【解析】由题可知, $z^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \bar{z}$, 故 A 正确. 故选 A.
- 3.B 【解析】由题 $\frac{1}{2}\cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{4}{5}$. 故选 B.
- 4.B 【解析】由题意 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(-x) = \frac{2 \cdot (-x) \cdot \sin(-x)}{e^{-x} + e^x} = f(x)$, 即 $f(x)$ 为偶函数, 所以图象关于 y 轴对称, 排除 A、C. 又 $f(1) = \frac{2\sin 1}{e + e^{-1}} < 1$, $f(2) = \frac{4\sin 2}{e^2 + e^{-2}} > 0$, 故选 B.
- 5.A 【解析】由 $S_5 = 5a_3 = 45$ 得 $a_3 = 9$, 因为 $\frac{a_n}{b_n}$ 为定值, 所以 $\frac{a_7}{b_7} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$, 即 $a_7 = 21$, 所以 $a_5 = \frac{a_3 + a_7}{2} = 15$. 故选 A.
- 6.C 【解析】由题可得 $V_{M-AB_1D_1} = V_{B_1-AMD_1} = \frac{1}{3} \cdot S_{AMD_1} \cdot d = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} \times 2 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} = \frac{4}{3}$. 故选 C.
- 7.B 【解析】由题得 $t - 4 > 10 - t > 0$ 即 $7 < t < 10$, 由焦距为 4 得 $t - 4 - (10 - t) = 4$, 解得 $t = 9$, 离心率为 $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. 故选 B.
- 8.C 【解析】由题易知, 取 $m = \frac{1}{4}$, $n = \frac{3}{2}$, 则 $mn^2 = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{16} < 1$, 所以 A 错误; $0 < m < \frac{1}{2} < \frac{1}{n} < 1 < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\sin m < \sin \frac{1}{n}$, B 错误; $m^n < 1, n^m > 1$, 所以 $m^n < n^m$, C 正确; $\frac{1}{m} > 2, \frac{1}{2} < \frac{1}{n} < 1, \log_m n > \log_m \frac{1}{m} = -1, \log_m m < \log_n \frac{1}{n} = -1$, 即 $\log_m n > \log_n m$, D 错误. 故选 C.
- 9.A 【解析】解决该问题, 可以将四位同学先分为 2, 2 或 3, 1 两堆, 共有 $\frac{C_4^2}{A_2^2} + C_4^3$ 种分堆方法, 再从 4 种饮品中选出 2 种, 分配给两堆人, 故共有 $\left(\frac{C_4^2}{A_2^2} + C_4^3\right) \times A_4^2 = 84$ 种方法. 所以恰有两种饮品没人购买的概率为 $P = \frac{84}{4^4} = \frac{21}{64}$. 故选 A.
- 10.A 【解析】 $a_8 = a_5 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right)$, 即 $a_5 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 192$, 解得: $a_5 = 324$. 故选 A.
- 11.D 【解析】 $\because E(\xi_1) = p_1, E(\xi_2) = p_2, \therefore E(\xi_1) < E(\xi_2), \therefore D(\xi_1) = p_1(1 - p_1), D(\xi_2) = p_2(1 - p_2), \therefore E(\xi_2) > D(\xi_2), E(\xi_1) > D(\xi_1), D(\xi_1) - D(\xi_2) = (p_1 - p_2)(1 - p_1 - p_2) > 0$. 故选 D.
- 12.D 【解析】当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^3 - 3x$, 则 $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$, 当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 作出 $f(x)$ 的图象, 如图所示, $f^2(x) - (2a + 1)f(x) + a^2 + a = (f(x) - a)(f(x) - a - 1) = 0$,



即 $f(x)=a$ 与 $f(x)=a+1$ 共六个不等实根,由图可知 $f(x)=2$ 时, $x=-1$ 或 $x=2$,即 $f(x)=2$ 有两个根,

若使 $f(x)=a$ 与 $f(x)=a+1$ 共六个不等实根,只需满足 $\begin{cases} 0 < a < 2, \\ 0 < a+1 < 2, \end{cases}$ 即 $0 < a < 1$. 故选 D.

13.2 【解析】由题 $a \cdot b = 6$, 则向量 a 在向量 b 方向上的投影为 $\frac{a \cdot b}{|b|} = \frac{6}{\sqrt{9+0}} = 2$.

14.240 【解析】由题 $T_{r+1} = C_6^r \left(\frac{2}{x}\right)^{6-r} \cdot (x^2)^r = 2^{6-r} C_6^r x^{3r-6}$, $r=0, 1, \dots, 6$, 当 $r=2$ 时, 为常数项, 此时 $T_3 = 2^4 C_6^2 = 240$.

15. $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 或 $\frac{y^2}{1} - x^2 = 1$ 【解析】当焦点在 x 轴上时, 设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 则其渐近线方

程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 点 F 到双曲线 E 的一条渐近线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 的距离为 1, 即 $\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ b = 1, \end{cases}$ 即 $a = \sqrt{3}$, 所以此时双曲线 E

的标准方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$; 当焦点在 y 轴上时, 设双曲线方程为 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 则其渐近线方程为 $y =$

$\pm \frac{a}{b}x$, 点 F 到双曲线 E 的一条渐近线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 的距离为 1, 即 $\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ b = 1, \end{cases}$ 即 $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以此时双曲线 E 的标准

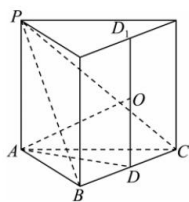
方程为 $\frac{y^2}{1} - x^2 = 1$. 综上, 双曲线 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 或 $\frac{y^2}{1} - x^2 = 1$.

16.8π 【解析】将三棱锥补成直三棱柱, 设点 D_1, D 为上下底面的外心, 点 O 为直棱柱的外接球的球心, 则 O 为

DD_1 的中点, 点 D 为 BC 的中点, AD 为底面外接圆的半径, 设 $PA = x$, 则 $BC = 4 - x$, 所以 $OD = \frac{x}{2}$, $AD = \frac{4-x}{2}$

$= 2 - \frac{x}{2}$, 得外接球半径 $R = AO = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{2} - 2x + 4} = \sqrt{\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2}$, 当 $x=2$ 时, R 有最

小值为 $\sqrt{2}$, 此时球 O 的表面积为: $4\pi R^2 = 8\pi$.



17.解: (1) 设事件 A : 某顾客甲获奖, 即 $|\xi - \eta|$ 为奇数, 则 $P(A) = \frac{C_1^1 C_3^1}{C_4^2} = \frac{1}{2}$,

所以某顾客甲获奖的概率为 $\frac{1}{2}$ 3 分

(2) 由题意, X 的可能取值为 1, 2, 3, 4. 5 分

所以 $P(X=1) = \frac{2}{C_4^2} = \frac{1}{3}$, 6 分

$P(X=2) = \frac{2}{C_4^2} = \frac{1}{3}$, 7 分

$P(X=3) = \frac{1}{C_4^2} = \frac{1}{6}$, 8 分

$P(X=4) = \frac{1}{C_4^2} = \frac{1}{6}$ 9分

所以随机变量 X 的分布列为:

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

..... 10分

所以 $E(X) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} = \frac{13}{6}$ 12分

18.(1)证明: \because 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD, BC \perp AB$, 平面 $PAB \cap$ 平面 $ABCD = AB$,

$\therefore BC \perp$ 平面 PAB , 又 $\because AP \subset$ 平面 PAB ,
 $\therefore BC \perp AP$ 1分

又 $\because PA \perp PB, BC \cap BP = B, BC, BP \subset$ 平面 BPC ,
 $\therefore AP \perp$ 平面 $BPC, BQ \subset$ 平面 BPC , 即 $AP \perp BQ$ 2分

在 $\triangle BCP$ 中, $PB = BC, Q$ 为 PC 的中点,
 $\therefore BQ \perp PC$, 3分

又 $AP \cap PC = P, AP, PC \subset$ 平面 PAC ,
 $\therefore BQ \perp$ 平面 PAC , 4分

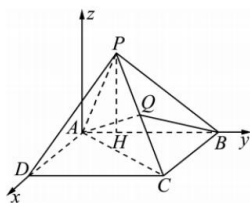
又 $BQ \subset$ 平面 ABQ ,
 \therefore 平面 $ABQ \perp$ 平面 PAC 5分

(2)解: 作 $PH \perp AB$ 于点 H , 易知 $PH \perp$ 平面 $ABCD$,

在 $Rt\triangle PAB$ 中, $PA = \sqrt{AB^2 - PB^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2^2} = 1$,

则 $PH = \frac{PA \cdot PB}{AB} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, AH = \sqrt{PA^2 - PH^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 6分

如图以 A 点为原点, AD, AB 所在直线为 x 轴, y 轴建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A(0,0,0), B(0,\sqrt{5},0), C(2,\sqrt{5},0), D(2,0,0), P\left(0,\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right), Q\left(1,\frac{3\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5}\right), \vec{PC} = \left(2,\frac{4\sqrt{5}}{5},-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right), \vec{CD} = (0,-\sqrt{5},0)$ 8分

由(1)知 $BQ \perp$ 平面 PAC , 所以平面 PAC 的一个法向量为 $\vec{BQ} = \left(1,-\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, 9分

设平面 PCD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \vec{PC} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \vec{CD} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2x + \frac{4\sqrt{5}}{5}y - \frac{2\sqrt{5}}{5}z = 0, \\ -\sqrt{5}y = 0, \end{cases}$ 取 $x=1$, 得 $\mathbf{n} = (1, 0, \sqrt{5})$ 10分

$$\cos\langle\vec{BQ}, \mathbf{n}\rangle = \frac{\vec{BQ} \cdot \mathbf{n}}{|\vec{BQ}| |\mathbf{n}|} = \frac{1+1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \dots\dots\dots 11 \text{分}$$

由题可知二面角为锐角,所以二面角 $A-PC-D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

19.解:(1)因为 $\cos C + \sin C = \frac{\sqrt{2}c+a}{b}$,

由正弦定理可得 $\cos C + \sin C = \frac{\sqrt{2} \sin C + \sin A}{\sin B}$,

即 $\sin B \cos C + \sin B \sin C = \sqrt{2} \sin C + \sin A = \sqrt{2} \sin C + \sin[\pi - (B+C)] = \sqrt{2} \sin C + \sin(B+C) = \sqrt{2} \sin C + (\sin B \cos C + \cos B \sin C)$,

即 $\sin B \sin C = \sqrt{2} \sin C + \cos B \sin C$. $\dots\dots\dots 3 \text{分}$

又 $C \in (0, \pi)$, $\sin C > 0$,故 $\sin B = \sqrt{2} + \cos B$,即 $\sin B - \cos B = \sqrt{2}$, $\dots\dots\dots 4 \text{分}$

所以 $\sqrt{2} \sin\left(B - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$,即 $\sin\left(B - \frac{\pi}{4}\right) = 1$, $\dots\dots\dots 5 \text{分}$

因为 $B \in (0, \pi)$, $B - \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$,所以 $B - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$,得 $B = \frac{3\pi}{4}$. $\dots\dots\dots 6 \text{分}$

(2)因为 $\triangle ABC$ 的面积 $S = 2$,所以 $S = 2 = \frac{1}{2}ac \sin \frac{3\pi}{4}$,即 $\frac{\sqrt{2}}{2}a = 2$, $a = 2\sqrt{2}$, $\dots\dots\dots 8 \text{分}$

由余弦定理得 $AC = \sqrt{c^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos B} = 2\sqrt{5}$, $\dots\dots\dots 9 \text{分}$

所以 $\cos \angle CAB = \frac{4+20-8}{2 \times 2 \times 2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\dots\dots\dots 10 \text{分}$

因为 AC 平分 $\angle BAD$,

所以 $\cos \angle CAD = \frac{AD^2 + 20 - 4}{2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot AD} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\dots\dots\dots 11 \text{分}$

所以 $AD = 4$. $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

20.解:(1)由题,当 $m = 1$ 时, $f(x) = x^2 - x \ln x + 1$,

$f'(x) = 2x - \ln x - 1$, $\dots\dots\dots 1 \text{分}$

$f'(1) = 1, f(1) = 2$, $\dots\dots\dots 2 \text{分}$

所以切线方程为 $y - 2 = x - 1$, $\dots\dots\dots 3 \text{分}$

化简得 $x - y + 1 = 0$,

即曲线 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $x - y + 1 = 0$. $\dots\dots\dots 4 \text{分}$

(2) $f(x) \geq \frac{2}{e}x$,即 $x^2 - mx \ln x + 1 \geq \frac{2}{e}x$,即 $x + \frac{1}{x} - m \ln x - \frac{2}{e} \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, $\dots\dots\dots 5 \text{分}$

令 $g(x) = x + \frac{1}{x} - m \ln x - \frac{2}{e}$,则 $g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{m}{x} = \frac{x^2 - mx - 1}{x^2}$. $\dots\dots\dots 6 \text{分}$

对于 $y = x^2 - mx - 1, \Delta = m^2 + 4 > 0$,故其必有两个零点,且两个零点的积为 -1 ,

则两个零点一正一负,设其正零点为 $x_0 \in (0, +\infty)$,

则 $x_0^2 - mx_0 - 1 = 0$,即 $m = x_0 - \frac{1}{x_0}$, $\dots\dots\dots 7 \text{分}$

且在 $(0, x_0)$ 上 $g'(x) < 0, g(x)$ 单调递减,在 $(x_0, +\infty)$ 上 $g'(x) > 0, g(x)$ 单调递增,

故 $g(x_0) \geq 0$, 即 $x_0 + \frac{1}{x_0} - \left(x_0 - \frac{1}{x_0}\right) \ln x_0 - \frac{2}{e} \geq 0$ 8分

令 $h(x) = x + \frac{1}{x} - \left(x - \frac{1}{x}\right) \ln x - \frac{2}{e}$,

则 $h'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} - \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \ln x - \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = -\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \ln x$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) > 0$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$,

则 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

又 $h\left(\frac{1}{e}\right) = h(e) = 0$, 故 $x_0 \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$, 10分

显然函数 $m = x_0 - \frac{1}{x_0}$ 在 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 上是关于 x_0 的单调递增函数,

则 $m \in \left[\frac{1}{e} - e, e - \frac{1}{e}\right]$,

所以实数 m 的取值范围为 $\left[\frac{1}{e} - e, 0\right) \cup \left(0, e - \frac{1}{e}\right]$ 12分

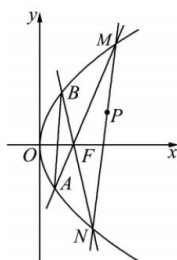
21.解:(1)由题设 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, 则 $|PF| = \sqrt{\left(2 - \frac{p}{2}\right)^2 + 1}$, $|QF| = \sqrt{\left(0 - \frac{p}{2}\right)^2 + 1}$,

又 $|PF| = |QF|$, 故 $\sqrt{\left(2 - \frac{p}{2}\right)^2 + 1} = \sqrt{\left(0 - \frac{p}{2}\right)^2 + 1}$, 整理得 $2p - 4 = 0$,

解得 $p = 2$.

所以抛物线 C 的标准方程为 $y^2 = 4x$ 4分

(2)若直线 l 不过点 F , 如图,



设 $M\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right), N\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right), A\left(\frac{y_3^2}{4}, y_3\right), B\left(\frac{y_4^2}{4}, y_4\right)$,

由题意可知直线 MN 的斜率存在且不为 0, 则直线 MN 的斜率 $k_{MN} = \frac{y_1 - y_2}{\frac{y_1^2}{4} - \frac{y_2^2}{4}} = \frac{4}{y_1 + y_2}$,

所以直线 MN 的方程为 $y - y_1 = \frac{4}{y_1 + y_2} \left(x - \frac{y_1^2}{4}\right)$, 即 $4x - (y_1 + y_2)y + y_1 y_2 = 0$, 5分

由直线 MN 过定点 $(2, 1)$, 可得 $y_1 + y_2 - y_1 y_2 = 8$,

同理直线 AM 的方程为 $4x - (y_1 + y_3)y + y_1 y_3 = 0$,

AM 过焦点 $F(1, 0)$, 可得 $y_1 y_3 = -4$, 6分

BN 的方程 $4x - (y_2 + y_4)y + y_2 y_4 = 0$, BN 过焦点 $F(1, 0)$, 可得 $y_2 y_4 = -4$ 7分

直线 AB 的方程为 $4x - (y_3 + y_4)y + y_3 y_4 = 0$, 8分

由 $y_1 y_3 = y_2 y_4 = -4$, 得 $4x + \left(\frac{4}{y_1} + \frac{4}{y_2}\right)y + \frac{16}{y_1 y_2} = 0$,

所以 $4y_1 y_2 x + 4(y_1 + y_2)y + 16 = 0$, 即 $y_1 y_2 x + (y_1 + y_2)y + 4 = 0$, 9分

又因为 $y_1 + y_2 - y_1 y_2 = 8$, 所以 $(x + y)y_1 y_2 + 8y + 4 = 0$ 10分

令 $\begin{cases} x + y = 0, \\ 8y + 4 = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = -\frac{1}{2}, \end{cases}$ 故直线 AB 恒过定点 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 11分

若直线 l 过点 F , 直线 AB 即为直线 MN , 其方程为 $y - 0 = \frac{1-0}{2-1}(x-1)$, 即 $y = x - 1$, 显然直线过点 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

综上, 直线 AB 过定点 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 12分

22. 解: (1) 将 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ 代入 $y = \sqrt{3}x (x \geq 0)$ 得 $\rho \sin \theta = \sqrt{3} \rho \cos \theta$, 所以 $\tan \theta = \sqrt{3}$, 所以射线 l 的极坐标方程为 $\theta = \frac{\pi}{3} (\rho \geq 0)$,

将 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ 代入 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 得 $\rho^2 \cos^2 \theta + \frac{\rho^2 \sin^2 \theta}{4} = 1$, 所以曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 = \frac{4}{1 + 3 \cos^2 \theta} (\rho > 0)$ 5分

(2) 由题意可设点 P 的极坐标为 $\left(\rho_1, \frac{\pi}{3}\right)$, 点 Q 的极坐标为 $\left(\rho_2, \frac{2\pi}{3}\right)$,

则 $\rho_1^2 = \frac{4}{1 + 3 \cos^2 \frac{\pi}{3}} = \frac{16}{7}, \rho_2^2 = \frac{4}{1 + 3 \cos^2 \frac{2\pi}{3}} = \frac{16}{7}$,

因为 $\rho_1 > 0, \rho_2 > 0$, 所以 $\rho_1 = \rho_2 = \frac{4\sqrt{7}}{7}$,

所以 $S_{\triangle POQ} = \frac{1}{2} \rho_1 \rho_2 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{7}}{7} \times \frac{4\sqrt{7}}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ 10分

23. (1) 解: 当 $a = 4$ 时, 函数 $f(x) = |2x - 2| + |2x + 4|$, 1分

① 当 $x < -2$ 时, 由 $f(x) = -2 - 4x \geq 26$ 得 $x \leq -7$; 2分

② 当 $-2 \leq x \leq 1$ 时, 由 $f(x) = 6 \geq 26$ 无解; 3分

③ 当 $x > 1$ 时, 由 $f(x) = 4x + 2 \geq 26$ 得 $x \geq 6$ 4分

综上, 不等式 $f(x) \geq 26$ 的解集为 $(-\infty, -7] \cup [6, +\infty)$ 5分

(2) 证明: 因为 $f(x) = |2x - 2| + |2x + a| \geq |2x - 2 - (2x + a)| = a + 2$,

当 $-\frac{a}{2} \leq x \leq 1$ 时, $f(x)$ 取到最小值 $a + 2$, 6分

所以 $a + 2 + b = 6$, 即 $a + 4 + b = 8$.

所以 $\frac{1}{a+4} + \frac{1}{4b} = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{a+4} + \frac{1}{4b} \right) (a+4+b) = \frac{1}{8} \left(\frac{5}{4} + \frac{b}{a+4} + \frac{a+4}{4b} \right) \geq \frac{1}{8} \left(\frac{5}{4} + 2\sqrt{\frac{b}{a+4} \times \frac{a+4}{4b}} \right) = \frac{9}{32}$, ... 8分

当且仅当 $a+4=2b$ 时, 即 $a = \frac{4}{3}, b = \frac{8}{3}$ 等号成立, 即 $\frac{1}{a+4} + \frac{1}{b} \geq \frac{9}{32}$ 成立. 10分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线

