中国第二届女子数学奥林匹克（CGMO）试题

第一天

2003.8.27 上午 8：30~12：30 武汉

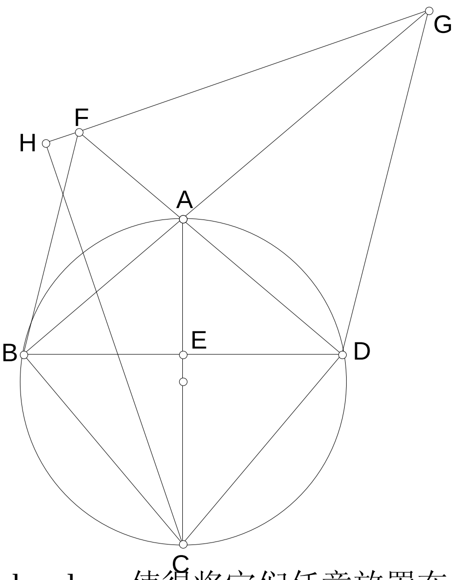
1．已知 D 是△ABC 的边 AB 上的任意一点，E 是边 AC 上的任意一点，连结 DE，F 是线段 DE 上的任意一点，设 $\frac{AD}{AB}=x,\frac{AE}{AC}=y,\frac{DF}{DE}=z$．证明:

(1) $S_{\Delta BDF}=(1-x)yzS_{\Delta ABC}$; $S_{\Delta CEF}=x(1-y)(1-z)S_{\Delta ABC}$；

(2) $\sqrt[3]{S_{\Delta BDF}}+\sqrt[3]{S_{\Delta CEF}}\le\sqrt[3]{S_{\Delta ABC}}$．

2．某班有 47 个学生，所用教室有 6 排，每排有 8 个座位，用 (i,j) 表示位于第 i 排第 j 列的座位．新学期准备调整座位，设一个学生原来的座位为 (i,j)，如果调整后的座位为 (m,n)，则称该生作了移动 $[a,b]=[i-m,j-n]$，并称 $a+b$ 为该生的位置数，将所有学生的位置数之和记为 S，求 S 的最大可能值与最小可能值之差．

3．如图，ABCD 是圆内接四边形，AC 是圆的直径，BD⊥AC，AC 与 BD 的交点为 E，F 在 DA 的延长线上，连结 BF，G 在 BA 的延长线上，使得 DG∥BF，H 在 GF 的延长线上，使得 CH⊥GF．
证明：B、E、F、H 四点共圆．



4．(1)证明：存在和为 1 的五个非负实数 a,b,c,d,e，使得将它们任意放置在一个圆周上，总有两个相邻的数的乘积不小于 $\frac{1}{9}$．

(2)证明：对于和为 1 的任意五个非负实数 a,b,c,d,e，总可以将它们适当放置在一个圆周上，并且任意相邻两数的乘积均不大于 $\frac{1}{9}$．

中国第二届女子数学奥林匹克（CGMO）试题

第二天

2003.8.28 上午 8：30~12：30 武汉

5．定义数列$\{a_n\}$如下：$a_1=2, a_{n+1}=a_n{}^2-a_n+1, n=1,2,\cdots$.

证明：$1-\frac{1}{2003^{2003}}<\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2003}}<1$.

6. 给定正整数$n\geq 2$，求最大的实数λ，使得不等式$a_n{}^2\geq\lambda\left(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}\right)+2a_n$

对任何满足$a_1<a_2<\cdots<a_n$的正整数$a_1,a_2,\cdots,a_n$均成立.

7．设△ABC 的三边长分别为$AB=c, BC=a, CA=b$，a,b,c 互不相等，AD、BE、CF 分别为△ABC 的内角平分线，且 DE＝DF．证明：

(1)$\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$；

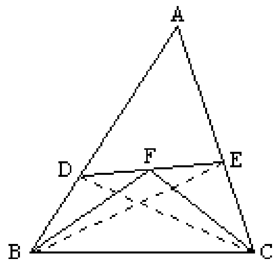
(2)$\angle BAC>90^0$.

8．对于任意正整数 n，记 n 的所有正约数组成的集合为 S_n.

证明：S_n 中至多有一半元素的个位数为 3.

一、(1)$S_{\triangle BDF}=zS_{\triangle BDE}=z(1-x)S_{\triangle ABE}=z(1-x)yS_{\triangle ABC}$；

$S_{\triangle CEF}=(1-z)S_{\triangle CDE}=(1-z)(1-y)S_{\triangle ACD}=(1-z)(1-y)xS_{\triangle ABC}$。



(2)由(1)得：

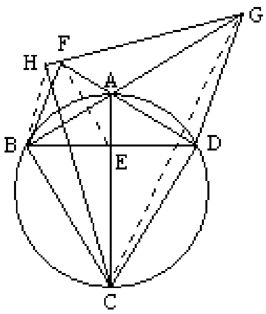
$$\sqrt[3]{S_{\triangle BDF}}+\sqrt[3]{S_{\triangle CEF}}$$
$$=\left(\sqrt[3]{(1-x)yz}+\sqrt[3]{x(1-y)(1-z)}\right)\sqrt[3]{S_{\triangle ABC}}$$
$$\leqslant\left(\frac{(1-x)+y+z}{3}+\frac{x+(1-y)+(1-z)}{3}\right)\sqrt[3]{S_{\triangle ABC}}$$
$$=\sqrt[3]{S_{\triangle ABC}}$$

二、答案：12。添加一个虚拟学生A，此时位置数之和记为S′，注意交换相邻两个学生的位置，不改变S′的值，通过有限次交换相邻两个学生的位置，可以还原到前一天的位置，因此S′=0。因而S加上A的位置数为0，当A位于右上角时，A的位置数最大；当A位于左下角时，A的位置数最小，所以，S的最大值与最小值之差为5+7=12。

三、连结BH，EF，CG，因为△BAF∽△GAD，所以

$$\frac{FA}{AB}=\frac{DA}{AG}，\quad ①$$

又因为△ABE∽△ACD，所以$\frac{AB}{EA}=\frac{AC}{DA}$，　②



①×②得$\frac{FA}{EA}=\frac{AC}{AG}$。因为∠FAE=∠CAG，所以△FAE∽△CAG，于是∠FEA=∠CGA。

由题设知，∠CBG=∠CHG=90°，所以B，C，G，H四点共圆，得∠BHC=∠BGC。于是：

∠BHF+∠BEF=∠BHC+90°+∠BEF=∠BGC+90°+∠BEF=∠FEA+90°+∠BEF=180°，

所以，B，E，F，H四点共圆。

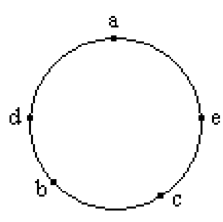
四、(1)当a=b=c=$\frac{1}{3}$，d=c=0时，此时把a，b，c，d，e任意放置在一个圆周上，总有两个$\frac{1}{3}$是相邻的，它们的乘积不小于$\frac{1}{9}$。

(2)不妨设a≥b≥c≥d≥e≥0，把a，b，c，d，e按如图所示放置。因为a+b+c+d+e=1，所以a+3d≤1，

$a\cdot 3d\leqslant\left(\frac{a+3d}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{4}$，所以$ad\leqslant\frac{1}{12}$。又因为：

a+b+c≤1，所以$b+c\leqslant\frac{2}{3}$，于是$bc\leqslant\frac{(b+c)^2}{4}\leqslant\frac{1}{9}$。

因为ce≤ae≤ad，bd≤bc，所以此时相邻两数的乘积均小于$\frac{1}{9}$。



五、由题设得：$a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)$，所以 $\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_n}$

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2003}}$

$=(\frac{1}{a_1-1}-\frac{1}{a_2-1})+(\frac{1}{a_2-1}-\frac{1}{a_3-1})+\cdots+(\frac{1}{a_{2003}-1}-\frac{1}{a_{2004}-1})$

$=\frac{1}{a_1-1}-\frac{1}{a_{2004}-1}=1-\frac{1}{a_{2004}-1}$，

易知数列$\{a_n\}$是严格递增的，所以 $a_{2004}>1$，故 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2003}}<1$。

为了证明左边不等式，只要证明 $a_{2004}-1>2003^{2003}$。

由已知用归纳法可得 $a_{n+1}=a_na_{n-1}\cdots a_1+1$，及 $a_n\cdots a_1>n^n$，$n\geqslant1$。从而结论成立。

六、当 $a_i=i$，$i=1$，2，…，n 时，$\lambda\leqslant(n-2)\div\frac{n-1}{2}=\frac{2n-4}{n-1}$。

下面证明不等式 $a_n^2\geqslant\frac{2n-4}{n-1}(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})+2a_n$ 对任何满足 $0<a_1<a_2<\cdots<a_n$ 的整数 a_1，a_2，…，a_n 均成立。因为 $a_k\leqslant a_n-(n-k)$，$k=1$，2，…，$n-1$，$a_n\geqslant n$，所以：

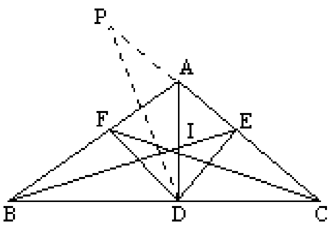
$$\frac{2n-4}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}a_k\leqslant\frac{2n-4}{n-1}\left((n-1)a_n-\frac{n(n-1)}{2}\right)$$

$$\leqslant(2n-4)a_n-n(n-2)$$

$$=(n-2)(2a_n-n)\leqslant(a_n-2)a_n,$$

即 $a_n^2\geqslant\frac{2n-4}{n-1}(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})+2a_n$，所以，$\lambda$ 的最大值为 $\frac{2n-4}{n-1}$。

七、由正弦定理得：$\frac{\sin\angle AFD}{\sin\angle FAD}=\frac{AD}{FD}=\frac{AD}{ED}=\frac{\sin\angle AED}{\sin\angle DAE}$，



所以 $\sin\angle AFD=\sin\angle AED$，故 $\angle AFD=\angle AED$，

或 $\angle AFD+\angle AED=180°$，若 $\angle AFD=\angle AED$，

则 $\triangle ADF\cong\triangle ADE$，得 $AF=AE$，于是 $\triangle AIF\cong\triangle AIE$，

得 $\angle AFI=\angle AEI$，从而 $\triangle AFC\cong\triangle AEB$，故 $AC=AB$，矛盾。所以，$\angle AFD+\angle AED=180°$，

A，F，D，E 四点共圆，于是 $\angle DEC=\angle DFA>\angle ABC$，在CE 的延长线上取一点P，使得 $\angle DPC=\angle B$，则（$PC=PE+CE$ ①）由 $\angle BFD=\angle PED$，$FD=ED$，得 $\triangle BFD\cong\triangle PED$，

故 $PE=BF=\frac{ac}{a+b}$，又 $\triangle PCD\backsim\triangle BCA$，所以 $\frac{PC}{BC}=\frac{CD}{CA}$，于是（$PC=a\cdot\frac{ba}{b+c}\cdot\frac{1}{b}=\frac{a^2}{b+c}$ ②）

由①，②得 $\frac{a^2}{b+c}=\frac{ac}{a+b}+\frac{ab}{c+a}$，所以 $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$；(2)由(1)知 $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$，所以

$a(a+b)(a+c)=b(b+a)(b+c)+c(c+a)(c+b)$，

$a^2(a+b+c)=b^2(a+b+c)+c^2(a+b+c)+abc$，

$>b^2(a+b+c)+c^2(a+b+c)$，故 $a^2>b^2+c^2$，所以，$\angle BAC>90°$

八、我们考虑如下三种情况：

(1)n 能被5 整除，设d_1，d_2，…d_m为S_n中所有个位数为3 的元素，则S_n中还包括$5d_1$，$5d_2$，…，$5d_m$这m 个个位数为5 的元素，所以S_n中至多有一半元素的个位数为 3。

(2)n 不能被5 整除，且n 质因了的个位数均为1 或9，则S_n中所有的元素的个位数均为1 或9。结论成立。

(3)n 不能被5 整除，且n 有个位数为3 或7 质因子p，令$n=p^r q$，其中q 和r 都是正整数，p 和q 互质，设$S_q=\{a_1，a_2，…，a_k\}$为q 的所有正约数组成的集合，将S_n中的元素写成如下方阵

a_1，a_1p，a_1p^2，…，a_1p^r，

a_2，a_2p，a_2p^2，…，a_2p^r，

……

a_k，a_kp，a_kp^2，…，a_kp^r

对于$d_i=a_jp^L$，选择a_jp^{L-1}或a_jp^{L+1}之与之配对（所选之数必须在S_n中）。设e_i为所选之数，我们称$(d_i，e_i)$为一对朋友。如果d_i的个位数为3，则由p 的个位数是3 或7，知e_i的个位数不是3。假设d_i和d_j的个位数都是3，且有相同的朋友$e=a_Mp^L$，则$\{d_i，d_j\}=\{a_Mp^{L-1}，a_Mp^{L+1}\}$，因为p 的个位数为3 或7，所以$p^2$的个位数是9，而n 不能被5 整除，故$a_M$的个位数不为0，所以$a_Mp^{L-1}$，$a_Mp^{L-1}\cdot p^2=a_Mp^{L+1}$的个位数不同，这与$d_i$和$d_j$的个位数都是3 矛盾，所以，每个个位数为3 的$d_i$均有不同的朋友。

综上所述，S_n中每个个位数为3 的元素，均与一个S_n中个位数不为3 的元素为朋友，而且两个个位数为3 的不同元素的朋友也是不同的，所以，S_n中至多有一半元素的个位数为 3。