绝密★启用前

辽宁省名校联盟2022届高三10月份联合考试

数学

命题人：阜新市实验中学　刘德洋　审题人：阜新市实验中学　李子瑞

考号

本试卷满分150分，考试时间120分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\left\{x\left|\frac{x-2}{x}\leqslant 0\right.\right\}$，集合 $B=\{x|e^{x-1}>1\}$，$A\cap(\complement_{R}B)$

A. $(1,2]$　　B. $(0,2]$　　C. $(0,1)$　　D. $[0,1]$

2. "$\ln a>\ln b$"是"$\frac{a}{b}>1$"的______条件

A. 充分不必要　　B. 必要不充分　　C. 充分必要　　D. 既不充分也不必要

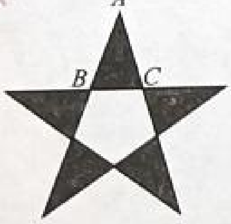
3. 已知复数 $z=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2020}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2021}$，则 z 的共轭复数 $\bar{z}=$

A. $1+i$　　B. $1-i$　　C. $-1+i$　　D. $-1-i$

4. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(0,2)$，$\boldsymbol{c}=(2,1)$，若 $(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})\parallel\boldsymbol{c}$，则 $\lambda=$

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{5}{4}$　　D. 2

5. 人们通常把顶角为36°的等腰三角形称为黄金三角形，因为它的底边和腰长的比值等于黄金分割比$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，我们熟悉的五角星就是由5个黄金三角形和1个正五边形组成的，如图，△ABC就是一个黄金三角形，根据以上信息，可得 $\sin 54°=$



A. $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$　　B. $\frac{3+\sqrt{5}}{8}$　　C. $\frac{4+\sqrt{5}}{8}$　　D. $\frac{2\sqrt{5}-1}{4}$

6. 2021 年 5 月 11 日，全国第七次人口普查的结果正式公布，截止到 2020 年，全国人口总数约为14 亿，下列各选项的数字与 14 亿最接近的是(参考数据：$e\approx2.718$，$\ln 2\approx0.7$，$\ln 5\approx1.6$，$\ln 7\approx1.9$)

A. $e^{19.11}$　　B. $e^{20.03}$　　C. $e^{21.06}$　　D. $e^{22.11}$

7. 已知函数 $f(x)=x^2-4x$，$g(x)=\dfrac{x^2+5}{\sqrt{x^2+1}}$，若对于 $\forall x_1\in[a,a+1]$，$\exists x_2\in[0,2\sqrt{2}]$，使得 $f(x_1)\leqslant g(x_2)$，则 a 的取值范围是

A. $[-1,4]$　　B. $\left[\dfrac{6-5\sqrt{3}}{3},\dfrac{3+5\sqrt{3}}{3}\right]$

C. $[2-2\sqrt{2},1+2\sqrt{2}]$　　D. $[0,3]$

8. 已知函数 $f(x)=a(x+\cos x)-e^x$ 在 $(0,\pi)$ 上恰有两个极值点，则 a 的取值范围是

A. $(0,1)$　　B. $(-\infty,e^{\pi})$　　C. $(0,e^{-\pi})$　　D. $(e^{\pi},+\infty)$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 下列说法正确的有

A. 命题 $\exists x<0,x^2+x+1\leqslant0$ 的否定是 $\forall x<0,x^2+x+1\geqslant0$

B. 若复数 z_1,z_2 满足 $|z_1|=|z_2|$，则 $z_1^2=z_2^2$

C. 若平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2$

D. 在△ABC 中，若 $\tan A\tan B>1$，则△ABC 为锐角三角形

10. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 [illegible] <0，则

A. 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列　　B. 数列 $\{S_n\}$ 是递增数列

C. S_n 的最小值是 $S_{2\,021}$　　D. 使得 S_n 取得最小正数的 $n=4\ 042$

11. 著名数学家欧拉提出了如下定理：三角形的外心、重心、垂心依次位于同一直线上，且重心到外心的距离是重心到垂心距离的一半，此直线被称为三角形的欧拉线，该定理被称为欧拉线定理. 已知△ABC 的外心为 O，重心为 G，垂心为 H，M 为 BC 中点，且 AB=4，AC=2，则下列各式正确的有

A. $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BC}=$ [illegible]　　B. $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=-6$

C. $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$　　D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{HM}$

12. 已知定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 图像连续，满足 $f(x)-f(-x)=6\sin x-2x$，且 $x>0$ 时，$f'(x)<3\cos x-1$ 恒成立，则不等式 $f(x)\geqslant f\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)-\dfrac{\pi}{3}+3\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 中的 x 可以是

A. $-\dfrac{\pi}{6}$　　B. 0　　C. $\dfrac{\pi}{6}$　　D. $\dfrac{\pi}{3}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 写出一个同时具有下列性质①②③的数列 $\{a_n\}$，①无穷数列；②递减数列；③每一项都是正数，$a_n=$________.

14. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，满足 $f(x+2)=-f(x)$，当 $x\in[-1,0]$，$f(x)=e^x-1$，则 $f(2\ 021)=$________.

15. 已知函数 $f(x)=4\cos\omega x\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$ 在 $x\in(0,\pi)$ 上恰有 2 个极大值点，ω 的取值范围是________.

16. 已知正数 x,y 满足 $xy^2(x+6y)=1$，当 $x=$________时，$x+3y$ 取得最小值，最小值是________（第一个空 2 分，第二个空 3 分）.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_3=\frac{1}{6}$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+1}$.

（1）求证：数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是等差数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若________，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

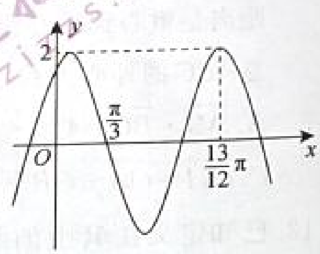
（在① $b_n=a_na_{n+1}$；② $b_n=\frac{(-1)^n}{a_n}$；③ $b_n=\frac{1}{a_n}+\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{a_n}}$ 三个条件中选择一个补充在第（2）问中，并对其求解，如果多写按第一个计分）

18.（12 分）

已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的图像如图所示.

（1）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（2）将函数 $f(x)$ 的图像上每一点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$，再向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位，再向上平移 1 个单位，得到函数 $g(x)$ 的图像，求函数 $g(x)$ 图像的对称轴方程和对称中心坐标.



19.（12 分）

已知△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且三条边的长度 a,b,c 是三个连续的正整数（$a<b<c$）.

（1）若△ABC 是直角三角形，且∠ACB 的平分线交 AB 于点 D，求 CD 的长；

（2）若△ABC 是钝角三角形，求△ABC 的面积.

20.(12 分)

已知正项等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，满足 $a_1=1$，$S_{n+2}-2S_{n+1}=S_n-2S_{n-1}(n\geqslant 2)$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\left\{\frac{2n+1}{a_n}\right\}$的前 n 项和 T_n；

(3)在(2)的条件下，若$\forall n\in\mathbf{N}_+$，$T_n\geqslant 10\left(1-\frac{1}{a_n}\right)-\lambda$，求 λ 的最小值.

21.(12 分)

已知函数 $f(x)=(x^2-2x)e^x+2ex-e^2\ln x$.

(1)求 $f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

(2)求证：$f(x)>0$.

22.(12 分)

已知函数 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-(2a+1)x^2+4ax+\frac{16}{3}a$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性；

(2)若 $f(x)$只有 1 个零点 x_0，且 $x_0<0$，求 a 的取值范围；

(3)当 $a=\frac{1}{4}$时，是否存在正整数 k，使得关于 x 的方程$|f(\sin x)+f(\cos x)|=k$ 有解？如果存在，求出 k 的值；如果不存在，说明理由.

参考答案及解析

一、选择题

1. C 【解析】由题意得 $A=(0,2]$，$B=(1,+\infty)$，$\complement_{\mathbf{R}}B=(-\infty,1]$，所以 $A\cap\complement_{\mathbf{R}}B=(0,1]$. 故选C项.

2. A 【解析】因为 $\ln a>\ln b\Rightarrow a>b>0\Rightarrow\frac{a}{b}>1$，又因为 $\frac{a}{b}>1\Rightarrow a>b>0$ 或 $a<b<0$，所以"$\ln a>\ln b$"是"$\frac{a}{b}>1$"的充分不必要条件，故选A项.

3. C 【解析】因为 $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$，$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$，所以 $z=(-i)^{2021}+i^{2022}=-i-1=-1-i$，则 $\bar{z}=-1+i$. 故选C项.

4. B 【解析】由题意得 $\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}=(1,2-2\lambda)$，因为 $\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{c}$，所以 $1\times1=2\times(2-2\lambda)$，解得 $\lambda=\frac{3}{4}$. 故选B项.

5. A 【解析】在△ABC中，$A=36°$，$B=C=72°$，由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}$，即 $\frac{\sin 36°}{\sin 72°}=\frac{BC}{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，由倍角公式得，$\frac{\sin 36°}{2\sin 36°\cos 36°}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，解得 $\cos 36°=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$，$\sin 54°=\sin(90°-36°)=\cos 36°=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$. 故选A项.

6. C 【解析】设 $14\times10^8=e^x$，则 $x=\ln(14\times10^8)=\ln 14+8\ln 10=\ln(2\times7)+8\ln(2\times5)=9\ln 2+\ln 7+8\ln 5\approx9\times0.7+1.9+8\times1.6=21$. 故选C项.

7. A 【解析】由题意得 $f(x)_{\max}\leqslant g(x)_{\max}$，$g(x)=\frac{x^2+1+4}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\frac{4}{\sqrt{x^2+1}}$，设 $\sqrt{x^2+1}=t$，因为 $x\in[0,2\sqrt{2}]$，所以 $t\in[1,3]$，$y=t+\frac{4}{t}$ 在 $[1,2]$ 单调递减，在 $[2,3]$ 单调递增，当 $t=1$ 时，$y=5$，当 $t=3$ 时，$y=\frac{13}{3}<5$，所以 $g(x)_{\max}=5$. 又 $f(x)$ 在 $[a,a+1]$ 的最大值是 $f(a)$ 或 $f(a+1)$，所以得 $\begin{cases}f(a)\leqslant5,\\f(a+1)\leqslant5,\end{cases}$ 解得 $a\in[-1,4]$. 故选A项.

8. D 【解析】$f'(x)=a(1-\sin x)-e^x$，根据题意得 $f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 有2个变号零点，当 $a=0$ 时，显然不合题意，当 $a\neq0$ 时，方程 $a(1-\sin x)-e^x=0$ 等价于 $\frac{1}{a}=\frac{1-\sin x}{e^x}$，令 $g(x)=\frac{1-\sin x}{e^x}$，$g'(x)=\frac{\sin x-\cos x-1}{e^x}=\frac{\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1}{e^x}$，令 $g'(x)=0$，因为 $x\in(0,\pi)$，解得 $x=\frac{\pi}{2}$，可得 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 中单调递减，在 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递增，因为 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，$g(0)=1$，$g(\pi)=e^{-\pi}<1$，要使直线 $y=\frac{1}{a}$ 与 $g(x)$ 的图像有2个不同的交点，需要满足 $0<\frac{1}{a}<e^{-\pi}$，解得 $a>e^{\pi}$. 故选D项.

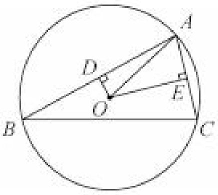
二、选择题

9. ACD 【解析】对于B项，设 $z_1=1$，$z_2=i$，$|z_1|=|z_2|=1$，但 $z_1^2=1$，$z_2^2=-1$，故B项错误；对于D项，由 $\tan A\tan B>1$ 可得 $\tan A$ 和 $\tan B$ 同号，所以 A，B 只能都是锐角，又 $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}<0$，所以 $A+B>\frac{\pi}{2}$，则 C 也是锐角，故D项正确；A，C项显然正确. 故选ACD项.

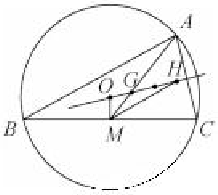
10. AC 【解析】因为 $a_{2022}>0$，$a_{2021}+a_{2022}<0$，所以 $a_{2021}<0$，可得公差 $d>0$，S_n 的最小值是 S_{2021}，故A，C项正确；因为 $1\leqslant n\leqslant2021$，$S_n$ 单调递减，$n\geqslant2022$，S_n 单调递增，所以B项错误；因为 $a_{2021}+a_{2022}<0$，所以 $S_{4042}=\frac{4042(a_1+a_{4042})}{2}=\frac{4042(a_{2021}+a_{2022})}{2}<0$，同理 $S_{4043}=\frac{4043(a_1+a_{4043})}{2}=4043a_{2022}>0$，所以 S_n 取得最小正数时的 $n=4043$，D项错误. 故选AC项.

11. BCD 【解析】由 G 是△ABC 的重心可得 $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}(|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2)=-4$，故A项错误；过△$ABC$ 的外心 O 分别作 AB，AC 的垂线，垂足为 D，E，如图(1)，易知 D，E 分别是 AB，AC 的中点，则 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle OAE-|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\angle OAD=|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{AC}|-|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AB}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2-\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=-6$，故B项正确；因为 G 是△ABC 的重心，所以有 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\mathbf{0}$，故 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA})+(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB})+(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC})=3\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{OG}$，由欧拉线定理可得 $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$，故C项正确；如图(2)，由 $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$ 可得 $\overrightarrow{MG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MO}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MH}$，即 $\overrightarrow{GM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OM}+\frac{1}{3}\overrightarrow{HM}$，则有 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}=6\overrightarrow{GM}=$

$6\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OM}+\frac{1}{3}\overrightarrow{HM}\right)=4\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{HM}$，D 项正确. 故选 BCD 项.



图(1)



图(2)

12. ABC 【解析】由 $f(x)-f(-x)=6\sin x-2x$ 整理得 $f(x)+x-3\sin x=f(-x)+(-x)-3\sin(-x)$，设 $g(x)=f(x)+x-3\sin x$，则有 $g(x)=g(-x)$，所以 $g(x)$ 是偶函数，因为 $x>0$ 时，$f'(x)<3\cos x-1$，所以 $g'(x)=f'(x)+1-3\cos x<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，又 $g(x)$ 是偶函数，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递增，又不等式 $f(x)\geqslant f\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3}+3\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 等价于 $f(x)+x-3\sin x\geqslant f\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-3\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，即 $g(x)\geqslant g\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，根据 $g(x)$ 的单调性和奇偶性可得 $|x|\leqslant\left|x-\frac{\pi}{3}\right|$，解得 $x\leqslant\frac{\pi}{6}$. 故选 ABC 项.

三、填空题

13. $\frac{1}{n}$ $\left(\text{答案不唯一，例如}\left(\frac{1}{2}\right)^n\text{等，只要符合题意就得分}\right)$

14. $1-\frac{1}{e}$ 【解析】由 $f(x+2)=-f(x)$ 可得 $f(x)$ 是周期函数且周期 $T=4$，所以 $f(2\ 021)=f(4\times505+1)=f(1)$，又因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(1)=-f(-1)=-(e^{-1}-1)=1-\frac{1}{e}$.

15. $\left(\frac{7}{6},\frac{13}{6}\right]$ 【解析】$f(x)=4\cos\omega x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x+\frac{1}{2}\cos\omega x\right)=2\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+2\cos^2\omega x=\sqrt{3}\sin 2\omega x+\cos 2\omega x+1=2\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)+1$，因为 $x\in(0,\pi)$，所以 $2\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},2\omega\pi+\frac{\pi}{6}\right)$，由正弦函数的图像可得 $\frac{5\pi}{2}<2\omega\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{9\pi}{2}$，解得 $\omega\in\left(\frac{7}{6},\frac{13}{6}\right]$.

16. $\sqrt{6}-\sqrt{3}$　$\sqrt{6}$ 【解析】方法一：由 $xy^2(x+6y)=1$ 可得 $x(x+6y)=\frac{1}{y^2}$，$(x+3y)^2=x^2+6xy+9y^2=x(x+6y)+9y^2=\frac{1}{y^2}+9y^2\geqslant2\sqrt{\frac{1}{y^2}\times9y^2}=6$，当且仅当 $\frac{1}{y^2}=9y^2$ 即 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立，此时 $x+3y$ 取得最小值 $\sqrt{6}$，$x=\sqrt{6}-3y=\sqrt{6}-\sqrt{3}$.

方法二：由 $xy^2(x+6y)=1$ 可得 $y^2x^2+6y^3x-1=0$，因为 $x>0$，解得 $x=\frac{-6y^3+\sqrt{36y^6+4y^2}}{2y^2}=-3y+\frac{\sqrt{36y^6+4y^2}}{2y^2}=-3y+\sqrt{\frac{9y^6+y^2}{y^4}}=-3y+\sqrt{9y^2+\frac{1}{y^2}}$，所以 $x+3y=\sqrt{9y^2+\frac{1}{y^2}}\geqslant\sqrt{2\sqrt{9y^2\times\frac{1}{y^2}}}=\sqrt{6}$（以下同方法一）.

方法三：$x+3y=\frac{1}{2}[x+(x+6y)]=\frac{1}{2}\sqrt{(x+6y-x)^2+4x(x+6y)}=\frac{1}{2}\sqrt{36y^2+\frac{4}{y^2}}=\sqrt{9y^2+\frac{1}{y^2}}\geqslant\sqrt{2\sqrt{9y^2\times\frac{1}{y^2}}}=\sqrt{6}$（以下同方法一）.

四、解答题

17. 解：(1) 显然 $a_n\neq0$，由 $a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+1}$ 两边同时取倒数得 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+1}{a_n}=\frac{1}{a_n}+2$，

即 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2$，所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是公差为 2 的等差数列.　(3 分)

故 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)\times2=2n$，即 $a_n=\frac{1}{2n}$.　(5 分)

(2) 选①：

由已知得 $b_n=\frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{4n(n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$.　(7 分)

那么数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{4n+4}$.　(10 分)

选②：

由已知得 $b_n=(-1)^n\cdot2n$，

那么数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=-2+4-6+8+\cdots+(-1)^n\cdot2n$，

当 n 为偶数时，$T_n=2\times\frac{n}{2}=n$；　(7 分)

当 n 为奇数时，$T_n=-2+(-2)\times\frac{n-1}{2}=-n-1$.　(9 分)

故 $T_n=\begin{cases}n, & n\text{ 是偶数},\\ -n-1, & n\text{ 是奇数}.\end{cases}$　(10 分)

选③：

由已知得 $b_n=2n+\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}=2n+\left(\frac{1}{9}\right)^n$，

那么数列$\{b_n\}$的前n项和$T_n=(2+4+\cdots+2n)+\left[\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{9}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{9}\right)^n\right]=\frac{(2+2n)n}{2}+\frac{\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{9^n}\right)}{1-\frac{1}{9}}=n^2+n+\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{9^n}\right)$. (10分)

18. **解**:(1)由图像可得$A=2$, (1分)

$\frac{13\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}T=\frac{3}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega}$,解得$\omega=2$, (2分)

$2\times\frac{13\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$,解得$\varphi=-\frac{5\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

因为$0\leqslant\varphi<\pi$,所以$\varphi=\frac{\pi}{3}$. (5分)

所以$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$. (6分)

(2)由题意得$g(x)=2\sin\left[4\left(x-\frac{\pi}{8}\right)+\frac{\pi}{3}\right]+1=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)+1$. (8分)

令$4x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$,解得$x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{4}$,

所以函数$g(x)$图像的对称轴方程是$x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$. (10分)

令$4x-\frac{\pi}{6}=k\pi,x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{4}$,

所以函数$g(x)$图像的对称中心坐标是$\left(\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{4},1\right)$,$k\in\mathbf{Z}$. (12分)

(缺少一个或缺少多个$k\in\mathbf{Z}$,总共扣1分)

19. **解**:设$\triangle ABC$三条边的长度分别为$b-1,b,b+1(b\geqslant2$且$b\in\mathbf{N}_+)$.

(1)由勾股定理得$(b-1)^2+b^2=(b+1)^2$,解得$b=4$或0(舍), (2分)

则三边长度分别为$a=3,b=4,c=5$.

方法一:易知$\sin B=\frac{4}{5},\cos B=\frac{3}{5}$,

在$\triangle BCD$中,

$\sin\angle BDC=\sin(\pi-\angle B-\angle BCD)=\sin(B+45^\circ)=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$, (4分)

由正弦定理得,$\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{CD}{\sin\angle B}$,即$\frac{3}{\frac{7\sqrt{2}}{10}}=\frac{CD}{\frac{4}{5}}$,解得$CD=\frac{12\sqrt{2}}{7}$. (6分)

方法二:由$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}$可得$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\cdot b\cdot CD\cdot\sin45^\circ+\frac{1}{2}\cdot a\cdot CD\cdot\sin45^\circ$,

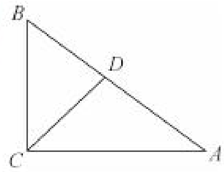
整理得$\sqrt{2}CD+\frac{3\sqrt{2}}{4}CD=6$,解得$CD=\frac{12\sqrt{2}}{7}$. (6分)

方法三:在$\triangle ABC$中,由角分线定理得$\frac{BD}{AD}=\frac{BC}{AC}=\frac{3}{4}$,

所以$\overrightarrow{CD}=\frac{3}{7}\overrightarrow{CA}+\frac{4}{7}\overrightarrow{CB}$, (4分)

那么$|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{\left(\frac{3}{7}\overrightarrow{CA}+\frac{4}{7}\overrightarrow{CB}\right)^2}=\sqrt{\left|\frac{3}{7}\overrightarrow{CA}\right|^2+\left|\frac{4}{7}\overrightarrow{CB}\right|^2}=\frac{12\sqrt{2}}{7}$. (6分)

(其他方法酌情给分)



(2)由题意得$\cos C=\frac{(b-1)^2+b^2-(b+1)^2}{2b(b-1)}<0$,

整理得$b^2-4b<0$,解得$0<b<4$,

由三角形两边之和大于第三边可得$b-1+b>b+1$,

解得$b>2$,所以$2<b<4$,故$b=3$, (8分)

则三边长度分别是$a=2,b=3,c=4$,

此时$\cos C=\frac{4+9-16}{2\times2\times3}=-\frac{1}{4}$,

因为$C\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,所以$\sin C=\sqrt{1-\cos^2C}=\frac{\sqrt{15}}{4}$, (10分)

故$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times2\times3\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{3\sqrt{15}}{4}$. (12分)

20. **解**:(1)由已知得$S_{n+2}-S_n=2(S_{n+1}-S_{n-1})$,即$a_{n+2}+a_{n+1}=2(a_{n+1}+a_n)$,

整理得$a_{n+2}-a_{n+1}-2a_n=0$,

由$\{a_n\}$是等比数列可得$a_nq^2-a_nq-2a_n=0$,

即$q^2-q-2=0$,解得$q=2$或-1(舍), (3分)

则$a_n=2^{n-1}$. (4分)

(直接令$n=1$求出结果也给满分)

(2)根据题意得$T_n=3\times\frac{1}{2^0}+5\times\frac{1}{2^1}+7\times\frac{1}{2^2}+\cdots+(2n+1)\times\frac{1}{2^{n-1}}$,

$\frac{1}{2}T_n=3\times\frac{1}{2^1}+5\times\frac{1}{2^2}+7\times\frac{1}{2^3}+\cdots+(2n+1)\times\frac{1}{2^n}$,

两式相减得,$\frac{1}{2}T_n=3-(2n+1)\times\frac{1}{2^n}+2\times\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}=5-\frac{2n+5}{2^n}$, (7分)

所以$T_n=10-\frac{2n+5}{2^{n-1}}(n\in\mathbf{N}_+)$. (8分)

(3)由已知得 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，$\lambda\geqslant\frac{2n-5}{2^{n-1}}$，即 $\lambda\geqslant\left(\frac{2n-5}{2^{n-1}}\right)_{\max}$.

(9 分)

设 $b_n=\frac{2n-5}{2^{n-1}}(n\in\mathbf{N}_+)$，$b_{n+1}-b_n=\frac{2n-3}{2^n}-\frac{2n-5}{2^{n-1}}=\frac{-2n+7}{2^n}$，

当 $1\leqslant n\leqslant 3$ 时，$b_{n+1}-b_n>0$；当 $n\geqslant 4$ 时，$b_{n+1}-b_n<0$，

所以当 $n=4$ 时，b_n 取最大值 $\frac{3}{8}$，即 $\lambda\geqslant\frac{3}{8}$，　　(11 分)

故 λ 的最小值是 $\frac{3}{8}$.　　(12 分)

21.(1)**解**：函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=(x^2-2)e^x+2e-\frac{e^2}{x}$，可得 $f'(1)=e-e^2$，

(2 分)

又 $f(1)=e$，所以 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-e=(e-e^2)(x-1)$，

整理得 $(e^2-e)x+y-e^2=0$(或斜截式方程 $y=(e-e^2)x+e^2$).　　(4 分)

(2)**证明**：要证 $(x^2-2x)e^x+2ex-e^2\ln x>0$，

只需证 $(x^2-2x)e^x+2ex>e^2\ln x$，

因为 $x>0$，所以不等式等价于 $(x-2)e^x+2e>\frac{e^2\ln x}{x}$.

(6 分)

设 $g(x)=(x-2)e^x+2e$，$h(x)=\frac{e^2\ln x}{x}$，

$g'(x)=(x-1)e^x$，当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,1]$ 单调递减，在 $[1,+\infty)$ 单调递增，

故 $g(x)_{\min}=g(1)=e$.　　(8 分)

又 $h'(x)=\frac{e^2(1-\ln x)}{x^2}$，当 $0<x<e$ 时，$h'(x)>0$；当 $x>e$ 时，$h'(x)<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,e]$ 单调递增，在 $[e,+\infty)$ 单调递减，

故 $h(x)_{\max}=h(e)=e$，　　(10 分)

因为 $g(x)_{\min}=h(x)_{\max}$ 且两个函数的最值点不相等，

所以有 $g(x)>h(x)$，原不等式得证.　　(12 分)

22.**解**：(1)$f'(x)=2x^2-2(2a+1)x+4a=2(x-1)(x-2a)$，　　(1 分)

当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)=2(x-1)^2\geqslant 0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数；

当 $a<\frac{1}{2}$ 时，令 $f'(x)>0$，解得 $x<2a$ 或 $x>1$；

令 $f'(x)<0$，解得 $2a<x<1$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,2a]$ 和 $[1,+\infty)$ 是增函数，在 $[2a,1]$ 是减函数；　　(2 分)

当 $a>\frac{1}{2}$ 时，令 $f'(x)>0$，解得 $x<1$ 或 $x>2a$；

令 $f'(x)<0$，解得 $1<x<2a$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 和 $[2a,+\infty)$ 是增函数，在 $[1,2a]$ 是减函数.　　(4 分)

(2)由(1)得，当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，

因为 $f(0)=\frac{1}{3}>0$，且 $x\to-\infty$，$f(x)\to-\infty$，所以 $f(x)$ 只有一个零点 x_0，且 $x_0<0$，符合题意；　　(5 分)

当 $a<\frac{1}{2}$ 时，需要满足 $\begin{cases}f(0)>0,\\f(1)>0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}\frac{16}{3}a^3>0,\\\frac{16}{3}a^3+2a-\frac{1}{3}>0,\end{cases}$ 解得 $a<-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{8}<a<\frac{1}{2}$；

(6 分)

当 $a>\frac{1}{2}$ 时，需要满足 $\begin{cases}f(0)>0,\\f(2a)>0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}\frac{16}{3}a^3>0,\\-\frac{8}{3}a^3+\frac{28}{3}a^2>0,\end{cases}$ 解得 $\frac{1}{2}<a<\frac{7}{2}$.　　(7 分)

综上所述，a 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{8},\frac{7}{2}\right)$.

(8 分)

(3)当 $a=-\frac{1}{4}$ 时，$f(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{3}$，

$f(\sin x)+f(\cos x)$

$=\frac{2}{3}(\sin^3x+\cos^3x)-\frac{1}{2}(\sin^2x+\cos^2x)-(\sin x+\cos x)+\frac{2}{3}$

$=\frac{2}{3}(\sin x+\cos x)(\sin^2x-\sin x\cos x+\cos^2x)-\frac{1}{2}-(\sin x+\cos x)+\frac{2}{3}$

$=(\sin x+\cos x)\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\sin x\cos x\right)-(\sin x+\cos x)+\frac{1}{6}$

$=(\sin x+\cos x)\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\sin x\cos x-1\right)+\frac{1}{6}$

$=-\frac{1}{3}(\sin x+\cos x)(1+2\sin x\cos x)+\frac{1}{6}$

$=-\frac{1}{3}(\sin x+\cos x)^3+\frac{1}{6}$

$=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{6}$.　　(10 分)

因为 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in[-1,1]$，所以 $|f(\sin x)+f(\cos x)|\in\left[0,\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{6}\right]$.　　(11 分)

因为 $1<\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{6}<2$，所以存在 $k=1$，使得关于 x 的方程 $|f(\sin x)+f(\cos x)|=k$ 有解.　　(12 分)

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于中国拔尖人才培养的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户（官方网址：www.zizzs.com）、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承‘’专业、专注、有态度‘’的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+ 大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网 “年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的新高考拔尖人才培养服务平台。