省级联测　2021—2022 第一次考试

高三数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	C	D	C	D	A	C	B	ACD	AD	BCD	AC

1. B　**解析**:∵集合 $B=\{x\mid y=\sqrt{1-x}\}=\{x\mid x\leqslant 1\}$,∴集合 $A\cap B=[-2,1]$. 故选 B.

[命题意图]集合是高考必考内容,该题考查了集合的交集运算,是基础题.

2. C　**解析**:由命题的否定易知选 C.

[命题意图]简易逻辑是高考常考内容,该题考查了命题的否定,是基础题.

3. D　**解析**:由 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$,而 $\overrightarrow{OA}=(4,-2)$,$\overrightarrow{OC}=(-2,4)$,∴$\overrightarrow{OB}=(2,2)$,故 B 对应的复数为 $2+2\mathrm{i}$. 故选 D.

[命题意图]复数是高考必考内容,该题考查了复数的几何意义,向新高考靠近,该题从数学素养上体现对学生的综合素质的考查.

4. C　**解析**:$f'(x)=2\cos\pi x-f'(1)$,则 $f'(1)=-2-f'(1)\Rightarrow f'(1)=-1$,则 $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\sin\pi x+x+2$,$f(2)=2+2=4$. 故选 C.

[命题意图]常考知识点,考查导数的应用,体现高考方向,体现运算求解能力,逻辑推理、数学运算的核心素养.

5. D　**解析**:$\sin\left(\alpha+\dfrac{5}{14}\pi\right)=\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{7}+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{7}\right)=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$. 故选 D.

[命题意图]高考常考知识点,考查诱导公式的应用,体现高考方向,体现运算求解能力,逻辑推理、数学运算的核心素养.

6. A　**解析**:用 6 根算筹组成满足题意的三位数有 123,127,163,167 这四种情况的全排列,其中 123 的排列能被 3 整除,所以概率为 $\dfrac{A_3^3}{4A_3^3}=\dfrac{1}{4}$,故选 A.

[命题意图]常考知识点,考查古文化在概率中的应用,体现高考方向,体现运算求解能力,逻辑推理、数学运算的核心素养.

7. C　**解析**:原式变形为 $\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{2}{2(x+y)}=1$,则 $2x+y=\dfrac{1}{2}\times[(2x+1)+2(x+y)]-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\times[(2x+1)+2(x+y)]\cdot\left(\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{1}{x+y}\right)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\times\left[3+\dfrac{2(x+y)}{2x+1}+\dfrac{2x+1}{x+y}\right]-\dfrac{1}{2}\geqslant\dfrac{1}{2}\times(3+2\sqrt{2})-\dfrac{1}{2}=1+\sqrt{2}$. 故选 C.

[命题意图]常考知识点,考查不等式的应用,体现运算求解能力,逻辑推理、数学运算的核心素养.

8. B　**解析**:∵焦点 $F(1,0)$,设直线 l 的方程为 $x=\lambda y+1(\lambda>0)$,代入抛物线方程,得 $y^2-4\lambda y-4=0$. 设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由韦达定理得 $y_1y_2=-4$. 由 $\overrightarrow{AF}=t\overrightarrow{FB}$,得 $y_1=-ty_2$. 解得 $y_2=\dfrac{2}{\sqrt{t}}$,$y_1=-2\sqrt{t}$,或 $y_2=-\dfrac{2}{\sqrt{t}}$,$y_1=2\sqrt{t}$,∴$x_1=t$,$x_2=\dfrac{1}{t}$. ∴$|AB|=x_1+x_2+p=\dfrac{1}{t}+t+2=\dfrac{16}{3}$,化简得 $3t^2-10t+3=0$,

∴ $t=3$ 或 $t=\frac{1}{3}$（舍）. 故选 B.

[命题意图]该题涉及了直线、向量、抛物线的相关知识，是一个综合性很强的试题，涉及了数形结合、化归等数学思想，也是高考必考知识点.

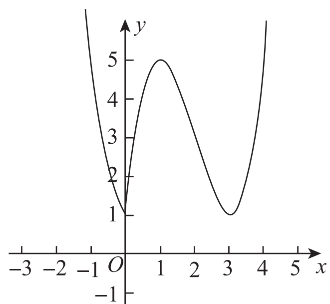
9. ACD　**解析**：A，$y=\tan\frac{x}{2}$，则 $T=\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$，A 正确；B，函数 $y=\sin\frac{x}{2}$ 的最小正周期为 4π，因此 B 不正确；C，函数 $y=|\sin 2x|$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$，所以 2π 也是它的一个周期，故 C 正确；D，$y=\cos|x|=\cos x$，最小正周期为 2π，故 D 正确. 故选 ACD.

[命题意图]高考常考知识点，考查三角函数的周期，体现高考方向，体现逻辑推理的核心素养.

10. AD　**解析**：圆 C_1 的圆心 $C_1(0,a)$，半径 $r_1=1$；由圆 C_2 方程知：圆心 $C_2(0,0)$，半径 $r_2=3$，∵ 两圆有四条公切线，∴ 两圆外离，又两圆圆心距 $d=|a|$，∴ $|a|>3+1$，解得：$a<-4$ 或 $a>4$. 故选 AD.

[命题意图]常考知识点，考查两圆的位置关系，体现高考方向，体现运算求解、数据处理能力及应用意识和创新意识，逻辑推理、数学建模、数学运算的核心素养. 是亮点题.

11. BCD　**解析**：当 $x>0$ 时，$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$，易知函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$，$(3,+\infty)$ 上单调递增，在 $(1,3)$ 上单调递减，$f(1)=5$，$f(3)=1$. 故 A 错误，B 正确；对于 C. 由 $f(-1)=5$，结合图象易知 C 正确；对于 D. 由 $[f(x)]^2-(a+1)f(x)+a=0$，可得 $(f(x)-1)(f(x)-a)=0$，即 $f(x)=1$ 或 $f(x)=a$. 由图象可知 $y=f(x)$ 与 $y=1$ 有 2 个公共点，当 $1<a<5$ 时，$y=f(x)$ 与 $y=a$ 有 4 个公共点，故 D 正确. 故选 BCD.



[命题意图]函数与导数是高考必考内容，该题考查了函数单调性、极值、零点等问题，体现高考方向，体现抽象概括、推理论证、运算求解能力及应用意识，考查学生数学抽象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

12. AC　**解析**：由题意知：$a_8=S_8-S_7<0$，$a_9=S_9-S_8>0$，$S_9-S_7=a_8+a_9<0$，A 中 $S_{16}=\frac{16(a_8+a_9)}{2}<0$，$S_{17}=17a_9>0$，所以最小的 n 值为 17. 故 A 正确；则 B 中 $|a_8|-|a_9|=-a_8-a_9>0$，即 $|a_8|>|a_9|$，故 B 错误；由上可知 $d>0$，则 $a_9a_{10}-a_7a_8=(a_8+d)(a_8+2d)-a_8(a_8-d)=2d^2+4da_8=2d(d+2a_8)=2d(a_8+a_9)<0$. 所以 $a_7\cdot a_8>a_9\cdot a_{10}$，故 C 正确；D 中当 $n\leqslant 8$ 时，$a_n<0$，当 $n\geqslant 9$ 时，$a_n>0$，所以当 $n\leqslant 6$ 时，$b_n<0$，$b_7=a_7a_8a_9>0$，$b_8=a_8a_9a_{10}<0$，当 $n\geqslant 9$ 时，$b_n>0$，所以 $T_7>T_6$，$T_7>T_8$，当 $n\geqslant 8$ 时，$T_{n+1}>T_n$，$T_8-T_6=b_7+b_8=a_7a_8a_9+a_8a_9a_{10}=a_8a_9(a_7+a_{10})=a_8a_9(a_8+a_9)>0$，所以 $T_8>T_6$，所以 D 不正确. 故选 AC.

[命题意图]高考常考知识点，考查数列综合的相关知识，体现高考方向，体现逻辑推理的核心素养.

13. $2x\pm\sqrt{5}y=0$　**解析**：由题可知双曲线的渐近线方程为 $2x\pm\sqrt{5}y=0$.

[命题意图]双曲线是高考常考内容，该题考查了双曲线的知识，考查了学生的数学运算素养.

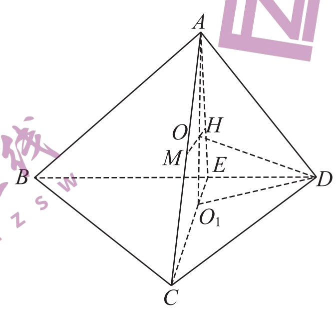
14. 3 或 −2　**解析**：由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2$ 得 $2+m+5=1+m^2$，即 $m^2-m-6=0$，解得 $m=3$ 或 -2.

[命题意图]向量是高考常考内容，该题考查了向量数量积、模长的知识，考查了学生的数学运算素养.

15. 9，4　**解析**：由题意可得：$2^n=512$，∴ $n=9$，结合通项公式可得：$T_{r+1}=C_9^r(\sqrt[3]{x})^{9-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r=(-2)^rC_9^rx^{3-\frac{4r}{3}}$，$r=0,1,2,\cdots,9$，若 $3-\frac{4r}{3}$ 为整数，则 $r=0,3,6,9$，所以有理项有 4 项.

[命题意图]二项式定理是高考常考内容,该题考查了二项展开式的通项,向新高考靠近,该题从数学素养上体现对学生的综合素质的考查,考查学生的数学运算和逻辑推理素养.

16. $\frac{5}{4}$ **解析**:由题知$\triangle ABD$和$\triangle BCD$为等边三角形,取BD中点为E,连接AE,CE,则$AE\perp BD$,由平面$ABD\perp$平面CBD,平面$ABD\cap$平面$CBD=BD$,故$AE\perp$平面CBD,$AE=3\sqrt{3}$,易知球心O在平面BCD的投影为$\triangle BCD$外心O_1,在AE上,作$OH\perp AE$于E,易得$OH/\!/O_1E$,$OO_1/\!/HE$,则在$\mathrm{Rt}\triangle OHA$中,$OH=\sqrt{3}$,$AH=2\sqrt{3}$,所以外接球半径$r=\sqrt{OH^2+AH^2}=\sqrt{15}$,连接$OM$,因为$AH=2HE$,$OH/\!/CE$,$AM=2MC$,所以$H,O,M$三点共线,$OM=MH-OH=\sqrt{3}$,当截面过球心时截面面积最大为$15\pi$,当$M$为截面圆圆心时截面面积最小,此时截面圆半径为$2\sqrt{3}$,面积为$12\pi$,所以截面面积最大值与最小值之比为$\frac{5}{4}$.



[命题意图]立体几何是高考必考内容,该题考查了棱锥的外接球,考查了学生的直观想象、数学建模、数学运算素养,是亮点题.

17. **解**:(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为q.

因为$a_1=1$,所以$a_2=a_1q=q$,$a_3=a_1q^2=q^2$.

因为$2a_2$是a_3和$4a_1$的等差中项,所以$4a_2=a_3+4a_1$,即$4q=q^2+4$,解得$q=2$.

所以$a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$. …………(5分)

(2)因为$b_{n+2}+b_n=2b_{n+1}$,所以$\{b_n\}$为等差数列.

因为$b_1=1$,$b_7=13$,所以公差$d=\frac{13-1}{7-1}=2$.故$b_n=2n-1$.

$$\begin{aligned}\text{所以 } T_n&=a_1+b_1+a_2+b_2+\cdots+a_n+b_n\\&=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)\\&=\frac{1-2^n}{1-2}+\frac{(1+2n-1)n}{2}=2^n+n^2-1.\end{aligned}$$ …………(10分)

[命题意图]数列是高考必考内容,该题考查了数列求通项、求和的知识,符合新高考考查方向,考查了学生的逻辑推理、数学建模素养.

18. **解**:(1)由题意知$BC\perp BE$,$EF/\!/BC$,所以$EF\perp BE$,

$\because AB\perp$平面$BCFE$,

$\therefore AB\perp EF$,

又知$AB\cap BE=B$,$AB,BE\subset$平面ABE,所以$EF\perp$平面ABE,

又因为$EF\subset$平面AEF,所以平面$AEF\perp$平面ABE. …………(5分)

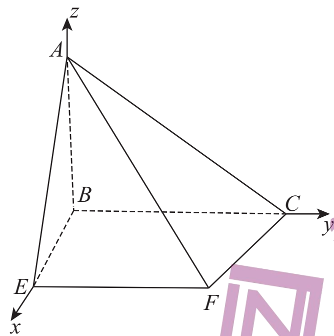
(2)由题可知$AB=2\sqrt{2}$,

由(1)知BA,BC,BE两两互相垂直,分别以BE,BC,BA所在直线为x轴,y轴,z轴建立空间直角坐标系,

则$B(0,0,0)$,$C(0,1,0)$,$A(0,0,2\sqrt{2})$,$E(1,0,0)$,$F\left(1,\frac{3}{4},0\right)$,

则$\overrightarrow{AF}=\left(1,\frac{3}{4},-2\sqrt{2}\right)$,$\overrightarrow{CF}=\left(1,-\frac{1}{4},0\right)$,$\overrightarrow{AE}=(1,0,-2\sqrt{2})$.

设平面 ACF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AF}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+\frac{3}{4}y-2\sqrt{2}z=0,\\ x-\frac{1}{4}y=0,\end{cases}$



令 $x=1$，则 $\boldsymbol{m}=(1,4,\sqrt{2})$，

所以 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{AE}\rangle|=\left|\frac{1-4}{3\sqrt{19}}\right|=\frac{\sqrt{19}}{19}$，

所以直线 AE 与平面 AFC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{19}}{19}$. ……………………………………（12 分）

[**命题意图**]立体几何中的线面关系和空间向量是高考必考内容，它一般是以锥体与柱体为载体，涉及建系，找坐标，空间向量的内积与夹角，线面关系的平行与垂直等多方面内容，它考查了学生的立体感，数形结合，逻辑推理，数学运算等数学思想.

19. **解**：(1)因为 $\sqrt{3}\cos A(c\cos B+b\cos C)+a\sin A=0$，由正弦定理得：

$\sqrt{3}\cos A(\sin C\cos B+\sin B\cos C)+\sin A\sin A=0$，

即 $\sqrt{3}\cos A\sin(B+C)+\sin^2 A=0$，

在 $\triangle ABC$ 中，$\sin(B+C)=\sin A\neq 0$，

所以 $\sqrt{3}\cos A+\sin A=0$，

即 $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=-\sqrt{3}$，

因为 A 为 $\triangle ABC$ 内角，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$. ……………………………………（5 分）

(2)由余弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即 $28=4+c^2-2\times 2c\times\left(-\frac{1}{2}\right)$，

即 $c^2+2c-24=0$，解得 $c=-6$（舍去）或 $c=4$，

故 $c=4$.

$\because c^2=b^2+a^2-2ab\cos C$，$\therefore 16=28+4-2\times 2\sqrt{7}\times 2\times\cos C$，

$\therefore \cos C=\frac{2}{\sqrt{7}}$，$\therefore CD=\frac{AC}{\cos C}=\frac{2}{\frac{2}{\sqrt{7}}}=\sqrt{7}$，

$\therefore CD=\frac{1}{2}BC$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC=\frac{1}{2}\times 4\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，

$\therefore S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$. ……………………………………（12 分）

[**命题意图**]解三角形是高考必考内容，该题考查了正余弦定理、面积公式的知识，考查了学生的数学运算、数学建模素养.

20. **解**：(1)补充 2×2 列联表如下表：

	男性	女性	总计
以月薪作为主要考虑因素	10	16	26
以发展前景作为主要考虑因素	10	4	14
总计	20	20	40

$\therefore K^2=\dfrac{40(10\times4-16\times10)^2}{26\times14\times20\times20}\approx3.956>3.841$，

∴有 95%的把握认为"应聘者关于工作的首要考虑因素与性别有关". …………………………… (5 分)

(2)ξ 的所有可能的取值为$-20,-5,10,25,40$.

$P(\xi=-20)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{144}$，

$P(\xi=-5)=2\times\left(\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{5}{72}$，

$P(\xi=10)=4\times\left(\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}\right)+\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{37}{144}$，

$P(\xi=25)=2\times\left(\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{5}{12}$，

$P(\xi=40)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{36}{144}=\dfrac{1}{4}$.

∴ξ 的分布列为

ξ	-20	-5	10	25	40
P	$\dfrac{1}{144}$	$\dfrac{5}{72}$	$\dfrac{37}{144}$	$\dfrac{5}{12}$	$\dfrac{1}{4}$

$\therefore E(\xi)=-20\times\dfrac{1}{144}+(-5)\times\dfrac{5}{72}+10\times\dfrac{37}{144}+25\times\dfrac{5}{12}+40\times\dfrac{1}{4}=22.5$(分). ………………… (12 分)

[**命题意图**]概率统计是高考必考内容，本题考查了独立性检验、离散型随机变量分布列及期望等内容，它考查了学生的数据分析、数学运算等数学素养.

21. **解**：(1)因为$|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=4+2\sqrt{3}$，$|F_1F_2|=2\sqrt{3}$，所以$|PF_1|+|PF_2|=4$，

即 $2a=4$，$a=2$. 因此 $b^2=a^2-c^2=4-3=1$. 故椭圆 E 的方程是$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. …………………… (4 分)

(2)当直线 AB 斜率存在时，设 AB 方程为：$y=kx+m$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y=kx+m,\end{cases}$可得：$(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

则$\begin{cases}\Delta=16(4k^2-m^2+1),\\ x_1+x_2=-\dfrac{8km}{1+4k^2},\\ x_1x_2=\dfrac{4m^2-4}{1+4k^2},\end{cases}$又$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，所以$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ y_1+y_2+y_3=0,\end{cases}$

由$\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{8km}{1+4k^2},\\ y_1+y_2=kx_1+m+kx_2+m=k(x_1+x_2)+2m=\dfrac{2m}{1+4k^2},\end{cases}$可知$\begin{cases}x_3=\dfrac{8km}{1+4k^2},\\ y_3=-\dfrac{2m}{1+4k^2},\end{cases}$

将(x_3,y_3)代入椭圆方程可得：$\left(\dfrac{8km}{1+4k^2}\right)^2+4\left(-\dfrac{2m}{1+4k^2}\right)^2=4$，

化简可得：$4m^2=1+4k^2$，

又 O 到直线 AB 的距离为：$d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$，

则 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{4\sqrt{4k^2-m^2+1}}{1+4k^2}\cdot\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

易知原点 O 为$\triangle ABC$ 的重心，

所以，$S_{\triangle ABC}=3\cdot S_{\triangle OAB}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

当直线 AB 斜率不存在时，根据坐标关系可得，直线 AB 方程为：$x=\pm1$，此时，$A\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

易知原点 O 为$\triangle ABC$ 的重心，$S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle ABO}=3\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times1=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

综上，$S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………………………………………………（12 分）

[命题意图]解析几何是高考必考内容，本题考查了椭圆方程、向量、直线与椭圆等多方面内容，它考查了学生的直观想象、数学建模、数学运算等数学素养.

22.**解**：(1)当 $a=0$ 时，$f(x)=x\ln x+x$，$\because f'(x)=\ln x+2$，

$\therefore$切线的斜率为 $f'(1)=2$，

又 $f(1)=1$，

$\therefore$所求切线的方程为 $y-1=2(x-1)$，即为 $2x-y-1=0$. ……………………………………………（4 分）

(2)当 $0<x<1$ 时，$f(x)>0$ 整理可得 $a>\frac{x\ln x+x}{x-1}$，

令 $g(x)=\frac{x\ln x+x}{x-1}$，则 $g'(x)=\frac{x-\ln x-2}{(x-1)^2}$，

令 $h(x)=x-\ln x-2$，则 $h'(x)=1-\frac{1}{x}$，

由 $h'(x)=0$，得 $x=1$，

当 $0<x<1$ 时，$h'(x)<0$，函数 $h(x)$单调递减，

$\because h(1)=-1<0$，$h(\frac{1}{e^2})=\frac{1}{e^2}-\ln\frac{1}{e^2}-2=\frac{1}{e^2}>0$，

$\therefore h(x)$在区间$(0,1)$上存在一个零点 x_0，

此时 $h(x_0)=x_0-\ln x_0-2=0$，即 $\ln x_0=x_0-2$，

$\therefore$当 $0<x<x_0$ 时，$h(x)>0$，即 $g'(x)>0$，函数 $g(x)$单调递增，

当 $x_0<x<1$ 时，$h(x)<0$，即 $g'(x)<0$，函数 $g(x)$单调递减，

$\therefore g(x)$有极大值，即最大值为 $g(x_0)=\frac{x_0\ln x_0+x_0}{x_0-1}=\frac{x_0(x_0-2)+x_0}{x_0-1}=x_0$，

则 $a>x_0$，

$\because x_0\in(0,1)$，

$\therefore$正整数 a 的最小值是 1. ……………………………………………………………………（12 分）

[命题意图]函数与导数是高考必考内容，该题考查了函数单调性、切线等问题，考查学生数学抽象、逻辑推理、数学运算的核心素养.