邯郸市2023届高三年级保温试题
数学参考答案及评分标准

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	B	C	B	C	D	A

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

题号	9	10	11	12
答案	ABD	BD	ACD	BCD

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13． 1　　14． $\frac{4}{5}$　　15． 2024　　16． $(1,+\infty)$

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．【答案】（1）$\sqrt{6}+\sqrt{2}$（2）3

【解析】（1）因为 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2-c^2)=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2ab\cos C=\frac{1}{2}ab\sin C$，所以 $\tan C=\sqrt{3}$． …………2分

又 $C\in(0,\pi)$ 故 $C=\frac{\pi}{3}$．由正弦定理得，$\frac{a}{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}$，故有 $a=\sqrt{6}+\sqrt{2}$． …………4分

（2）选择条件①：

在△ABC 中，由余弦定理得 $a^2+b^2-12=ab$，

即 $(a+b)^2=12+3ab\le 12+3(\frac{a+b}{2})^2$，故 $a+b\le 4\sqrt{3}$． …………6分

又因为 $S_{\triangle CDA}+S_{\triangle CDB}=S_{\triangle ABC}$

所以 $CD=\frac{\sqrt{3}ab}{a+b}=\frac{\sqrt{3}((a+b)^2-12)}{3(a+b)}$ …………8分

$=\frac{\sqrt{3}}{3}((a+b)-\frac{12}{a+b})\le\frac{\sqrt{3}}{3}(4\sqrt{3}-\frac{12}{4\sqrt{3}})=3$

当且仅当 $a=b=2\sqrt{3}$ 时，等号成立．

故 CD 的最大值为3． …………10分

选择条件②：

由题 $2\overline{CD}=\overline{CA}+\overline{CB}$，平方得 $4|CD|^2=a^2+b^2+ab$， …………6分

在△ABC 中，由余弦定理得 $a^2+b^2-12=ab$，

即 $(a+b)^2=12+3ab\le 12+3(\frac{a+b}{2})^2$，所以 $(a+b)^2\le 48$． …………8分

故有 $4|CD|^2=a^2+b^2+ab=(a+b)^2-ab=(a+b)^2-\frac{(a+b)^2-12}{3}=\frac{2}{3}(a+b)^2+4\le 36$

从而 $|CD|\le 3$，当且仅当 $a=b=2\sqrt{3}$ 时，等号成立．

故 CD 的最大值为3． …………10分

18．【答案】（1）$a_n=4^{n-1}$；（2）不存在

【解析】（1）由题意 $a_{n+1}=3S_n+1\,(n\in N^*)$，$a_n=3S_{n-1}+1\,(n\in N^*,n\geqslant 2)$

两式相减可得，$a_{n+1}-a_n=3a_n$，即 $a_{n+1}=4a_n,n\geqslant 2$ …………2分

由条件，$a_2=3a_1+1=4a_1$，故 $a_{n+1}=4a_n\,(n\in\mathbf{N}^*)$． …………4分

因此$\{a_n\}$是以 1 为首项，4 为公比的等比数列.

从而 $a_n=4^{n-1}$ $(n\in \mathbf{N}^*)$. ……………………………………………6 分

（2）由题意，$b_n=\dfrac{4^{n-1}}{n+1}$，如果满足条件的b_m,b_k,b_p存在，

则 $b_k^2=b_m b_p$，其中 $2k=m+p$，即 $\dfrac{\left(4^{k-1}\right)^2}{(k+1)^2}=\dfrac{4^{m-1}}{m+1}\cdot\dfrac{4^{p-1}}{p+1}$， ……………………………………9 分

又 $2k=m+p$，故 $(k+1)^2=(m+1)(p+1)$，可得 $k^2=mp$，结合 $2k=m+p$

可得 $k=m=p$，与已知矛盾，所以不存在满足条件的三项. ……………………………12 分

19．【答案】（1）2 （2）$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

【解析】（1）在$\triangle ABC$中，$AB=BC$，且 E 为 AC 中点，

所以 $AC\perp BE$，

又因为 $AC\perp SB$，$SB\cap BE=B$，所以 $AC\perp$平面 SBE . ……………………………2 分

所以 $V_{S-ABC}=2V_{A-SBE}=\dfrac{4}{3}$，

则 $2\times\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle SBE}\times AE=\dfrac{4}{3}$，因为$\triangle SEB$的面积为$\sqrt{2}$，

所以 $AE=\sqrt{2}$，又 $\angle ABC=90^\circ$，故 $AB=BC=2$. ……………………………4 分

则$\triangle ABC$的面积为2，设 S 到平面 ABC 的距离为 h，

所以 $\dfrac{1}{3}h\times S_{\triangle ABC}=\dfrac{4}{3}$，即 $h=2$. ……………………………6 分

（2）作 $SD\perp$平面ABC交平面 ABC 于点 D，因为 $\angle SAB=\angle SCB=90^\circ$，$AB=BC$，

所以$\triangle SAB\cong\triangle SBC$，所以 $SA=SC$.

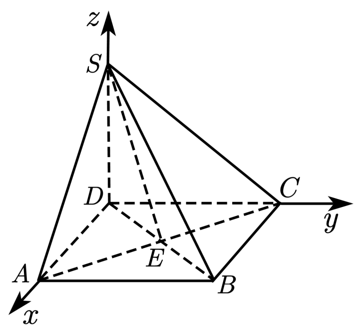
又 $SD=SD$，$\angle SDC=\angle SDA=90^\circ$，故$\triangle SDA\cong\triangle SDC$，故 $AD=DC$，则 D 在 BE 的延长线上.

因为 $SD\perp AB$，$SA\perp AB$，$SD\cap SA=S$，所以 $AB\perp$平面 SAD .

因为 $AD\subset$平面 SAD，所以 $AB\perp AD$，

所以四边形 $ABCD$ 为正方形. ……………………………7 分

以点 D 为坐标原点，DA、DC、DS 所在直线分别为 x 、y 、z 轴建立如下图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$，



则 $A(2,0,0)$、$B(2,2,0)$、$C(0,2,0)$、$S(0,0,2)$，

设平面 SAC 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

由$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{SC}=0\\\vec{m}\cdot\overrightarrow{SA}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}2y_1-2z_1=0\\2x_1-2z_1=0\end{cases}$

取 $z_1=1$，得 $x_1=y_1=1$，则 $\vec{m}=(1,1,1)$， ……………9 分

设平面 SBC 的法向量为 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{SC}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}2y_2-2z_2=0\\-2x_2=0\end{cases}$，取 $y_2=1$，则 $\vec{n}=(0,1,1)$，

$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$， ……………………………11 分

设二面角 $A-SC-B$ 的平面角为θ，则 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

所以平面 SAC 与平面 SBC 夹角的余弦值是 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ……………………………12 分

20．【答案】（1）$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$ （2）$\dfrac{1}{4}$.

【解析】（1）设曲线 C 的方程为 $mx^2+ny^2=1$，由曲线 C 过点 $A(2,0),B(4,3)$ 两点，得 $\begin{cases}4m=1\\16m+9n=1\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}m=\dfrac{1}{4}\\n=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$，所以曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$； ……………………………4 分

（2）由题意可知过点 P 的直线的方程为 $y=k(x-2)+1$，设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y=k(x-2)+1\\\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 消去 y，得 $(3-4k^2)x^2-8k(1-2k)x-16k^2+16k-16=0$

则 $\begin{cases}3-4k^2\neq 0\\\Delta=\left[-8k(1-2k)\right]^2-4(3-4k^2)(-16k^2+16k-16)=192(1-k)>0\end{cases}$，解得 $k<1$ 且 $k\neq\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ①

……………………………………………6 分

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$, 则有 $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{8k(1-2k)}{3-4k^2}\\x_1x_2=\dfrac{-16k^2+16k-16}{3-4k^2}\end{cases}$ ②

设直线 AM 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1-2}(x-2)$，令 $x=0$ 得 $y_G=\dfrac{-2y_1}{x_1-2}$，

所以直线 AM 与 y 轴交点 G 的坐标为 $(0,\dfrac{-2y_1}{x_1-2})$. ……………………………………7 分

同理可得直线 AN 的方程为 $y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，令 $x=0$ 得 $y_H=\dfrac{-2y_2}{x_2-2}$，

所以直线 AM 与 y 轴交点 H 的坐标为 $(0,\dfrac{-2y_2}{x_2-2})$. ……………………………………8 分

由题意可知 $|GH|=|y_G-y_H|=\left|\dfrac{-2y_1}{x_1-2}-\dfrac{-2y_2}{x_2-2}\right|=6$，

即 $\left|\dfrac{y_1}{x_1-2}-\dfrac{y_2}{x_2-2}\right|=3\Leftrightarrow\left|\dfrac{k(x_1-2)+1}{x_1-2}-\dfrac{k(x_2-2)+1}{x_2-2}\right|=3\Leftrightarrow\left|\dfrac{1}{x_1-2}-\dfrac{1}{x_2-2}\right|=3\Leftrightarrow\left|\dfrac{x_1-x_2}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}\right|=3$，

即 $\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=3\left|x_1x_2-2(x_1+x_2)+4\right|$

所以 $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=9(x_1x_2-2(x_1+x_2)+4)^2$ ③ ……………………………10 分

将②代入③得 $\left(\dfrac{8k(1-2k)}{3-4k^2}\right)^2-4\left(\dfrac{-16k^2+16k-16}{3-4k^2}\right)^2=9\left(\dfrac{-16k^2+16k-16}{3-4k^2}-2\cdot\dfrac{8k(1-2k)}{3-4k^2}+4\right)^2$

整理得 $192(1-k)=9\times(-4)^2$， ……………………………11 分

所以 $4(1-k)=3\therefore k=\dfrac{1}{4}$ 满足①式，综上，$k=\dfrac{1}{4}$. ……………………………12 分

21. 【答案】（1）$\left[0,+\infty\right)$（2）略

【解析】（1）由题意，$f'(x)=x+m-1-\ln x$，

因为 $f(x)$ 在 $\left[1,+\infty\right)$ 单调递增，所以 $f'(x)\geq 0$ 在 $\left[1,+\infty\right)$ 恒成立.

即 $m\geqslant\ln x-x+1$ 在 $\left[1,+\infty\right)$ 恒成立， ………………………2 分

令 $g(x)=\ln x-x+1$，

则 $g'(x)=\dfrac{1-x}{x}$，$g'(x)$ 在 $\left[1,+\infty\right)$ 上恒小于等于 0，

故 $g(x)$ 在 $\left[1,+\infty\right)$ 单调递减，$g(x)_{\max}=g(1)=0$

故 $m\geqslant 0$. ………………………4 分

（2） $f'(x)=x+m-1-\ln x$ 有两个零点，即 $m=\ln x-x+1$ 有两个根.

由（1）知， $g(x)=\ln x-x+1$ 在 $(0,1]$ 上单调递增，在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，且 $g(x)_{\max}=g(1)=0$.

所以 $m<0$，且 $0<x_1<1<x_2$. ……………………………6 分

要证 $x_1x_2<1$，只需证 $x_2<\frac{1}{x_1}$，又 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递减，只需证 $g(x_2)>g\left(\frac{1}{x_1}\right)$.

又 $g(x_1)=g(x_2)$， 只需证 $g(x_1)>g\left(\frac{1}{x_1}\right)$.

只需证 $\ln x_1-x_1+1>\ln\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_1}+1$；

只需证 $2\ln x_1-x_1+\frac{1}{x_1}>0$， ……………………………8 分

记 $m(x)=\frac{1}{x}-x+2\ln x$，则 $m'(x)=-\frac{1}{x^2}-1+\frac{2}{x}=-\frac{(x-1)^2}{x^2}<0$， ……………………………10 分

故 $m(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，

从而当 $x\in(0,1)$ 时， $m(x)>m(1)=1-1=0$，

所以 $m(x_1)>0$，因此 $x_1x_2<1$. ……………………………12 分

22. 【答案】（1） $(\frac{1}{2},1)$ （2） $\frac{p-p^{n+1}}{1-p}$；9

【解析】（1）根据题意， X 可取 1，2，3

$P(X=1)=1-p$， $P(X=2)=p(1-p)$， $P(X=3)=p^2$ ……………………………2 分

所以 $E(X)=1-p+2p(1-p)+3p^2=p^2+p+1$ ……………………………3 分

由 $E(X)=p^2+p+1>1.75$ 得 $p>\frac{1}{2}$，又 $0<p<1$

所以 p 的取值范围是 $(\frac{1}{2},1)$ ……………………………4 分

（2）（i） $P(Y=k)=p^k(1-p)$，其中 $k=0,1,2,\cdots,n-1$, $P(Y=n)=p^n$

所以 Y 的数学期望为 $E(Y)=p(1-p)+2p^2(1-p)+\cdots+(n-1)p^{n-1}(1-p)+np^n$

$=(1-p)(p+2p^2+3p^3+\cdots+(n-1)p^{n-1})+np^n$ ……………………………6 分

设 $S_n=p+2p^2+3p^3+\cdots+(n-1)p^{n-1}$ 利用错位相减可得

$$(1-p)S_n=p+p^2+p^3+\cdots+p^{n-1}-(n-1)p^n$$

所以 $E(Y)=p+p^2+p^3+\cdots+p^{n-1}-(n-1)p^n+np^n=p+p^2+p^3+\cdots+p^{n-1}+p^n=\frac{p-p^{n+1}}{1-p}$

……………………………9 分

另解： $E(Y)=(p-p^2)+(2p^2-2p^3)+(3p^3-3p^4)+\cdots+((n-1)p^{n-1}-(n-1)p^n)+np^n$

$=p+p^2+p^3+\cdots+p^{n-1}+p^n=\frac{p-p^{n+1}}{1-p}$ ……………………………9 分

(ii)依题意， $\frac{\frac{5}{6}-\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}}{1-\frac{5}{6}}>4$，即 $\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}<\frac{1}{6}$，即 $n+1>\log_{\frac{5}{6}}\frac{1}{6}=\frac{\lg 6}{\lg 6-\lg 5}=\frac{\lg 2+\lg 3}{2\lg 2+\lg 3-1}\approx 9.848$

故 n 的最小值为 9. ……………………………12 分