

辽宁省实验中学 2023 届高三第五次模拟考试

数学试卷

考试时间：120 分钟 试题满分：150 分

命题人：谭健 王清礼 校对：谭健 王清礼

一. 选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设 $p: x^2 - x - 12 \leq 0$, $q: \frac{7}{x+3} \geq 1$, 则 p 是 q 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

2. 已知 x, y 的对应值如下表所示:

x	0	2	4	6	8
y	1	$m+1$	$2m+1$	$3m+3$	11

若 y 与 x 线性相关，且回归直线方程为 $y = 1.6x + 0.6$, 则 $m =$ ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

3. $(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ) \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)^9 =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ C. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ D. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

4. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1 = 2$, $S_{n+1}^2 - 3^n a_{n+1} = S_n(S_n + 2 \cdot 3^n)$, 则 $S_{2023} =$ ()

- A. $3^{2023} - 1$ B. $\frac{3^{2023} - 1}{2}$ C. $\frac{3^{2023} + 1}{2}$ D. $\frac{3^{2022} + 1}{2}$

5. 2023 年的五一劳动节是疫情后的第一个小长假，公司筹备优秀员工假期免费旅游. 除常见的五个旅游热门地北京、上海、广州、深圳、成都外，淄博烧烤火爆全国，山东也成为备选地之一. 若每个部门从六个旅游地中选择一个旅游地，则甲、乙、丙、丁四个部门至少有三个部门所选旅游地全不相同的方法种数共有 ()

- A. 1800 B. 1080 C. 720 D. 360

6. 已知函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi) + 1$ ($0 < \varphi < \pi$) 满足 $f(x) + f\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) = 2$, 若

$0 < x_1 < x_2 < \pi$, 且 $f(x_1) = f(x_2) = \frac{2}{5}$, 则 $\sin(x_2 - x_1)$ 的值为 ()

- A. $-\frac{4}{5}$ B. $-\frac{3\sqrt{2}}{5}$ C. $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

7. 已知向量 $\vec{b}, \vec{c}$ 和单位向量 $\vec{a}$ 满足 $|\vec{a} - \vec{b}| = 2|\vec{b}|$, $|\vec{c} - \vec{a}| + |\vec{c} + \vec{a}| = 4$, 则 $\vec{b} \cdot \vec{c}$ 的最大值为 ()

- A. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

8. 设 O 为坐标原点, F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 过 F_1 作圆 $O: x^2 + y^2 = b^2$ 的一条切线 F_1T , 切点为 T . 线段 F_1T 交 C 于点 P , 若 $\triangle OPT$ 的面积为 $\frac{1}{2}$, 且 $\sin \angle F_1PF_2 = \frac{4}{5}$, 则 C 的方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ B. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$ C. $x^2 - \frac{y^2}{16} = 1$ D. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

二. 选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

9. 已知 $(1-2x)^{2023} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2023}x^{2023}$, 则 ()

- A. 展开式中所有项的系数和为 -1 B. 展开式中二项系数最大项为第 1012 项

- C. $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_{2023}}{2^{2023}} = -1$ D. $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 2023a_{2023} = 2023$

10. 已知点 M, N 在圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 上运动, 点 $P(1,1)$, 且 $|PM|^2 + |PN|^2 = 10$, Q 为线段 M, N 的中点, 则 ()

- A. 过点 P 有且只有一条直线与圆 O 相切 B. $|QM|^2 + |OQ|^2 = 1$

- C. 点 Q 在直线 $x+2y+1=0$ 上运动 D. $|AB|$ 的最大值为 $\sqrt{2}$

11. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P, E, F 分别为棱 AA_1, CC_1, BC 的中点, O_1 为侧面 AA_1B_1B 的中心, 则 ()

- A. 直线 $AB \parallel$ 平面 PEF B. 直线 $A_1C \parallel$ 平面 O_1EF

- C. 三棱锥 O_1-PEF 的体积为 $\frac{1}{3}$ D. 三棱锥 $P-BCE$ 的外接球表面积 9π

12. 已知 $x > 0$ 时, $(e^x - ax - b - c)(ax + b - \ln x) \geq 0$, 则 ()

- A. 当 $c < 2$ 时, $b+c > 1, a+b \geq 0$ B. 当 $c < 2$ 时, $a + \ln a > 2c - 3$

- C. 当 $c > 3$ 时, $a + \ln a < c$ D. 当 $c > 3$ 时, $a + \ln a < 2c - 3$

三. 填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 2023 年国家公务员考试笔试于 1 月 8 日结束, 公共科目包括行政职业能力测验和申论两科, 满分均为 100 分, 行政职业能力测验中, 考生成绩 X 服从正态分布 $N(80, \sigma^2)$. 若

$P(75 \leq x \leq 85) = \frac{1}{5}$, 则从参加这次考试的考生中任意选取 3 名考生, 恰有 2 名考生的成绩高于 85 的概率为_____.

14. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(1-2x) = f(1+2x)$, 且当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = x$, 若将方程 $f(x) = \log_{n+1}|x| (n \in \mathbf{N}^*)$ 实数解的个数记为 a_n , 则

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin A = 2 \cos B \cos C$, 则 $\cos^2 B + \cos^2 C$ 的最大值为_____.
16. 斜三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 平面 $ABC \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 若 $AB = 3\sqrt{3}$, $AC = BC = 3$, $\sin \angle A_1AB = \frac{1}{3}$, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 内放置两个半径相等的球, 使这两个球相切, 且每个球都与三棱柱的三个侧面及一个底面相切, 则三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的高为_____.

四. 解答题: 本题共 6 小题, 17 题 10 分, 18 题至 22 题每题 12 分, 共 70 分.

17. 已知 $\triangle ABC$ 中, $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan A + \tan B = \frac{2}{3}\sqrt{3}$,

(1) 求 $\tan A$;

(2) 若点 D 为 BC 边上靠近点 B 的三等分点, 求 $\angle ADC$ 的余弦值.

18. 在 2005 年世青赛中, 被称作“超白金一代”的中国男足 U23 代表队打出了中国男足在世界舞台上的最好表现. 球队的战术核心, 来自沈阳的陈涛入选了赛事最佳阵容. 世青赛的赛制分为小组赛、淘汰赛两个阶段. 小组赛中, 参赛的 32 支球队被分为 8 个小组, 每个小组 4 支球队, 按照单循环赛制选出两支球队进入淘汰赛. 淘汰赛中 16 支球队捉对厮杀, 败者淘汰胜者晋级, 通过 4 轮比赛决出最后的冠军.

(1) 已知在小组赛中, 每赢一场记 3 分, 打平一场记 1 分, 输一场记 0 分. 小组赛阶段中国队与巴拿马、土耳其、乌克兰三支球队分在同一组. 首战中中国队惊险战胜了欧洲亚军土耳其队, 在小组赛占据了优势. 面对后两场比赛的对手乌克兰队和巴拿马队, 根据赛前球探报告分析, 中国队都有实力优势, 可以近似认为后两场比赛中国的获胜的概率都为 0.5, 打平的概率都为 0.2, 输球的概率都为 0.3. 设中国队三场小组赛之后的总积分为随机变量 X , 求出其分布列和期望.

(2) 10 号队员陈涛作为中国队的进攻核心, 他的表现对中国队而言举足轻重. 过往数据表示, 在所有陈涛出场并且有进球或者助攻的比赛中, 中国队赢得了其中 80% 的场次, 陈涛在其代表中国队出场的 40 场比赛中, 有 30 场比赛完成了进球或者助攻.

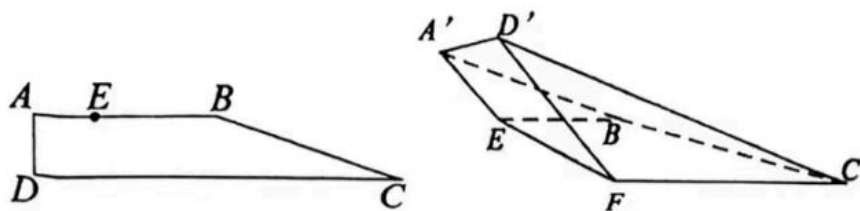
在本届比赛中, 中国队在小组赛中顺利出线, 淘汰赛首轮中对阵世界足坛的传统强队德国队. 已知在淘汰赛对阵德国队的比赛中, 陈涛代表中国队出场比赛, 虽然经过全队不懈努力, 仍然不敌强大的德国队, 遗憾告别世界杯. 那么, 若以过往的数据估计概率, 请估计陈涛在本场比赛贡献进球或者助攻的概率.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{3a_n + 4}{7 - a_n}$, $a_1 = \frac{3}{4}$.

(1) 计算: a_2, a_3, a_4, a_5 , 猜想数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 并证明你的结论;

(2) 若 $\forall n \in \mathbf{N}_+$, $1.1^n(2 - a_n) < k$, 求 k 的取值范围.

20. 已知直角梯形形状如下, 其中 $AB \perp AD$, $\overline{DC} = 2\overline{AB} = 6\overline{AE}$, $AB = 6$, $AD = 2$.



(1) 在线段 CD 上找出点 F , 将四边形 $ADFE$ 沿 EF 翻折, 形成几何体 $A'BE - D'CF$. 若

无论二面角 $A'-EF-B$ 多大，都能够使得几何体 $A'BE-D'CF$ 为棱台，请指出点 F 的具体位置（无需给出证明过程）。

（2）在（1）的条件下，若二面角 $A'-EF-B$ 为直二面角，求棱台 $A'BE-D'CF$ 的体积，并求出此时二面角 $B-A'D'-E$ 的余弦值。

21. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 与 y 轴交于 $A(0, b)$, $B(0, -b)$ 两点，椭圆上异于 A ,

B 两点的动点 D 到 A , B 两点的斜率分别为 k_1 , k_2 , 已知 $k_1 k_2 = -\frac{1}{4}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）过定点 $G(-1, -1)$ 与动点 D 的直线，与椭圆交于另外一点 H ，若 AH 的斜率为 k_3 ，求 $k_2 + k_3$ 的取值范围。

22. 已知 $f(x) = x^2 + ax$, $g(x) = \ln x$ 有且仅有一条公切线 l ,

（1）求 $f(x)$ 的解析式，并比较 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小关系。

（2）证明： $\sum_{i=1}^n \frac{i+1}{i^2} > \ln(n+1)$, $n \in \mathbf{N}_+$.

