

贵阳市 2023 年高三适应性考试（一）

理科数学参考答案与评分建议

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
选项	C	C	D	B	A	D	C	C	B	B	A	D

13. $y = 3x - 1$; 14. $\frac{25}{4}$; 15. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$; 16. $\frac{\sqrt{35}}{2}$.

17. (1) 证明: $\because \{a_n\}$ 是等比数列, 且 $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_1q + a_1q^2 = \frac{7}{4}$ ①

又 $a_1, 2a_2, 4a_3$ 成等差数列, $\therefore 4a_2 = a_1 + 4a_3, \therefore 4a_1q = a_1 + 4a_1q^2$ ②

联立①②得 $a_1 = 1, q = \frac{1}{2}$ 3 分

$$\therefore S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 2 - (\frac{1}{2})^{n-1}$$

$$\therefore S_{n+1} = 2 - (\frac{1}{2})^n$$

$$\therefore \frac{S_{n+1}-2}{S_n-2} = \frac{2-(\frac{1}{2})^n-2}{2-(\frac{1}{2})^{n-1}-2} = \frac{1}{2} \quad (n \geq 1)$$

$\therefore$ 数列 $\{S_n - 2\}$ 是公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列.6 分

(2) 由 (1) 知 $a_n = (\frac{1}{2})^{n-1}$, 所以 $b_n = n(\frac{1}{2})^{n-1}$.

$$\therefore T_n = 1 \cdot (\frac{1}{2})^0 + 2 \cdot (\frac{1}{2})^1 + 3 \cdot (\frac{1}{2})^2 + \cdots + n \cdot (\frac{1}{2})^{n-1} \quad \text{①} \cdots \cdots 7 \text{ 分}$$

$$\frac{1}{2} T_n = 1 \cdot (\frac{1}{2})^1 + 2 \cdot (\frac{1}{2})^2 + \cdots + (n-1) \cdot (\frac{1}{2})^{n-1} + n \cdot (\frac{1}{2})^n \quad \text{②} \cdots \cdots 8 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \text{①} - \text{②} \quad \text{得} \quad \frac{1}{2} T_n &= (\frac{1}{2})^0 + (\frac{1}{2})^1 + \cdots + (\frac{1}{2})^{n-1} - n \cdot (\frac{1}{2})^n \\ &= \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} - n \cdot (\frac{1}{2})^n = 2 - 2 \cdot (\frac{1}{2})^n - n \cdot (\frac{1}{2})^n \cdots \cdots 11 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$T_n = 4 - (n+2) \cdot (\frac{1}{2})^{n-1} \cdots \cdots 12 \text{ 分}$$

18.解: (1) 2×2 列联表如下:

	长时间使用手机娱乐	非长时间使用手机娱乐	合计
学习成绩下降	54	42	96
学习成绩未下降	36	68	104
合计	90	110	200

.....3 分

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{200 \times (54 \times 68 - 42 \times 36)^2}{90 \times 110 \times 96 \times 104} \approx 9.44 > 7.879$$

$\therefore$ 有 99.5% 把握认为“学习成绩下降”与“长时间使用手机娱乐”有关.....6 分

(2) 在抽取的 6 人中, 女生有 $6 \times \frac{12}{36} = 2$ 人, 男生有 $6 \times \frac{24}{36} = 4$ 人,

则这 6 人中随机抽取 3 人进一步访谈, 女生被抽到得的人数 X 可取 0, 1, 2

$$P(X=0) = \frac{C_2^0 C_4^3}{C_6^3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}, P(X=1) = \frac{C_2^1 C_4^2}{C_6^3} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5},$$

$$P(X=2) = \frac{C_2^2 C_4^1}{C_6^3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{5} = 1 \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19.解: (1) 在图①中, $\triangle ABE$ 和 $\triangle BCE$ 都是等腰直角三角形, $ABCE$ 为正方形.

在图②中, 由 $CB = CE$, $AB = AE$ 且 F 是 BE 的中点, 则

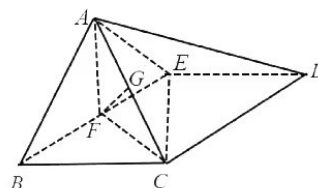
$$AF \perp BE, CF \perp BE, \text{ 且 } AF \cap CF = F$$

所以 $BE \perp$ 平面 ACF , 从而

$$BE \perp FG. \text{ 又因为 } BE \parallel CD, \text{ 所以 } CD \perp FG.$$

因为 $AF = CF$, 且 G 是 AC 的中点, 所以 $FG \perp AC$.

又因为 $AC \cap CD = C$, 所以 $FG \perp$ 平面 ACD6 分



(2) 在图②中, 因为 $AB = \sqrt{2}$, 所以 $FA = FB = FC = FE = 1$, 又因为 $AC = \sqrt{2}$, 所以

$AF^2 + CF^2 = AC^2$, 所以 $AF \perp CF$, 又由 (1) 知

$AF \perp BE$, 所以 $AF \perp$ 面 $BCDE$. 又 $CF \perp BE$,

如图, 以 FB, FC, FA 分别为 x, y, z 轴的正半轴建立空间直角坐标系.

则 $F(0,0,0), A(0,0,1), B(1,0,0), C(0,1,0)$,

$D(-2,1,0), G(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

设 $m = (x, y, z)$ 为平面 BAC 的法向量, 因为 $\overrightarrow{AC} = (0, 1, -1), \overrightarrow{AB} = (1, 0, -1)$,

所以 $\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{AC} = y - z = 0 \\ m \cdot \overrightarrow{AB} = x - z = 0 \end{cases}$, 取 $m = (1, 1, 1)$.

由 (1) 知, $FG \perp$ 平面 ACD ,

所以 $n = 2\overrightarrow{FG} = (0, 1, 1)$ 为平面 ACD 的法向量. 因为 $\cos \langle m, n \rangle = \frac{m \cdot n}{|m| |n|}$

$= \frac{1 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 又由图知, 二面角 $B-AC-D$ 为钝角, 所以二面角

$B-AC-D$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ 12 分

20. 解: (1) 根据椭圆的对称性可知, 点 $(1, \frac{\sqrt{2}}{2}), (-1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ 在椭圆上,

$$\text{则} \begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2b^2} = 1 \\ \frac{2b^2}{a} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 6 分

(2) 设存在定点 $S(t, 0)$, 设过右焦点 $(1, 0)$ 的直线 l 的方程为 $x = my + 1$, 且与曲线 C 的交点分别为 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

$$\text{联立} \begin{cases} x = my + 1 \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (m^2 + 2)y^2 + 2my - 1 = 0,$$

则由韦达定理有: $y_1 + y_2 = -\frac{2m}{m^2 + 2}$, $y_1 \cdot y_2 = \frac{-1}{m^2 + 2}$,

由 C 的标准方程得 $A(\sqrt{2}, 0)$,

设直线 l_{AM} : $y = \frac{y_1}{x_1 - \sqrt{2}}(x - \sqrt{2})$, 当 $x = 0$ 时, $P(0, \frac{-\sqrt{2}y_1}{x_1 - 2})$,

同理, 设直线 l_{AN} : $y = \frac{y_2}{x_2 - \sqrt{2}}(x - \sqrt{2})$, 当 $x = 0$ 时, $Q(0, \frac{-\sqrt{2}y_2}{x_2 - \sqrt{2}})$,

$$\therefore \overrightarrow{PS} = (t, \frac{\sqrt{2}y_1}{x_1 - \sqrt{2}}), \quad \overrightarrow{QS} = (t, \frac{\sqrt{2}y_2}{x_2 - \sqrt{2}})$$

$$\therefore \overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{PQ} = t^2 + \frac{2y_1y_2}{(x_1 - \sqrt{2})(x_2 - \sqrt{2})} = t^2 + \frac{2y_1y_2}{(my_1 + 1 - \sqrt{2})(my_2 + 1 - \sqrt{2})}$$

$$= t^2 + \frac{2 \cdot (\frac{-1}{m^2 + 2})}{m^2 \cdot (\frac{-1}{m^2 + 2}) + (1 - \sqrt{2})m \cdot (\frac{-2m}{m^2 + 2}) + (1 - \sqrt{2})^2}$$

$$= t^2 + \frac{-2}{6 - 4\sqrt{2}} = t^2 - (3 + 2\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow t = \pm(1 + \sqrt{2})$$

故在 x 轴上存在定点 $S(\sqrt{2} + 1, 0)$ 或 $S(-\sqrt{2} - 1, 0)$, 使得 $\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{QS} = 0$ 12 分

21. 解: (1) 当 $a = -1$ 时, $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1 - \ln(x - 1)$, $x > 1$.

则 $f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{x - 1}$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -1$ 或 $x = 2$. 又因为 $x > 1$, 所以 $x = 2$.

列表如下:

x	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递减	有极小值	单调递增

因为函数 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 上单调递减, 在区间 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 有极小值 $f(2) = 2$, 无极大值.7 分

(2) $g(x) = a \ln(x - 1) + \frac{1}{e^x} + x$ ($x > 1$)

若对任意 $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ 且 $x_1 \neq x_2$, $\frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 1$ 恒成立

不妨令 $x_1 < x_2$, 则 $\frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 1 \Leftrightarrow g(x_2) - g(x_1) \geq x_2 - x_1$

$\Leftrightarrow g(x_2) - x_2 \geq g(x_1) - x_1$, 令 $G(x) = g(x) - x$

只需证明 $G(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增

$$G(x) = g(x) - x = a \ln(x-1) + \frac{1}{e^x}$$

$$G'(x) = \frac{a}{x-1} - \frac{1}{e^x},$$

所以 $\frac{a}{x-1} - \frac{1}{e^x} \geq 0$ 在 $x > 1$ 时恒成立

$$\text{即 } a \geq \frac{x-1}{e^x} (x > 1)$$

$$\text{令 } h(x) = \frac{x-1}{e^x} (x > 1), \text{ 则 } h'(x) = \frac{2-x}{e^x}.$$

因为 $x > 1$, 所以令 $h'(x) > 0$, 解得 $1 < x < 2$; 令 $h'(x) < 0$, 解得 $x > 2$.

从而 $h(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 上单调递增, 在区间 $(2, +\infty)$ 上单调递减, 所以当 $x = 2$ 时 $h(x)$ 取

到最大值 $h(2) = \frac{1}{e^2}$, 故实数 a 的取值范围是 $[\frac{1}{e^2}, +\infty)$12 分

22.解: (1) 由题知半圆弧 C_1 的极坐标方程为: $\rho = 2 \sin \theta, (\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi])$, 化为直角坐标方

程为: $x^2 + (y-1)^2 = 1$, 其圆心为 $O_1(0,1)$, 半径为 $r=1$, 由题易得 $A(2,0)$, 所以

$$|MA|_{\max} = |O_1A| + 1 = \sqrt{5} + 1 \text{5 分}$$

(2) 由题知 $|ON| = 2, |OM| = 2 \sin \theta, (\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi])$

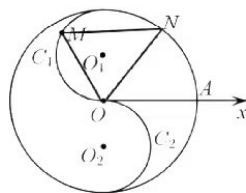
$\angle MON = \theta - \frac{\pi}{4}$, 所以 $\triangle MON$ 的面积为

$$S_{\triangle MON} = \frac{1}{2} \times |ON| \times |OM| \times \sin \angle MON$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \sin \theta \times \sin(\theta - \frac{\pi}{4})$$

$$= 2 \sin \theta \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \theta - \cos \theta) = \sqrt{2} (\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta) = \sqrt{2} (\frac{1 - \cos 2\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin 2\theta)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} [1 - \sqrt{2} \sin(2\theta + \frac{\pi}{4})], \text{ 因为 } \theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi), \text{ 所以 } 2\theta + \frac{\pi}{4} \in [\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}),$$



$\sin(2\theta + \frac{\pi}{4}) \in [-1, \frac{\sqrt{2}}{2}]$, 所以 $S_{\triangle MON} \in (0, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}]$ 10 分

23. (1) 解: 由 $a^2 + 4b^2 = 4$ 有 $\frac{a^2}{4} + b^2 = 1$,

所以令 $a = 2\cos\theta$, $b = \sin\theta$,

所以 $a + b = 2\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{5}\sin(\theta + \varphi)$, 其中 $\tan\varphi = 2$,

因为 $-1 \leq \sin(\theta + \varphi) \leq 1$, 所以 $a + b \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$ 5 分

(2) 证明: 因为 $a > 0$, $b > 0$, $a^2 + 4b^2 = 4$ 且 $a^2 + 4b^2 \geq 4ab$,

所以 $ab \leq 1$, 从而 $\sqrt{ab} \leq 1$.

所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{2b} \geq \frac{2}{\sqrt{2ab}} \geq \sqrt{2}$, 即 $\frac{1}{a} + \frac{1}{2b} \geq \sqrt{2}$ 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线