吉安市高三上学期期末教学质量检测 2023.1

数学试题(理科)参考答案

题号	1	2	3	4	5	6
答案	D	A	A	D	B	B
题号	7	8	9	10	11	12
答案	D	C	C	B	C	D

1.【答案】D

【解析】$B=\{x\,|\,|x-2|<3\}=\{x\,|-1<x<5\}$，

则 $A\cap B=\{1,3\}$，$A\cup B=\{x\,|-1<x\leqslant 5\}\cup\{7\}$. 对比选项知，D 正确，ABC 错误. 故选 D.

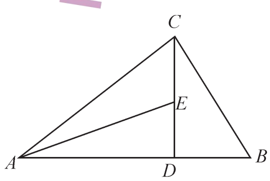
2.【答案】A

【解析】设 $z=a+bi$，则 $(a+bi)(1-2i)=(a-bi)+2$，

即 $(a+2b)+(b-2a)i=(a+2)-bi$，

得 $\begin{cases}a+2b=a+2,\\ b-2a=-b,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=1,\\ b=1.\end{cases}$ $\therefore z=1+i$. 故选 A.

3.【答案】A



【解析】如图，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\times\frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AB}$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\times\frac{\lambda}{\lambda+1}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})$

$=\frac{\lambda}{2(\lambda+1)}\overrightarrow{CB}-\frac{2\lambda+1}{2(\lambda+1)}\overrightarrow{CA}$，

由 $\frac{2\lambda+1}{2(\lambda+1)}=\frac{5}{6}$，且 $\frac{\lambda}{2(\lambda+1)}=\frac{1}{3}$，得 $\lambda=2$.

故选 A.

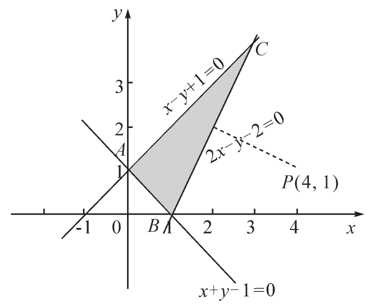
4.【答案】D

【解析】设草坪的长、宽分别为 $a,b(b<a)$，步行道的宽度为 m，则 $\frac{b}{a}<\frac{b+2m}{a+2m}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，$\therefore$ 草坪不可能为黄金矩形. 故选 D.

5.【答案】B

【解析】由题意作出可行域，如图阴影部分所示，其中 $A(0,1)$，$B(1,0)$，$C(3,4)$，

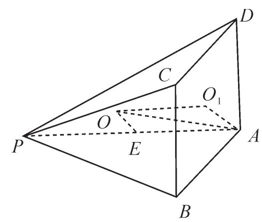
$z=(x-4)^2+(y-1)^2$ 的几何意义是点 $P(4,1)$ 到阴影部分距离的平方，显然，P 到直线 $2x-y-2=0$ 的距离最小，$d_{\min}=\frac{|2\times4-1-2|}{\sqrt{5}}$



$=\sqrt{5}$，P 到 A 点的距离最大，$d_{\max}=4$，$\therefore 5\leqslant z\leqslant 16$. 故选 B.

6.【答案】B

【解析】该几何体的直观图为如图所示的四棱锥 $P-ABCD$，其中 $PA\perp ABCD$，且 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，$PA=4$，设四棱锥的外接球的球心为 O，半径为 R，



则 $R=OA=\sqrt{O_1A^2+AE^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{6}$，

$\therefore$，$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi(\sqrt{6})^3=8\sqrt{6}\pi$. 故选 B.

7.【答案】D

【解析】$\because k_{AB}=a-2$，$\therefore$ 直线 AB 关于直线 $y=a$ 的对称直线 l 为 $y=-(a-2)x+a$，即 $(a-2)x+y-a=0$，圆 C：$(x+3)^2+y^2=18$ 的圆心 $C(-3,0)$，由于直线 l 恒过点 B，当且仅当 $CB\perp l$ 时，圆心 C 到直线 l 的距离最大，$|MN|$ 取最小值.

由 $-(a-2)\times\frac{a}{3}=-1$，得 $a=3$，或 $a=-1$.

当 $a=3$ 时，l：$x+y-3=0$，$d=\frac{|-3-3|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}=r$，直线 l 与圆 C 相切，不符合；

当 $a=-1$ 时，l：$3x-y-1=0$，$d=\frac{|-9-1|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$，$|MN|=2\sqrt{r^2-10}=4\sqrt{2}$. 故选 D.

8.【解析】C

【解析】解法 1:若 A 去乙组(或丙组),且该组只安排 1 人,剩下 4 名记者按 2,2 分组,再分配到另两个小组,不同的安排方法共有 $2\times\frac{C_4^2\cdot C_2^2}{2!}\cdot A_2^2=12$ 种;若 A 去乙组(或丙组),且该组安排 2 人,从 4 人选 1 人在该组,剩下 3 人按 2,1 分组,再分配到另两个小组,不同的安排方法共有 $2C_4^1\times C_3^2\cdot C_1^1\times A_2^2=48$ 种.∴不同的安排方法有 $12+48=60$.故选 C.

解法 2:若甲组安排 1 人,不同的安排方法共有 $C_4^1\times\frac{C_4^2\cdot C_2^2}{2!}\cdot A_2^2=24$ 种;若甲组安排 2 人,不同的安排方法共有 $C_4^2\times C_3^2C_1^1\times A_2^2=36$ 种.∴不同的安排方法有 $24+36=60$.故选 C.

9.【答案】C

【解析】由已知,根据正弦定理得,$2b^2=(2c+a)c+(2a+c)a$,则 $a^2+c^2-b^2=-ac$,

$\therefore\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{-ac}{2ac}=-\frac{1}{2}$,又 $0<B<\pi$,

$\therefore B=\frac{2\pi}{3}$,

$\therefore\sin A+\sin C=\sin A+\sin\left(\frac{\pi}{3}-A\right)=\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A-\frac{1}{2}\sin A=\frac{1}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A$

$=\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)$,

$\because 0<A<\frac{\pi}{3}$,$\therefore\frac{\pi}{3}<A+\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}$,$\therefore$当 $A+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$,即 $A=\frac{\pi}{6}$ 时,$\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)$ 的最大值为 1,即 $\sin A+\sin C$ 的最大值为 1.故选 C.

10.【答案】B

【解析】$x+\frac{y}{2}+\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=5$,即 $(2x+y)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{xy}\right)=5$,设 $2x+y=t$,

$\because 2x+y\geqslant 2\sqrt{2xy}$,当且仅当 $2x=y$ 时,取等号,

即 $t\geqslant 2\sqrt{2xy}$,$\therefore\frac{1}{xy}\geqslant\frac{8}{t^2}$,$\therefore 5\geqslant t\left(\frac{1}{2}+\frac{8}{t^2}\right)$,

即 $t^2-10t+16\leqslant 0$,$(t-2)(t-8)\leqslant 0$,$\therefore 2\leqslant t\leqslant 8$,

$\therefore t_{\max}=8$,此时,$2x=y=4$,即 $x=2$,$y=4$ 时,$2x+y$ 的最大值为 8.故选 B.

11.【答案】C

【解析】$\because f(1-x)$,$g(x)$ 均为奇函数,

$\therefore f(1-x)=-f(1+x)$,$g(-x)=-g(x)$,

函数 $f(x)$,$g(x)$ 的图象分别关于 $(1,0)$,$(0,0)$ 对称,

又 $g(x)=f'(x)$,知 $f(x)$ 的图象关于 $x=0$ 对称,$g(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称,即

$f(-x)=f(x)$,$g(1-x)=g(1+x)$,

$\therefore f(x)$ 与 $g(x)$ 都是周期为 4 的周期函数,

$\therefore f(x)$ 的图象关于 $(5,0)$ 对称,$g(x)$ 的图象关于 $x=5$ 对称,

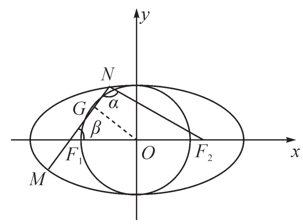
由 $x_1+x_2=10$,知 $\frac{x_1+x_2}{2}=5$,$\therefore f(x_1)+f(x_2)=0$,

由 $g(x_3)=g(x_4)$,知 $\frac{x_3+x_4}{2}=5$,$\therefore x_3+x_4=10$,

$\therefore f(x_1)+f(x_2)+x_3+x_4=10$.

故选 C.

12.【答案】D



【解析】设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,设过 F_1 作圆 O 的切线切点为 G,∴

$OG\perp NF_1$,$\therefore|OG|=b$,$|OF_1|=c$,$|GF_1|=\sqrt{c^2-b^2}$,设 $\angle F_1NF_2=\alpha$,$\angle F_2F_1N=\beta$,

由 $\cos\angle F_1NF_2=-\frac{3}{5}$,即 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$,则 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$,$\sin\beta=\frac{b}{c}$,$\cos\beta=\frac{\sqrt{c^2-b^2}}{c}$,

在 $\triangle F_2F_1N$ 中,$\sin\angle F_1F_2N=\sin(\pi-\alpha-\beta)=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{c^2-b^2}}{c}-\frac{3}{5}\times\frac{b}{c}=\frac{4\sqrt{c^2-b^2}-3b}{5c}$,

由正弦定理得 $\frac{2c}{\sin\alpha}=\frac{|NF_2|}{\sin\beta}=\frac{|NF_1|}{\sin\angle F_1F_2N}=\frac{5c}{2}$,

$\therefore\frac{|NF_1|+|NF_2|}{\sin\angle F_1F_2N+\sin\beta}=\frac{5c}{2}$,

即 $\frac{2a}{\frac{4\sqrt{c^2-b^2}-3b}{5c}+\frac{b}{c}}=\frac{5c}{2}$,

化简，得 $\sqrt{c^2-b^2}=a-\frac{b}{2}$，即 $\sqrt{a^2-2b^2}=a-\frac{b}{2}$，

$\therefore 4a=9b$，即 $\frac{b}{a}=\frac{4}{9}$，

$\therefore$ 椭圆的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{65}}{9}$.

故选 D.

13.【答案】0.84

【解析】随机变量 X 服从正态分布 $N(90,\sigma^2)$，$\therefore$ 正态曲线关于 $X=90$ 对称，由 $P(X<100)=0.92$，得 $P(X\geqslant 100)=1-0.92=0.08$，

$\therefore P(80<X<100)=2(0.5-0.08)=0.84$.

14.【答案】$-\frac{1}{2}$

【解析】由 $y=f(x)$ 的图象关于 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称，$\therefore \omega\times\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=k\pi, k\in\mathbf{Z}$，$\therefore \omega=6k-2(k\in\mathbf{Z})$，又 $\omega>0$，

$\therefore \omega$ 的最小值为 4，此时，$f(x)=\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$，

$T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，

$\therefore f\left(\frac{T}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(4\times\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$.

15.【答案】-1

【解析】抛物线 $C: y=2x^2$，即 $x^2=\frac{1}{2}y$，准线方程为 $y=-\frac{1}{8}$，设 $P\left(m,-\frac{1}{8}\right)$，过点 P 的切线方程为 $y+\frac{1}{8}=k(x-m)$，由 $\begin{cases} y+\frac{1}{8}=k(x-m), \\ y=2x^2, \end{cases}$ 得 $2x^2-kx+km+\frac{1}{8}=0$，

由 $\Delta=k^2-4\times 2\left(km+\frac{1}{8}\right)=0$，得 $k^2-8mk-1=0$.

依题意，k_{PA}，k_{PB} 为上述方程的两根，则 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-1$.

16.【答案】$(0,e^2-3e^{-2}+2]$

【解析】由题意，$f(x)=|e^x-1|=\begin{cases} 1-e^x, x<0, \\ e^x-1, x\geqslant 0, \end{cases}$ 则 $f'(x)=\begin{cases} -e^x, x<0, \\ e^x, x>0, \end{cases}$

$\therefore A(x_1,1-e^{x_1})$，$B(x_2,e^{x_2}-1)$，$k_{AM}=-e^{x_1}$，$k_{BN}=e^{x_2}$，

由 $-e^{x_1}\cdot e^{x_2}=-1$，得 $x_1+x_2=0$，

$\therefore AM: y-(1-e^{x_1})=-e^{x_1}(x-x_1)$，

$M(0,x_1e^{x_1}-e^{x_1}+1)$，

$BN: y-(e^{x_2}-1)=e^{x_2}(x-x_2)$，

$N(0,-x_2e^{x_2}+e^{x_2}-1)$，

$\therefore |MN|=|x_1e^{x_1}-e^{x_1}+1-(-x_2e^{x_2}+e^{x_2}-1)|$

$=|x_1e^{x_1}+x_2e^{x_2}-e^{x_1}-e^{x_2}+2|$

$=|-x_2e^{-x_2}+x_2e^{x_2}-e^{-x_2}-e^{x_2}+2|$，

令 $g(x)=-xe^{-x}+xe^x-e^{-x}-e^x+2(0<x\leqslant 2)$，

$g'(x)=-e^{-x}+xe^{-x}+e^x+xe^x+e^{-x}-e^x=x(e^{-x}+e^x)>0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,2]$ 上递增，又 $g(0)=0$，$g(2)=e^2-3e^{-2}+2$，

$\therefore |MN|$ 的取值范围是 $(0,e^2-3e^{-2}+2]$.

17.【解析】(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $b_1=1$，$b_2=1+d$，$b_3=1+4d$，

由 $b_2^2=b_1b_3$ 得，$(1+d)^2=1\times(1+4d)$，

$\therefore d=2$，或 $d=0$. …………………………… 3 分

当 $d=2$ 时，$a_n=1+(n-2)\times 2=2n-3$，$b_n=1\times 3^{n-1}=3^{n-1}$；…………………………………… 5 分

当 $d=0$ 时，$a_n=1$，$b_n=1$. …………………… 6 分

(2) 若 $b_3\neq a_3$，即 $d\neq 0$，$\therefore a_n=2n-3$，$\frac{S_n}{n}=\frac{(-1+2n-3)n}{2n}=n-2$，又 $b_n=3^{n-1}$，

$\therefore \frac{S_n}{n}+b_n=n-2+3^{n-1}$，……………………… 9 分

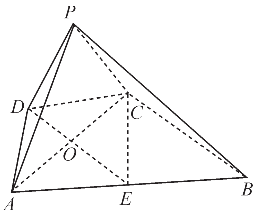
$\therefore T_n=\frac{n(-1+n-2)}{2}+\frac{1\times(1-3^n)}{1-3}$

$=\frac{n^2-3n-1+3^n}{2}$. ………………………… 12 分

18.【解析】(1) 取 AB 的中点为 E，连接 CE，可知四边形 $ADCE$ 是平行四边形，$\therefore CE=\frac{1}{2}AB$，$\therefore$ 点 C 在以 AB 为直径的圆上，$\therefore AC\perp BC$.

又 $BC\perp PA$，$PA\cap AC=A$，且 $PA, AC\subset$ 平面

PAC，∴$BC\perp$平面PAC，又$BC\subset$平面PBC，∴平面$PBC\perp$平面PAC. ……………………5分



(2)∵$BC\perp$平面PAC，$PC\subset$平面PAC，∴$BC\perp PC$，由$PB=2\sqrt{2}$，$BC=PC$，得$BC=2$，$AC=2\sqrt{3}$，

∵$BC\perp$平面PAC，又$BC\subset$平面$ABCD$，

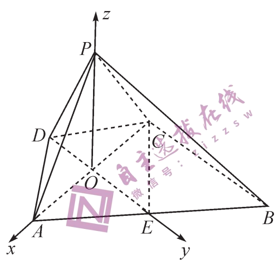
∴平面$ABCD\perp$平面PAC，

连接DE交AC于点O，则O为AC的中点，连接PO，则$PO\perp AC$，且$PO=1$，

∵平面$ABCD\perp$平面PAC，平面$ABCD\cap$平面$PAC=AC$，∴$PO\perp$平面$ABCD$，

∴$PO\perp OE$，由题意可知，$OE\parallel BC$，∴$OE\perp AC$，

故以点O为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系，



$A(\sqrt{3},0,0)$，$P(0,0,1)$，$B(-\sqrt{3},2,0)$，$D(0,-1,0)$，

则$\overrightarrow{AD}=(-\sqrt{3},-1,0)$，$\overrightarrow{AP}=(-\sqrt{3},0,1)$，$\overrightarrow{AB}=(-2\sqrt{3},2,0)$，

设平面PAD的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，由$\begin{cases}\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}-\sqrt{3}x-y=0,\\ -\sqrt{3}x+z=0,\end{cases}$

令$x=1$，则$\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},\sqrt{3})$，

点B到平面PAD的距离为$\left|\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\dfrac{-4\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right|=\dfrac{4}{7}\sqrt{21}$. ……………………12分

19.【解析】(1)2×2列联表

	年龄低于50岁的人数	年龄不低于50岁的人数	合计
满意	60	20	80
不满意	10	10	20
合计	70	30	100

K^2的观测值$k=\dfrac{100\times(60\times10-10\times20)^2}{80\times20\times70\times30}\approx4.762>3.841$，

∴有95%的把握认为年龄低于50岁的人和年龄不低于50岁的人对服务态度有差异. ………6分

(2)100人中满意有80人，从100人随机抽取一人是“满意”的概率为$\dfrac{80}{100}=\dfrac{4}{5}$，

易知，$X\sim B\left(5,\dfrac{4}{5}\right)$，

X的分布列为$P(X=k)=C_5^k\left(\dfrac{1}{5}\right)^{5-k}\left(\dfrac{4}{5}\right)^k$，$k=0,1,2,3,4,5$，即

X	0	1	2	3	4	5
P	$\dfrac{1}{3\ 125}$	$\dfrac{4}{625}$	$\dfrac{32}{625}$	$\dfrac{128}{625}$	$\dfrac{256}{625}$	$\dfrac{1\ 024}{3\ 125}$

……………………………………………………10分

∴X的数学期望$E(X)=5\times\dfrac{4}{5}=4$. ………12分

20.【解析】(1)设双曲线C的方程为$\dfrac{x^2}{2}-y^2=\lambda$，将点$A(2\sqrt{2},1)$的坐标代入得$\dfrac{8}{2}-1=\lambda$，

∴$\lambda=3$，∴双曲线C：$\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1$. ……………4分

(2)显然直线MN的斜率存在，设直线MN的方程为$y=kx+m$，由$\begin{cases}y=kx+m,\\ \dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$消去$y$，

得$(1-2k^2)x^2-4kmx-2(m^2+3)=0$，

由$\Delta=(-4km)^2+4\times2(1-2k^2)(m^2+3)=0$，

得$m^2=6k^2-3$，① ……………………………6分

∴$x_N=\dfrac{4km}{2(1-2k^2)}=\dfrac{2km}{-\dfrac{m^2}{3}}=-\dfrac{6k}{m}$，

$y_N=kx+m=-\dfrac{6k^2}{m}+m=\dfrac{m^2-6k^2}{m}=-\dfrac{3}{m}$，

即切点N的坐标为$\left(-\dfrac{6k}{m},-\dfrac{3}{m}\right)$，…………8分

以MN为直径的圆恒过点F_2，则$\angle MF_2N=90°$，

又M的坐标为$(t,tk+m)$，$F_2(3,0)$，

$\overrightarrow{F_2N}=\left(-\dfrac{6k}{m}-3,-\dfrac{3}{m}\right)$，$\overrightarrow{F_2M}=(t-3,tk+m)$，

∴$\overrightarrow{F_2M}\cdot\overrightarrow{F_2N}=\left(-\dfrac{6k}{m}-3,-\dfrac{3}{m}\right)\cdot(t-3,tk+m)$

$=\left(-\dfrac{6k}{m}-3\right)\times(t-3)-\dfrac{3}{m}(tk+m)=0$，

化简，得$(t-2)(3k+m)=0$，

上式对满足①式任意的k,m成立，则$t=2$.

故存在直线$x=2$满足题设条件. ………… 12 分

21.【解析】(1)当$a=1$时，$g(x)=f(x)-3\ln x-\sin x=2x-\sin x$，

$g'(x)=2-\cos x, g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2, g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi-1$，

曲线$g(x)$在$x=\frac{\pi}{2}$处的切线方程为$y-(\pi-1)=2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$，即$2x-y-1=0$. ……………… 4 分

(2)$h(x)=f(x)-(3a-2)\ln x-3x=2\ln x-ax$，

$h'(x)=\frac{2}{x}-a$，

当$a\leqslant 0$时，$h'(x)>0$，$h(x)$在$(0,+\infty)$上递增，$h(x)$至多一个零点，不合题意；

当$a>0$时，$h(x)$在$\left(0,\frac{2}{a}\right)$上递增，在$\left(\frac{2}{a},+\infty\right)$上递减，须有$h\left(\frac{2}{a}\right)=2\ln\frac{2}{a}-2>0$，

$\therefore 0<a<\frac{2}{\mathrm{e}}$，

又$x\to 0$时，$h(x)\to-\infty$；$x\to+\infty$时，$h(x)\to-\infty$，

$\therefore h(x)$有两个零点，a的取值范围为$\left(0,\frac{2}{\mathrm{e}}\right)$，

………………………………………………… 8 分

要证$a(x_1+x_2)>4$，只要证$x_1+x_2>\frac{4}{a}$，

不妨设$x_1<x_2$，由$h(x_1)=h(x_2)$，则$0<x_1<\frac{2}{a}<x_2$，

构造函数$F(x)=h(x)-h\left(\frac{4}{a}-x\right)\left(0<x<\frac{2}{a}\right)$，

$F'(x)=h'(x)-h'\left(\frac{4}{a}-x\right)=\left(\frac{2}{x}-a\right)-\left(-\frac{2}{\frac{4}{a}-x}+a\right)=\frac{2}{x}+\frac{2}{\frac{4}{a}-x}-2a=\frac{2}{x(4-ax)}(ax-2)^2$，

$\because 0<x<\frac{2}{a}$，$\therefore F'(x)>0$，$\therefore F(x)$在$\left(0,\frac{2}{a}\right)$是递增，又$F\left(\frac{2}{a}\right)=0$，$\therefore F(x)=h(x)-h\left(\frac{4}{a}-x\right)<0$，$\therefore h(x)<h\left(\frac{4}{a}-x\right)$，$\therefore h(x_1)<h\left(\frac{4}{a}-x_1\right)$，又$h(x_1)=h(x_2)$，$\therefore h(x_2)<h\left(\frac{4}{a}-x_1\right)$，

而$x_2,\frac{4}{a}-x_1\in\left(\frac{2}{a},+\infty\right)$，$h(x)$在$\left(\frac{2}{a},+\infty\right)$上递减，$\therefore x_2>\frac{4}{a}-x_1$，即$x_1+x_2>\frac{4}{a}$，

$\therefore a(x_1+x_2)>4$. ………………………… 12 分

22.【解析】(1)消去参数t得到直线l的普通方程为$y=\sqrt{3}x$，极坐标方程为$\theta=\frac{\pi}{3}$或$\theta=\frac{4\pi}{3}$；

$\left(\theta=\frac{\pi}{3}(\rho\in\mathbf{R})\text{也正确}\right)$ ……………………… 2 分

由$\rho=a(1+\cos\theta)$，得$\rho^2=a\rho+a\rho\cos\theta$，即$x^2+y^2=a\sqrt{x^2+y^2}+ax$， ………………………… 4 分

化简得心形线的直角坐标方程为$(x^2+y^2-ax)^2=a^2(x^2+y^2)$. ……………………………… 5 分

(2)将$(2,0)$代入方程$\rho=a(1+\cos\theta)$，得$a=1$，

$\therefore\rho=1+\cos\theta$. …………………………… 6 分

由$\begin{cases}\theta=\frac{\pi}{3},\\ \rho=1+\cos\theta,\end{cases}$得$A\left(\frac{3}{2},\frac{\pi}{3}\right)$，

由$\begin{cases}\theta=\frac{4\pi}{3},\\ \rho=1+\cos\theta,\end{cases}$得$B\left(\frac{1}{2},\frac{4\pi}{3}\right)$， …………… 8 分

$\therefore S_{\triangle ABP}=S_{\triangle AOP}+S_{\Delta BOP}=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}$. ……………………… 10 分

23.【证明】(1)由柯西不等式有

$(a^2+2b^2)(1^2+1^2+1^2)=(a^2+b^2+b^2)(1^2+1^2+1^2)\geqslant(a+b+b)^2=(a+2b)^2$，

$\therefore a+2b\leqslant 3\sqrt{2}$，

当且仅当$a=b=\sqrt{2}$时，取等号. ……………… 5 分

(2)$\because 0<a+2b\leqslant 3\sqrt{2}$，$\therefore\frac{1}{a+2b}\geqslant\frac{1}{3\sqrt{2}}$，

$\therefore$又$\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)(a+2b)=5+\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}\geqslant 9$，

$\therefore\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\geqslant\frac{9}{a+2b}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$，

当且仅当$\frac{2b}{a}=\frac{2a}{b}$，即$a=b=\sqrt{2}$时取等号，

$\therefore\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\geqslant\frac{3}{2}\sqrt{2}$. ………………………… 10 分