

绝密★考试结束前

浙江省新阵地教育联盟 2024 届第一次联考

数学试题卷

命题：浙鳌中学 高二数学备课组 审稿：湖州二中 黄国武 桐庐中学 卢国兴 校稿：徐柏军

考生须知：

- 1. 本卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。
- 2. 答题前务必将自己的姓名，准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔分别填写在试题卷和答题纸规定的地方。
- 3. 答题时，请按照答题纸上“注意事项”的要求，在答题纸相应的位置上规范答题，在本试卷纸上答题一律无效。
- 4. 考试结束后，只需上交答题卷。

参考公式：

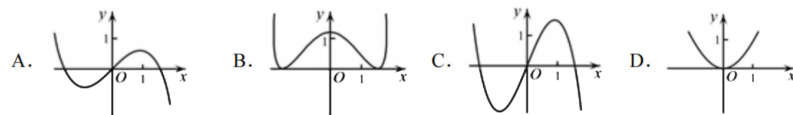
如果事件 A, B 互斥那么	柱体的体积公式
$P(A+B) = P(A) + P(B)$	$V = Sh$
如果事件 A, B 相互独立,那么	其中 S 表示柱体的底面积， h 表示柱体的高
$P(AB) = P(A)P(B)$	锥体的体积公式
如果事件 A 在一次试验中发生的概率为 P ，那么 n	$V = \frac{1}{3}Sh$
次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率为	其中 S 表示锥体的底面积， h 表示锥体的高
$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} (k = 0, 1, 2, \dots, n)$	球的表面积公式
台体的体积公式	$S = 4\pi R^2$
$V = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)h$	球的体积公式
其中 S_1, S_2 分别表示台体的上、下底面积，	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$
h 表示为台体的高	其中 R 表示球的半径

第 I 卷

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- 1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid y = \sqrt{2-x}\}$ ， $B = \{-1, 0, 1, 2\}$ ，则 $A \cap B =$
A. $\{-1, 0, 1\}$ B. $\{-1, 0, 1, 2\}$ C. $\{0, 1, 2\}$ D. $\{x \mid x \leq 2\}$
- 2. 已知复数 z 满足 $zi = 1 + 2i$ (i 为虚数单位)，则 $|z| =$
A. 5 B. 3 C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{3}$
- 3. 角 α 的终边过点 $(3, -4)$ ，则 $\sin(\alpha + \frac{3\pi}{2}) =$
A. $-\frac{3}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $-\frac{4}{5}$

4. 函数 $f(x) = \ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right) \cdot \cos x$ 的图象大致为



5. 让 3 名男生和 3 名女生站成一排，且任意相邻两名学生性别不同，则男生甲站在最左端的概率是

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{12}$

6. 已知 $\vec{a}, \vec{b}$ 为单位向量， $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ， $\vec{c} \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = 0$ ，则 $|\vec{b} - \vec{c}|$ 的最大值为

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ D. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

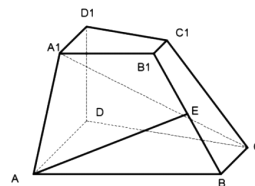
7. 已知椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ， $M(2, 1)$ 为椭圆内一点，以 M 为中点的弦与椭圆交于点

A, B ，与 x 轴交于点 P ，线段 AB 的中垂线与 x 轴交于点 G ，当 ΔGPM 面积最小时，椭圆的离心率为

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

8. 如图，已知四棱台的底面 $ABCD$ 是直角梯形， $\angle BAD = 90^\circ$ ， $AD \parallel BC$ ， $AD = AB = 2BC = 2DD_1 = 2A_1D_1$ ， $DD_1 \perp$ 平面 $ABCD$ ， E 是侧棱 BB_1 所在直线上的动点， AE 与 CA_1 所成角的余弦值的最大值为

- A. $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ B. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$ C. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$



二、**选择题**：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

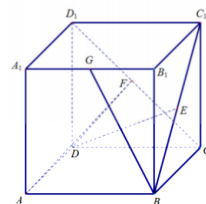
9. 已知圆的方程为 $x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0$ ，下列结论正确的是

- A. 该圆的面积为 4π B. 点 $(\sqrt{2}, 1)$ 在该圆内
C. 该圆与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相离 D. 直线 $x + y - 4 = 0$ 与该圆相切

10. 已知抛物线 $x^2 = 2y$ 的焦点为 F ， $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ 是抛物线上两点，则下列结论正确的

- A. 点 F 的坐标为 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$
B. 若直线 MN 经过焦点 F ，则 $y_1 y_2 = \frac{1}{4}$
C. 若 $|MF| + |NF| = 4$ ，则线段 MN 的中点 P 到 x 轴的距离为 $\frac{3}{2}$
D. 若直线 MN 经过焦点 F 且满足 $\overrightarrow{MF} = 3\overrightarrow{FN}$ ，则直线 MN 的倾斜角为 60°

11. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 点 E, F, G 分别为线段 BC_1, CD_1, A_1B_1 的中点, 则
- A. $DE \perp BG$
- B. $AF \parallel$ 平面 BC_1G
- C. 直线 AB 与平面 BC_1G 所成的角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- D. 过点 F 且与直线 DE 垂直的平面 α 截该正方体所得截面的周长为 $3\sqrt{5} + \sqrt{2}$



12. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 R , 记 $g(x) = f'(x)$. 若 $f(1-2x)$, $g\left(\frac{3}{2}x+2\right)$ 均为偶函数, 则下列说法正确的是
- A. 函数 $f(x)$ 的图像关于 $x=1$ 对称
- B. $g(2023)=0$
- C. 若函数 $g(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增, 则 $g(x)$ 在区间 $[0, 2023]$ 上有且只有 1012 个零点
- D. 数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 $S_n = \frac{n(n-2)}{2}$, 若 $g(x)$ 在 $[2, 3]$ 上单调递减, 且 $g\left(\frac{5}{2}\right)=1$, 则 $\sum_{k=1}^{2023} g(a_k)=1$

第 II 卷

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 在 $\left(x + \frac{3}{x}\right)^4$ 展开式中, 常数项为 . (用数字作答)
14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{n-2}{2n-13}$, 前 n 项的和为 S_n , 则 S_n 取得最小值时 n 的值为 .
15. 已知 $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) - 2\sin x \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}$, 则 $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) =$.
16. 若实数 a, b 满足 $a^2 - 4b^2 = 4$, 则 $a^2 + ab$ 的最小值为 .

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $4a_n - 3S_n = 3(n \in N^*)$.
- (1) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列;
- (2) 设 $b_n = \frac{4}{3}a_n - 2n + 1$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \phi)$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \phi < 0$) 的周期为 $\frac{2\pi}{3}$, 图象关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称.

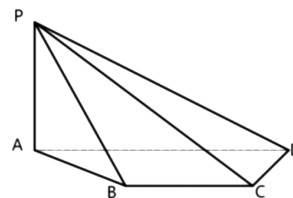
(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 在钝角三角形 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边为 a, b, c , 若 $f(A) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = 2$, $c = 4$, D 为 BC 的中点, 求 AD 的长.

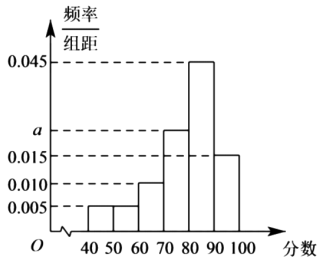
19. (12 分) 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是梯形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $BC \parallel AD$, $AB = \sqrt{2}$, $CD = 1$, $AD = 2BC = 2$, $PA = 1$.

(1) 求点 A 到平面 PBC 的距离;

(2) 求平面 PBA 与平面 PBC 的夹角的大小.



20. (12 分) 近日, 抖音在北京、上海、成都开放商家自主入驻. 为了从美团嘴里抢到肉, 抖音采取了错位竞争的打法. 首先, 抖音配送并不求快. 在立即配送之外, 抖音增加了“预约点餐”形式, 即可以预约后面几天的配送时间. A 市餐饮行业协会为掌握本市抖音配送方式的服务质量水平, 从用该形式就餐的人员中随机抽取了 1000 人, 每人分别对其评分, 满分为 100 分. 随后整理评分数据, 将得分分成 6 组: 第 1 组 $[40, 50)$, 第 2 组 $[50, 60)$, 第 3 组 $[60, 70)$, 第 4 组 $[70, 80)$, 第 5 组 $[80, 90)$, 第 6 组 $[90, 100]$, 得到频率分布直方图, 如图:



- (1) 求 a 的值;
- (2) 现 A 市餐饮行业协会针对本地区成年人使用抖音配送方式是否与性别有关联进行了问卷调查, 在 1000 人中随机抽取了 100 名成年人样本进行分析.
- (i) 请完成列联表, 依据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验, 能否认为使用抖音配送方式与性别有关?

	使用抖音配送方式	不使用抖音配送方式	总计
女性		20	
男性	10		50
总计			

- (ii) 现采用分层抽样从使用抖音配送方式的市民中抽取一个容量为 8 的样本, 将该样本看成一个总体, 从中随机抽取 3 人, 用随机变量 X 表示被抽到的男性顾客的人数, 求 X 的分布列和数学期望.

参考公式: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n=a+b+c+d$.

参考数据:

α	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
χ_α	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

21. (12 分) 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\sqrt{2}$, 左焦点 F 到双曲线 E 的渐近线的距离为 $\sqrt{2}$, 过点 F 作直线 l_1 与双曲线 C 的左、右支分别交于点 A, B , 过点 F 作直线 l_2 与双曲线 E 的左、右支分别交于点 C, D , 且点 B, C 关于原点 O 对称.
- (1) 求双曲线 E 的方程;
 - (2) 设 $B(x_0, y_0)$, 试用 x_0 表示点 A 的横坐标;
 - (3) 求证: 直线 AD 过定点.

22. (12 分) 定义一种新运算“ $\oplus$ ”: $x \oplus y = \ln(e^x + e^y), x, y \in R$, 这种运算有许多优美的性质: 如 $x \oplus y = y \oplus x, (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ 等.
- 已知函数 $f(x) = 2e^x - a((x-1) \oplus (x-1)), a \in R$.
- (1) 当 $a=1$ 时, 求 $f(1)$ 的值;
 - (2) 设 $f(x)$ 有两个零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 若 $ke^{x_1+x_2} < \frac{a^2}{4}$ 恒成立, 求正实数 k 的取值范围.