

河北衡水中学 2020 届全国高三第一次联合考试

文科数学

命题单位：河北衡水中学 天舟教科院

成绩查询网址：youngdale.onlyets.com

成绩查询微信公众号：ruiya2006

本试卷 4 页。满分 150 分。考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上相应的位置。
2. 全部答案在答题卡上完成，答在本试卷上无效。
3. 回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案用 0.5 mm 黑色笔迹签字笔写在答题卡上。
4. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x < 6\}$, $B = \{y \mid y = 2^x, x \in A\}$, 则 $A \cap B$ 中元素的个数是
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
2. 已知复数 z 满足 $z(1+i) = 1+3i$, 其中 i 是虚数单位, 设 \bar{z} 是 z 的共轭复数, 则 \bar{z} 的虚部是
A. i B. 1 C. $-i$ D. -1
3. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 a_2, a_4 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 4x + 2 = 0$ 的两个根, 则 $S_5 =$
A. 5 B. 10 C. 12 D. 15
4. 若 $f(x) = e^x + ae^{-x}$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程是
A. $y = -x$ B. $y = x$ C. $y = -2x$ D. $y = 2x$
5. 已知 $\odot O$ 的半径为 1, A, B 为圆上两点, 且劣弧 AB 的长为 1, 则弦 AB 与劣弧 AB 所围成图形的面积为
A. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin 1$ B. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 1$ C. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}$
6. 某校为提高学生的身体素质, 实施“每天一节体育课”, 并定期对学生进行体能测验. 在一次体能测验中, 某班甲、乙、丙三位同学的成绩(单位: 分)及班内排名如下表(假定成绩均为整数). 现从该班测验成绩为 94 和 95 的同学中随机抽取两位, 这两位同学成绩相同的概率是

| | 成绩/分 | 班内排名 |
|---|------|------|
| 甲 | 95 | 9 |
| 乙 | 94 | 11 |
| 丙 | 93 | 14 |

- A. 0.2 B. 0.4 C. 0.5 D. 0.6
7. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 若以 $F_1 F_2$ 为直径的圆和曲线 C 在第一象限交于点 P , 且 $\triangle POF_2$ 恰好为正三角形, 则双曲线 C 的离心率为
A. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ C. $1+\sqrt{3}$ D. $1+\sqrt{5}$

8. 某校高一组织五个班的学生参加学农活动,每班从“农耕”“采摘”“酿酒”“野炊”“饲养”五项活动中选择一项进行实践,且各班的选择互不相同.已知1班不选“农耕”“采摘”;2班不选“农耕”“酿酒”;如果1班不选“酿酒”,那么4班不选“农耕”;3班既不选“野炊”,也不选“农耕”;5班选择“采摘”或“酿酒”.则选择“饲养”的班级是
- A. 2班 B. 3班 C. 4班 D. 5班

9. 下列关于函数 $f(x) = 2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x - 1$ 的说法,正确的是

A. $x = \frac{\pi}{3}$ 是函数 $f(x)$ 的一个极值点

B. $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上是增函数

C. 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上有且只有一个零点 $\frac{5\pi}{12}$

D. 函数 $f(x)$ 的图象可由函数 $y = 2\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到

10. 瑞士数学家、物理学家欧拉发现任一凸多面体(即多面体内任意两点的连线都被完全包含在该多面体中,直观上讲是指没有凹陷或孔洞的多面体)的顶点数 V 、棱数 E 及面数 F 满足等式 $V - E + F = 2$,这个等式称为欧拉多面体公式,被认为是数学领域最漂亮、简洁的公式之一.现实生活中存在很多奇妙的几何体,现代足球的外观即取自一种不完全正多面体,它是由 12 块



黑色正五边形面料和 20 块白色正六边形面料构成的.20 世纪 80 年代,化学家们成功地以碳原子为顶点组成了该种结构,排列出全世界最小的一颗“足球”,称为“巴克球(Buckyball)”.则“巴克球”的顶点个数为

A. 180

B. 120

C. 60

D. 30

11. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, E, F 是线段 AC_1 上的点,且 $AE = EF = FC_1$.分别过点 E, F 作与直线 AC_1 垂直的平面 α, β ,则正方体夹在平面 α 与 β 之间的部分占整个正方体体积的

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{3}{4}$

12. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ,点 P 在椭圆上且异于长轴端点.点 M, N 在 $\triangle PF_1F_2$ 所围区域之外,且始终满足 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MF_1} = 0, \overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{NF_2} = 0$,则 $|MN|$ 的最大值为

A. 6

B. 8

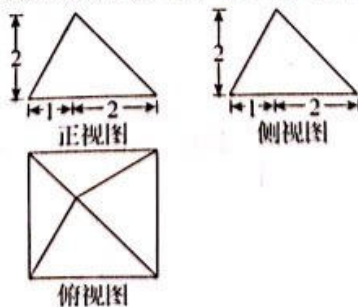
C. 12

D. 14

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 已知非零向量 a, b 满足 $|a| = |b|$,且 $|a - b| = \sqrt{3}|b|$,则向量 a 与 b 的夹角为 _____.

14. 某四棱锥的三视图如图所示,则该四棱锥的最长棱的长度为 _____.



15. 已知在锐角三角形 ABC 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $a=4$, 且 $2a\left(\frac{a}{2}-b\cos B\right)+b^2=c^2$, 则 $b+c$ 的取值范围为 _____.

16. 已知曲线 $y=|\ln x|$ 与直线 $y=m$ 有两个不同的交点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ ($x_1 < x_2$), 设直线 l_1, l_2 分别是曲线 $y=|\ln x|$ 在点 P_1, P_2 处的切线, 且 l_1, l_2 分别与 y 轴相交于点 A, B . $\triangle P_2AB$ 为等边三角形, 则实数 m 的值为 _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

端午节是中国传统节日之一. 节日期间, 各大商场各种品牌的“粽子战”便悄然打响. 某记者走访市场发现, 各大商场粽子种类繁多, 价格不一. 根据数据统计分析, 得到了某商场不同种类的粽子销售价格(单位: 元/千克)的频数分布表, 如表一所示.

表一:

| 价格/(元/千克) | [10,15) | [15,20) | [20,25) | [25,30) | [30,35) |
|-----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 种类数 | 4 | 12 | 16 | 6 | 2 |

在调查中, 记者还发现, 各大品牌在馅料方面还做足了功课, 满足了市民多样化的需求. 除了蜜枣、豆沙等传统馅料粽, 很多品牌还推出了鲜肉、巧克力、海鲜等特色馅料粽. 在该商场内, 记者随机对 100 名顾客的年龄和粽子口味偏好进行了调查, 结果如表二.

表二:

| | 喜欢传统馅料粽 | 喜欢特色馅料粽 | 总计 |
|---------|---------|---------|-----|
| 40 岁以下 | 30 | 15 | 45 |
| 40 岁及以上 | 50 | 5 | 55 |
| 总计 | 80 | 20 | 100 |

(1) 根据表一估计该商场粽子的平均销售价(同一组中的数据用该组区间的中点值代表);

(2) 根据表二信息, 能否有 95% 的把握认为顾客的粽子口味偏好与年龄有关?

参考公式和数据: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n=a+b+c+d$.

| | | | |
|-----------------|-------|-------|--------|
| $P(K^2 \geq k)$ | 0.050 | 0.010 | 0.001 |
| k | 3.841 | 6.635 | 10.828 |

18. (12 分)

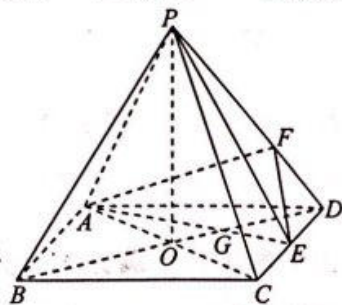
已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, $a_3 = \frac{1}{8}$, 且 $a_1, a_2 + \frac{1}{16}, a_3$ 成等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{2}{\left(\log_{\frac{1}{2}} a_{2n-1}\right)\left(\log_{\frac{1}{2}} a_{2n+1}\right)}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12分)

如图,四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $\angle ABC = 60^\circ$, AC 与 BD 交于点 O , $PO \perp$ 平面 $ABCD$, E 为 CD 的中点, 连接 AE 交 BD 于 G , 点 F 在侧棱 PD 上, 且 $DF = \frac{1}{3}PD$.



(1) 求证: $PB \parallel$ 平面 AEF ;

(2) 若 $\cos \angle BPA = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 求三棱锥 $E-PAD$ 的体积.

20. (12分)

已知函数 $f(x) = ae^x - x - a$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的极值.

(2) 是否存在实数 a , 使得函数 $f(x)$ 恰有两个相异零点? 若存在, 求 a 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

21. (12分)

已知抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$, 直线 l 交 C 于 A, B 两点, 且 A, B 两点与原点不重合, 点 $M(1, 2)$ 为线段 AB 的中点.

(1) 若直线 l 的斜率为 1, 求抛物线 C 的方程;

(2) 分别过 A, B 两点作抛物线 C 的切线, 若两条切线交于点 S , 证明点 S 在一条定直线上.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4—4: 坐标系与参数方程] (10分)

在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 4 - t, \\ y = m + \frac{1}{2}t \end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $(\rho - 2\cos \theta)^2 = 5 - 4\sin^2 \theta$.

(1) 求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 若直线 l 与曲线 C 相切, 求 m 的值.

23. [选修 4—5: 不等式选讲] (10分)

已知函数 $f(x) = |x + 4^m| + |x + 2^{m+1} - 3|$.

(1) 当 $m = 1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 7$ 的解集;

(2) 试证明 $f(x) \geq 2$.

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信扫一扫，快速关注