

海淀区 2021—2022 学年第 一 学期期中练习

高三数学

2021.11

本试卷共4页，共150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上。在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 在复平面内，复数  $z=i(2+i)$  对应的点的坐标为

- A. (1, 2)      B. (-1, 2)      C. (2, 1)      D. (2, -1)

(2) 已知向量  $a=(x, 2)$ ,  $b=(-1, 1)$ , 若  $a \parallel b$ , 则  $x=$

- A. 1      B. -1      C. 2      D. -2

(3) 已知全集  $U=\{1, 2, 3, 4\}$ , 集合  $A=\{1\}$ ,  $\complement_U(A \cup B)=\{3\}$ , 则集合  $B$  可能是

- A. {4}      B. {1, 4}      C. {2, 4}      D. {1, 2, 3}

(4) 已知命题  $p: \forall a \in (0, +\infty)$ ,  $a + \frac{1}{a} > 2$ , 则  $\neg p$  是

- A.  $\exists a \in (0, +\infty)$ ,  $a + \frac{1}{a} > 2$       B.  $\exists a \notin (0, +\infty)$ ,  $a + \frac{1}{a} > 2$   
C.  $\exists a \in (0, +\infty)$ ,  $a + \frac{1}{a} \leq 2$       D.  $\exists a \notin (0, +\infty)$ ,  $a + \frac{1}{a} \leq 2$

(5) 下列函数中，是奇函数且在其定义域上为增函数的是

- A.  $y = \sin x$       B.  $y = x|x|$       C.  $y = \tan x$       D.  $y = x - \frac{1}{x}$

(6) “ $a > b > c$ ” 是 “ $ab > ac$ ” 的

- A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件      D. 既不充分也不必要条件

(7) 已知等比数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ . 若  $\{a_n\}$  为递增数列且  $a_2 < 0$ , 则

- A.  $q < -1$       B.  $-1 < q < 0$       C.  $0 < q < 1$       D.  $q > 1$



(8) 将函数  $y = \sin 2x$  的图像向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位，得到函数  $f(x)$  的图像，则下列说法正确的是

- A.  $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{6})$       B.  $x = -\frac{\pi}{4}$  是函数  $f(x)$  的图像的一条对称轴  
C.  $f(x)$  在  $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$  上是减函数      D.  $f(x)$  在  $[-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}]$  上是增函数

(9) 下列不等关系中正确的是

- A.  $\ln 2 + \ln 3 > 2 \ln \frac{5}{2}$       B.  $\frac{1}{3} < \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}$   
C.  $\ln 2 \cdot \ln 3 > 1$       D.  $\frac{\ln 3}{\ln 2} < \frac{3}{2}$

(10) 如图， $A$  是轮子外边沿上的一点，轮子半径为 0.3 m. 若轮子从图中位置向右无滑动滚动，则当滚动的水平距离为 2.2 m 时，下列描述正确的是



(参考数据:  $7\pi \approx 21.991$ )

- A. 点  $A$  在轮子的左下位置，距离地面约为 0.15 m  
B. 点  $A$  在轮子的右下位置，距离地面约为 0.15 m  
C. 点  $A$  在轮子的左下位置，距离地面约为 0.26 m  
D. 点  $A$  在轮子的右下位置，距离地面约为 0.04 m

## 第二部分 (非选择题 共110分)

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

(11) 已知  $S_n$  是数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和，若  $S_n = 2n$ ，则  $a_2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(12) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} (x+1)e^x, & x < 1, \\ x^2 - 2x, & x \geq 1, \end{cases}$  则函数  $f(x)$  的零点个数为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(13) 已知  $\triangle ABC$  中， $|\overline{AB}| = 2$ ， $|\overline{AC}| = 1$ ， $\angle BAC = 120^\circ$ ，则  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(14) 已知命题  $p$ : 若  $\triangle ABC$  满足  $\sin A = \cos B$ ，则  $\triangle ABC$  是直角三角形。能说明  $p$  为假命题角为  $A = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $B = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

某生物种群的数量  $x$  随时间  $t$  的变化规律为  $x = 10 - t^2 + 2t$ ， $t \in [0, 10]$ 。  
给出下列四个结论：

- ①该生物种群的数量不会超过 10；
- ②该生物种群数量的增长速度先逐渐变大后逐渐变小；
- ③该生物种群数量的增长速度与种群数量成正比；
- ④该生物种群数量的增长速度最大的时间  $t_0 \in (2, 3)$ 。

根据上述关系式，其中所有正确结论的序号是\_\_\_\_\_。

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(16) (本小题共 14 分)

已知等差数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+1} + a_n = 4n + 2$ 。

(I) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式；

(II) 若数列  $\{b_n - a_n\}$  是公比为 3 的等比数列，且  $b_1 = 3$ ，求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ 。

(17) (本小题共 14 分)

已知函数  $f(x) = 2\cos(x - \frac{\pi}{4})\cos(x + \frac{\pi}{4})$ 。

(I) 求函数  $f(x)$  的最小正周期；

(II) 设函数  $g(x) = f(x) - \cos x$ ，求  $g(x)$  的值域。

(18) (本小题共 14 分)

已知函数  $f(x) = \ln x$ ， $g(x) = \frac{e}{x}$ 。

(I) 直接写出曲线  $y = f(x)$  与曲线  $y = g(x)$  的公共点坐标，并求曲线  $y = f(x)$  的切线方程；

(II) 已知直线  $x = a$  分别交曲线  $y = f(x)$  和  $y = g(x)$  于点  $A, B$ 。当  $a \in (0, 1)$  时， $\triangle OAB$  的面积为  $S(a)$ ，其中  $O$  是坐标原点，求  $S(a)$  的最大值。



(19) (本小题共 14 分)

设  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且  $a \sin B = \sqrt{10}$ .

(I) 求角  $A$  的大小;

(II) 再从以下三组条件中选择 一组条件作为已知条件, 使  $\triangle ABC$  存在且唯一确定, 并求  $\triangle ABC$  的面积

第 1 组条件:  $a = \sqrt{10}, c = 9$ ;

第 2 组条件:  $\cos C = \frac{1}{3}, c = 4\sqrt{2}$ ;

第 3 组条件:  $AB$  边上的高  $h = \sqrt{3}, a = 3$

注: 如果选择的条件不符合要求, 第 (II) 问得 0 分; 如果选择多个符合条件的条件分别解答, 按第一个解答计分

(20) (本小题共 14 分)

设函数  $f(x) = x(x^2 - 3x + a)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

(I) 当  $a = -9$  时, 求函数  $f(x)$  的单调增区间;

(II) 若函数  $f(x)$  在区间  $(1, 2)$  上为减函数, 求  $a$  的取值范围;

(III) 若函数在区间  $(0, 2)$  内存在两个极值点  $x_1, x_2$ , 且满足  $|f(x_1) - f(x_2)| > |f(x_1) + f(x_2)|$ , 请直接写出  $a$  的取值范围.

(21) (本小题 15 分)

设正整数  $n \geq 3$ , 集合  $A = \{a | a = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots, n\}$ . 对于集合  $A$  中的任意元素  $a = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  和  $b = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , 及实数  $\lambda$ , 定义: 当且仅当  $x_k = y_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) 时  $a = b$ ;  $a + b = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ ;  $\lambda a = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$ .

若  $A$  的子集  $B = \{a_1, a_2, a_3\}$  满足: 当且仅当  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  时,  $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = (0, 0, \dots, 0)$ , 则称  $B$  为  $A$  的完美子集.

(I) 当  $n = 3$  时, 已知集合  $B_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ ,  $B_2 = \{(1, 2, 3), (2, 3, 4), (4, 5, 6)\}$ . 分别判断这两个集合是否为  $A$  的完美子集, 并说明理由;

(II) 当  $n = 3$  时, 已知集合  $B = \{(2m, m, m-1), (m, 2m, m-1), (m, m-1, 2m)\}$ . 若  $B$  不是  $A$  的完美子集, 求  $m$  的值;

(III) 已知集合  $B = \{a_1, a_2, a_3\} \subseteq A$ , 其中  $a_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$  ( $i = 1, 2, 3$ ). 若  $2|x_i| > |x_{1i}| + |x_{2i}| + |x_{3i}|$  对任意  $i = 1, 2, 3$  都成立, 判断  $B$  是否一定为  $A$  的完美子集. 若是, 请说明理由; 若不是, 请给出反例.

(考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效)

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

